Lucian Vögele. 1876.

Die

# Elemente der Mathematik.

Von

Dr. Richard Baltzer
Professor an der Universität Gießen, Mitglied der k. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.

## Zweiter Band.

Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie.

Mit 339 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Vierte verbesserte Auflage.

---

Leipzig
Verlag von S. Hirzel.
1874.

# Vorrede.

Die in der zweiten Auflage dieser Elemente in Erinnerung gebrachten neuern Untersuchungen der Raumbegriffe haben zu der Anerkenntniß geführt, daß die unendlich fernen Puncte einer Geraden ebensowohl gesondert (real oder nicht real) sein können, als sie gemäß der Euclidischen Annahme vereint sind, und daß die Gerade für eine geschlossene Linie gehalten werden kann oder muß, wenn auf ihr gesonderte unendlich ferne Puncte nicht vorhanden sind. Es ist daher nicht zulässig, die in der Parallelentheorie vorhandene Unbestimmtheit durch Einfügung eines besondern Axioms zu verdecken; man hat vielmehr anzuerkennen, daß von jener Stelle ab die Geometrie auch andre Wege einschlagen kann. Die Klärung dieses Umstandes und die Vereinfachung des Euclidischen Weges ist eine wesentliche Verbesserung, welche die vierte Auflage dieser Elemente durch einige Umstellungen im zweiten Paragraphen der Planimetrie sowie durch Präcisirung einiger Ausdrücke erhalten hat.

Andre Verbesserungen sind in der Planimetrie §. 12, 8 und §. 13, 8, in der Stereometrie §. 2, 5, in der Trigonometrie §. 3, 5 und §. 4, 6 gemacht worden. Zusätze, deren mehrere ich freundlichen Mittheilungen der Herren Amthor in Dresden, Binder in Schönthal, Wertheim in Frankfurt a. M. verdanke, haben erhalten in der Planimetrie §. 8, 4. §. 8, 6. §. 12, 2. §. 14, 4. §. 14, 23, in der Stereometrie §. 7, 7, in der Trigonometrie §. 3, 4. §. 3, 5. §. 4, 14. §. 6, 1. §. 7, 6. §. 7, 10.

Die beigefügten historischen Notizen sind in der neuen Auflage zum Theil verbessert und ergänzt worden. Diese Anmerkungen geben

nicht nur erwünschte Quellenanzeigen, sie bilden auch die Elemente einer Geschichte der Sätze, Theorien, Benennungen und Bezeichnungen. Die Geschichte der Sätze ist es, ohne welche die Geschichte der mathematischen Meister nicht genügend gegeben werden kann. Erst auf dem Grunde beider Vorarbeiten kann die Geschichte der Mathematik, ihre Entwickelung in verschiedenen Epochen, ihr Antheil an den verschiedenen Culturepochen zu würdiger Darstellung gelangen.

# Inhalt.

## Viertes Buch.

### Planimetrie.

# Fünftes Buch.

## Stereometrie.

# Sechstes Buch.

## Trigonometrie.

# Viertes Buch.

## Planimetrie.

## §. 1. Grundbegriffe.

1. Der **Raum** ist ohne Unterbrechung und über jede Grenze hinaus **ausgedehnt**. Ein Ort im Raume ohne Ausdehnung gedacht, heißt ein **Punct**. Ein Ausgedehntes ist entweder eine **Linie**, oder eine **Fläche**, oder ein **Raum** im engern Sinne (Körper, στερεόν, solidum). Auf einer Linie lassen sich unendlich viele Puncte unterscheiden, auf einer Fläche unendlich viele Linien, in einem Raume unendlich viele Flächen. Eine Linie ist zu beiden Seiten eines auf ihr liegenden Punctes ausgedehnt (in die Länge), eine Fläche ist zu beiden Seiten einer auf ihr liegenden Linie ausgedehnt (in die Länge und Breite), ein Raum ist zu beiden Seiten einer in ihm liegenden Fläche ausgedehnt (in die Länge, Breite und Dicke); Linie, Fläche, Raum heißen deshalb nach 1, 2, 3 **Dimensionen** ausgedehnt. Eine Linie kann als Bahn (Ort, τόπος) eines bewegten Punctes, eine Fläche als Bahn einer bewegten Linie, ein Raum als Bahn einer bewegten Fläche betrachtet werden.

2. Linien werden **begrenzt** durch Puncte (Endpuncte), Flächen durch Linien (Umfang, περίμετρος, περιφέρεια), Räume durch Flächen (Oberfläche, ἐπιφάνεια, superficies), und haben zwischen ihren Grenzen bestimmte Größe. Die Größe einer Linie heißt ihre **Länge**, die Größe einer Fläche ihre **Fläche** (Flächeninhalt, area, ἐμβαδόν, ἐπιφάνεια), die Größe eines Raumes sein **Volum** (Körperinhalt, volumen, capacitas, στερεόν); diese Größen werden **extensive** genannt im Gegensatz zu nicht ausgedehnten (intensiven) Größen.

3. Die einfachste unter den Linien ist die **Gerade**, welche eine von einem Puncte ausgehende **Richtung** (und die entgegengesetzte) angiebt und nach dieser Richtung unbegrenzt sich weiter erstreckt. Zwei Gerade sind **congruent**, d. h. sie können so vereint werden, daß alle Puncte der einen mit Puncten der andern zusammenfallen, oder wie man kürzer sagt, daß sie sich decken (congruiren, coincidiren). **Wenn zwei Gerade 2 Puncte gemein haben, so decken sie sich** (Axiom von der Geraden); eine Gerade ist also durch 2 Puncte bestimmt. Durch einen Punct können unendlich viel Gerade in verschiedenen Richtungen gezogen

werden; je zwei derselben **schneiden sich** in dem gemeinschaftlichen Puncte d. h. jede erstreckt sich auf einer diese Linien enthaltenden Fläche von dem gemeinschaftlichen Puncte nach beiden Seiten der andern.

Eine Linie heißt **krumm** (curva), wenn irgend 3 Puncte derselben, die einander beliebig nahe sind, im Allgemeinen nicht auf einer Geraden liegen. Ein begrenztes Stück von einer Geraden heißt eine **Strecke**, von einer Curve ein **Bogen** (arcus); die Strecke zwischen den Endpuncten eines Bogens wird die **Sehne** (chorda) des Bogens genannt.

Sind $A$, $B$, $C$ Puncte einer Linie, $A$ und $C$ durch $B$ getrennt, und wird der zwischen $A$ und $B$ enthaltene Bogen (Strecke) durch $AB$ bezeichnet, so erscheinen $AB$ und $BC$ als Theile von $AC$, und man hat

$$AC = AB + BC$$
$$AB = AC - BC,\ BC = AC - AB$$
$$AB < AC,\ BC < AC$$

Der Begriff der Geraden ist vermöge seiner Einfachheit nicht definirbar, Richtung ohne die Gerade unverständlich. Die alte Definition (Eucl. I.) „Eine Gerade ist diejenige Linie, welche zwischen ihren Puncten gleichmäßig (ἐξ ἴσου) liegt" ist an sich dunkel und gewinnt erst Klarheit durch das Axiom „zwei Gerade schließen keinen Raum ein", nach welchem behauptet wird, daß zwei Gerade sich decken, wenn sie zwei Puncte gemein haben, und daß eine Gerade ihre Lage nicht ändern kann, wenn sie in zwei Puncten festgehalten ist. Der alte Satz: „Eine Gerade ist die kürzeste Linie zwischen zwei Puncten" ist auch als Definition vorangestellt worden.

**4.** Eine Fläche heißt **geradlinig** (Regelfläche, surface réglée), wenn durch jeden Punct derselben eine Gerade sich ziehn läßt, die auf der Fläche liegt.*) Die Bahn einer irgendwie bewegten Geraden ist eine geradlinige Fläche. Die einfachste unter den geradlinigen Flächen ist die **Ebene** (ἐπί-πεδος, planum), auf der die Geraden liegen, die durch einen gegebenen Punct gehn und mit einer gegebenen Geraden einen Punct gemein haben. **Wenn eine Gerade mit einer Ebene 2 Puncte gemein hat, so liegt sie auf der Ebene** (Axiom von der Ebene).

Zwei Ebenen sind congruent. **Wenn zwei Ebenen 3 Puncte gemein haben, die nicht auf einer Geraden liegen, so decken sie sich**; eine Ebene ist durch 3 Puncte, die nicht auf einer Geraden liegen, bestimmt. Sind nämlich $A$, $B$, $C$ solche gemeinschaftliche Puncte der Ebenen $\alpha$, $\beta$, so liegen die Geraden $AB$, $AC$, $BC$ auf beiden Ebenen. Diese Geraden theilen jede der Ebenen in 7 Felder, von denen eines einen geschlossenen Umfang hat. Ist nun $D$ ein Punct von $\alpha$ in dem geschlossenen Felde, so ist $AD$ eine Gerade von $\alpha$, und diese Gerade schneidet die Gerade $BC$ in $D'$, weil $B$ und $C$ auf verschiedenen

*) Diese Benennung rührt von Monge her. Vergl. Hachette géom. déscr. 1822, préface p. 13.

Seiten von $AD$ liegen. Der Punct $D'$ liegt aber auf $\beta$, also liegt auch die Gerade $AD'$ mit dem Punct $D$ auf $\beta$. Ist ferner $E$ ein Punct von $\alpha$ in einem andern Felde, so daß z. B. $E$ und $A$ auf verschiedenen Seiten der Geraden $BC$ liegen, so schneiden sich die Geraden $AE$ und $BC$ der Ebene $\alpha$ in $E'$. Der Punct $E'$ liegt aber auf $\beta$, also liegt auch die Gerade $AE'$ mit dem Punct $E$ auf $\beta$.

Eucl. I. erklärt die Ebene als die Fläche, welche zwischen den auf ihr gezogenen Geraden gleichmäßig liegt, um (XI, 1) zu schließen, daß eine Gerade auf der Ebene liegt, wenn sie 2 Puncte mit ihr gemein hat. Etwas deutlicher hat Leibniz die Ebene und die Gerade dadurch erklärt, daß jene den unbegrenzten Raum, diese eine unbegrenzte Ebene in zwei congruente Theile zerschneidet (Brief an Giordano, ed. Gerhardt I p. 196). Definitionen der Ebene, welche das Axiom „Wenn eine Gerade mit einer Ebene 2 Puncte gemein hat, so liegt sie auf der Ebene", verhüllt oder unverhüllt enthalten, sind unzulässig.

Bemerkenswerthe Versuche, jenes Axiom zum Theorem zu erheben, sind in neuester Zeit gemacht worden. Deahna (Demonstr. theorematis, esse superficiem planam. Dissert. inaug. Marburg 1837) construirt die Ebene durch Rotation eines Winkels um einen seiner Schenkel mit der Bedingung, daß eine concentrische Kugelfläche in zwei congruente Theile zerschnitten werde. Gauß ist der Meinung gewesen, daß Deahna's Darstellung von einigen Mängeln, die in ihr anzutreffen sind, sich befreien lasse; in seinem Nachlaß befindet sich ein diesen Gegenstand betreffender Aufsatz. Auf ähnliche Art haben Crelle (Journ. 45 p. 15), Gerling (Crelle J. 20 p. 332), Erb (die Probleme der Geraden u. s. w. Heidelberg 1846) das Axiom von der Ebene zu beseitigen gesucht. Unter den geometrischen Objecten sind zunächst nicht die Gerade und die Ebene, sondern die Kugel und der Kreis so definirbar, daß deren Möglichkeit einem Zweifel nicht unterliegt; man braucht nur starre Verbindungen von Puncten vorauszusetzen. Durch zwei congruente Schaaren von concentrischen Kugeln entsteht die Ebene als das Gemeinschaftliche von je zwei gleichen Kugeln. Die Gerade entsteht durch zwei congruente Schaaren von concentrischen Kreisen einer Ebene als das Gemeinschaftliche von je zwei gleichen Kreisen. (Lobatschewsky und Bolyai in den unten §. 2 angeführten Schriften.)

Eine Fläche heißt krumm, und eine Linie heißt uneben (doppelt gekrümmt), wenn irgend 4 Puncte derselben, die einander beliebig nahe sind, im Allgemeinen nicht auf einer Ebene liegen.

Sind $AB$, $BC$, $CA$ Linien auf einer Fläche, wird die zwischen diesen Linien enthaltene Fläche durch $ABC$ bezeichnet, sind endlich die Linien derselben Fläche $AD$, $BD$, $CD$ von deren Umfang $ABC$ eingeschlossen, so hat man

$$ABC = ABD + BCD + CAD, \text{ u. s. w. } (3).$$

5. Eine Ebene wird von 2 auf ihr sich schneidenden Geraden in 4 Felder getheilt, welche Winkel (γωνία, angulus) heißen. Die Stücke der Geraden, welche von dem gemeinschaftlichen Puncte sich erstrecken und einen Winkel einschließen, heißen die Schenkel des Winkels; der gemeinschaftliche Punct der Schenkel heißt der Scheitel des Winkels (vertex, sommet, Centrum).

Ein Winkel wird durch einen Punct des einen Schenkels, den Scheitel und einen Punct des andern Schenkels (in dieser Ordnung) unzweideutig bezeichnet, wenn der Sinn gegeben ist, in welchem der erste

Schenkel um den Scheitel gedreht werden muß, um den Winkel zurückzulegen. Z. B. die Formel $ASB$ oder $A\hat{S}B$ für den von dem Schenkel $SB$ mit dem Schenkel $SA$ gebildeten Winkel bedeutet den Winkel, welchen der erste Schenkel $SA$ zurücklegt, indem er um den Scheitel $S$ in bestimmtem Sinne (entweder linksum oder rechtsum für einen auf einer bestimmten Seite der Ebene stehenden Zuschauer) gedreht wird, bis er mit dem zweiten Schenkel $SB$ zusammenfällt. Bei entgegengesetztem Sinne der Drehung würde die Formel $ASB$ den Winkel bedeuten, der von der Ebene nach Wegnahme des vorigen Winkels übrig bleibt.

Ueberhaupt ist der von zwei Geraden $a$ und $b$ gebildete Winkel, den man durch $ab$ oder $a^\wedge b$ bezeichnet*), unzweideutig bestimmt, wenn von jeder Geraden angegeben wird, welche Richtung der auf ihr liegende Schenkel hat, und wenn zugleich der Sinn der Drehung angegeben wird, durch welche der erste Schenkel mit dem zweiten vereint werden soll.

Bei der Bezeichnung von allen gleichzeitig in Betracht kommenden Winkeln einer Ebene setzt man voraus, daß die Winkel durch *Drehungen von einerlei Sinn* beschrieben sind. Hiernach haben die Formeln $ASB$ und $BSA$, $ab$ und $ba$ verschiedene Bedeutung.**)

Ein Winkel kann als die Summe von andern Winkeln betrachtet werden. Wenn nämlich der Schenkel $SB$ von dem Winkel $ASC$ eingeschlossen ist, so hat man (unter der Voraussetzung desselben Sinnes der Drehung bei allen Winkeln)

$$ASC = ASB + BSC$$

$$ASB = ASC - BSC, \quad BSC = ASC - ASB$$

$$ASB < ASC, \quad BSC < ASC$$

insofern der Schenkel $SA$ bei der Zurücklegung des Winkels $ASC$ die Winkel $ASB$, $BSC$ nach einander zurücklegt. Um zwei gegebene Winkel zu vergleichen, vereint man den Scheitel des einen mit dem Scheitel des andern, einen Schenkel des einen mit einem Schenkel des andern, die Ebene des einen mit der Ebene des andern, so daß beide Winkel auf eine Seite des gemeinschaftlichen Schenkels fallen; je nachdem nun der eine Winkel den andern deckt oder nicht deckt, so sind die Winkel gleich oder ungleich. Gleiche Winkel sind congruent.

Ein Winkel heißt *gestreckt* (flach), wenn seine Schenkel entgegengesetzte Richtung haben und demnach auf einer Geraden liegen. Alle gestreckten Winkel sind einander gleich, weil sie congruent sind (3). Ein

---

*) Carnot géom. de pos. 83.

**) Diese näheren Bestimmungen und Unterscheidungen verdankt man Möbius anal. Sphärik 1, Kreisverwandtschaft 8, und anderwärts.

Winkel heißt concav (hohl) oder convex (erhaben, überstumpf), je nachdem er kleiner oder größer als ein gestreckter ist.

Aus der Größe des von zwei Schenkeln eingeschlossenen Winkels beurtheilt man die Abweichung (declinatio) der Richtung des einen Schenkels von der Richtung des andern, sowie die scheinbare Länge einer in dem Winkel enthaltenen und durch die Schenkel begrenzten Linie, wenn diese vom Scheitel aus betrachtet wird.

Die Definitionen: „Winkel ist die Neigung von zwei Linien gegen einander" (Eucl. I.), oder „der Unterschied ihrer Richtungen" oder „die Größe der Drehung, wodurch die eine in die Richtung der andern gebracht wird", machen den Winkel zu einer intensiven Größe, und stimmen nicht zu den üblichen Redeweisen z. B. ein Punct liegt in oder außer dem Winkel, eine Gerade schneidet von dem Winkel ein Dreieck ab, u. dgl. Als Ausschnitt der Ebene ist der Winkel von Bertrand (Développement nouveau de la partie élém. des Mathém. Genève 1778 II p. 6) aufgefaßt worden.

**6.** Auf einer Ebene können von einem gegebenen Puncte derselben unendlich viel Strecken ausgehn, die einer gegebenen Strecke gleich sind; die Endpuncte derselben liegen auf einer Linie, die ein Kreis (κύκλος, circulus) genannt wird. Der gegebene Punct heißt das Centrum (κέντρον, Mittelpunct) des Kreises, die Strecke vom Centrum bis zu einem Punct des Kreises heißt ein Radius (Halbmesser) des Kreises. Der Kreis ist eine geschlossene (in sich zurückkehrende) Linie; der von dem Kreise (Peripherie) eingeschlossene Theil der Ebene heißt die Fläche des Kreises, der andere Theil der Ebene wird von dem Kreise ausgeschlossen. Kreise, welche das Centrum gemein haben, heißen concentrisch. Concentrische Kreise einer Ebene haben entweder keinen construirbaren Punct gemein, oder sie decken sich. Ein Kreis ist durch einen Punct und das Centrum bestimmt.

Eine Gerade auf der Ebene des Kreises, die durch das Centrum geht, schneidet den Kreis in 2 Puncten, welche Gegenpuncte heißen; die zwischen Gegenpuncten enthaltene Strecke heißt ein Diameter (Durchmesser) des Kreises. Alle Diameter des Kreises sind einander gleich, weil jeder Diameter aus zwei Radien besteht. Die Peripherie und die Fläche des Kreises werden von einem Diameter in 2 congruente Theile getheilt, die sich decken, sowohl wenn man den einen Theil in der Ebene umdreht, bis die Endpuncte des ihn begrenzenden Diameters mit ihren Gegenpuncten zusammenfallen, als auch wenn man den einen Theil im Raume um den gemeinschaftlichen Diameter umdreht, bis seine Ebene mit der Ebene des andern wiederum zusammenfällt. Auch die durch verschiedene Diameter von dem Kreise abgeschnittenen Theile sind in der angegebenen Weise congruent und heißen Halbkreise.

Ein am Centrum von zwei Geraden gebildeter Winkel heißt ein Centriwinkel, von dem gesagt wird, daß er auf dem in ihm enthal-

tenen Bogen steht. Eine von zwei Radien und dem Bogen, der in ihrem Winkel liegt, eingeschlossene Fläche heißt ein Sector des Kreises. Auch die zu gleichen Centriwinkeln gehörigen Bogen und Sectoren des Kreises sind congruent und können auf doppelte Art so gelegt werden, daß sie sich decken. Ein von der Fläche des Kreises durch eine oder zwei Sehnen abgeschnittenes Stück heißt ein Segment des Kreises. Die Ausdrücke Sector, Segment werden in ähnlicher Bedeutung bei krummen Linien überhaupt angewendet.

7. Unter Figuren (im weitern Sinne) werden Systeme von Puncten oder Linien oder Flächen verstanden. Die Figuren heißen Linearfiguren, oder Flächenfiguren, oder Raumfiguren, je nachdem ihre Puncte auf einer gegebenen Linie, oder auf einer gegebenen Fläche, oder im Raume überhaupt liegen. Die mathematische Wissenschaft, welche von den Figuren handelt, heißt Geometrie. Der Theil der Geometrie, in welchem nur erst Linearfiguren und Planfiguren betrachtet werden, die in einer Ebene enthalten sind, heißt Planimetrie (Epipedometrie). Die Lehre von den Raumfiguren sowohl, als auch von den Figuren überhaupt ohne die Beschränkung auf den Raum einer Ebene wird durch den Namen Stereometrie bezeichnet. Zur Stereometrie gehört die Betrachtung der Flächenfiguren, welche nicht plan sind.*)

8. Geradlinige Figuren oder Polygone (πολύγωνον, Vielseite, Vielecke) werden durch eine Reihe von Geraden gebildet, deren jede von der folgenden, die letzte von der ersten geschnitten wird; oder durch eine Reihe von Puncten, deren jeder mit dem folgenden, der letzte mit dem ersten durch eine Gerade verbunden ist. Die gemeinschaftlichen Puncte der auf einander folgenden Geraden heißen die Eckpuncte (Scheitel) des Polygons; die Strecken zwischen den auf einander folgenden Eckpuncten heißen die Seiten des Polygons; die Summe der Seiten bildet den Perimeter des Polygons, eine gebrochene Linie; die von den auf einander folgenden Seiten eingeschlossenen Winkel heißen die Winkel des Polygons; die zwischen nicht auf einander folgenden Eckpuncten enthaltenen Strecken heißen Diagonalen des Polygons. Wenn die Seiten oder die Winkel des Polygons einander gleich sind, so heißt das Polygon gleichseitig oder gleichwinkelig. Ein Polygon, das sowohl gleichseitig als auch gleichwinkelig ist, wird regulär genannt. Die Polygone werden nach der Anzahl ihrer Eckpuncte (oder Seiten) 3Ecke, 4Ecke, . . , $n$Ecke genannt und durch die Reihe ihrer Eckpuncte

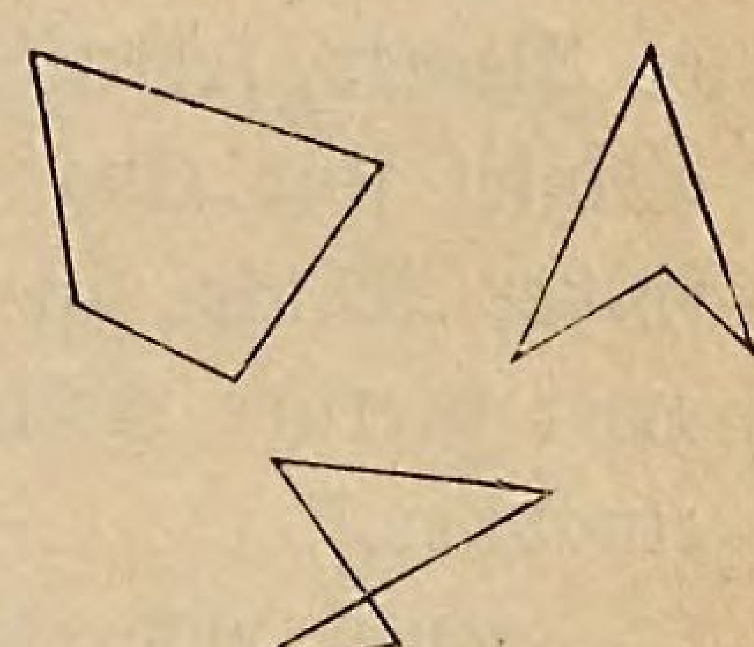
---

*) Hiernach wird die Beschränkung auf eine Ebene in den folgenden Paragraphen dieses Buches nicht wiederholt angegeben werden.

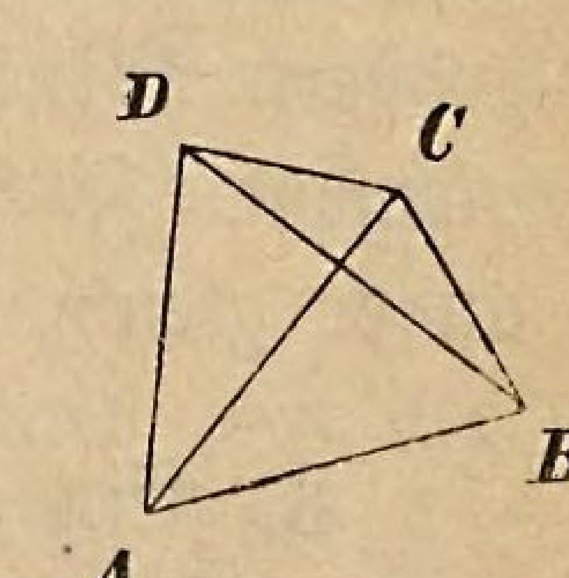
bezeichnet. Z. B. das Dreieck (τρίγωνον, triangulum) $ABC$ hat die Eckpuncte $A$, $B$, $C$, die Seiten $AB$, $BC$, $CA$, die Winkel $CBA$, $ACB$, $BAC$; das Viereck $ABCD$ hat die Eckpuncte $A$, $B$, $C$, $D$, die Seiten $AB$, $BC$, $CD$, $DA$, die Winkel $CBA$, $DCB$, $ADC$, $BAD$, die Diagonalen $AC$, $BD$; das Polygon $ABCD\,..\,MN$ hat die Eckpuncte $A$, $B$, .., $N$, die Seiten $AB$, $BC$, .., $MN$, $NA$, die Winkel $CBA$, $DCB$, .., $ANM$, $BAN$, und die Diagonalen $AC$, $AD$, .., $BD$, .., ... Von einem Eckpunct eines $n$Ecks gehn $n-3$ Diagonalen aus, also hat das $n$Eck $\frac{1}{2}n(n-3)$ Diagonalen. Die Gerade einer Seite hat mit den Geraden von $n-3$ Seiten noch einen Punct gemein, es giebt also $\frac{1}{2}n(n-3)$ Durchschnittspuncte der Seiten, welche nicht Eckpuncte sind.

In einem Dreieck liegt jede Seite einem Winkel (Scheitel) gegenüber; in einem Viereck liegt jede Seite einer Seite, jeder Winkel einem Winkel gegenüber. In einem Dreieck kann jede Seite als Basis (βάσις, Grundlinie), der gegenüberliegende Eckpunct als Spitze betrachtet werden.

Ein Polygon ist entweder plan oder nicht (gauche, uneben), je nachdem seine Eckpuncte auf einer Ebene liegen oder nicht. Jedes (geradlinige) Dreieck ist eine Planfigur (4), der von seinem Perimeter eingeschlossene Theil der Ebene heißt seine Fläche. Von planen Vierecken giebt es 3 Arten, darunter solche, deren Perimeter sich selbst einmal schneiden. Unter den planen Fünfecken giebt es solche, deren Perimeter sich selbst 5mal und weniger oft (nicht 4mal) schneiden. U. s. w.



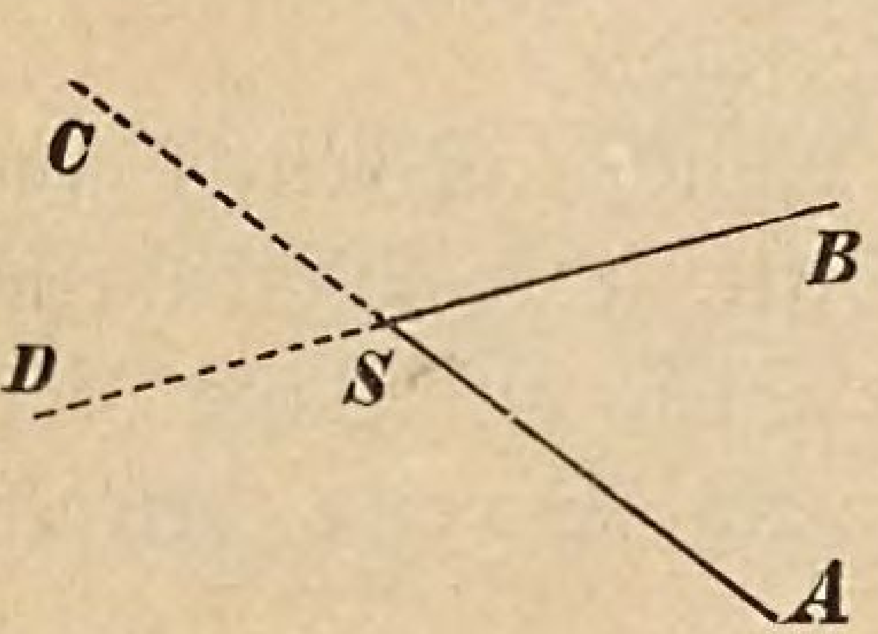
Die Vierecke $ABCD$, $ABDC$, $ACBD$ sind verschieden, obgleich sie dieselben Eckpuncte haben. Zu einem System von 4 Geraden einer Ebene*) gehören im Allgemeinen 6 Puncte, in denen die Geraden sich schneiden. Diese Puncte, von denen 3mal 2 einander gegenüberliegen, sind die Eckpuncte von 3 Vierecken, zu denen 3 verschiedene Diagonalen gehören. Zu einem System von 4 Puncten einer Ebene gehören 6 Strecken, welche die Puncte verbinden. Diese Strecken, von denen 3mal 2 einander gegenüberliegen, sind die Seiten von 3 Vierecken, zu denen 3 Durchschnittspuncte gegenüberliegender Seiten gehören.




*) „Quadrilatère complet“ nach Carnot géom. de pos. 103. Vergl. Poncelet propr. proj. 554. Steiner system. Entw. 19.

## §. 2. Von den Winkeln der geradlinigen Figuren.

1. Zu jedem concaven Winkel gehören zwei Nebenwinkel, welche von je einem Schenkel mit der Verlängerung des andern in der entgegengesetzten Richtung (über den Scheitel hinaus) gebildet werden, und ein Scheitelwinkel, den die Verlängerungen beider Schenkel einschließen. Die Summe dieser 4 Winkel ist die Ebene. Die Summe von 2 Winkeln, deren einer als des andern Nebenwinkel erscheint, ist ein gestreckter Winkel.




Zwei Winkel, deren einer des andern Scheitelwinkel ist, sind einander gleich z. B. $ASB = CSD$. Denn $ASB + BSC = BSC + CSD$, als gestreckte Winkel (§. 1, 5); nach Subtraction des Winkels $BSC$ von den gleichen Summen bleibt $ASB = CSD$.

2. Ein concaver Winkel heißt spitz, recht, stumpf, je nachdem er kleiner, ebenso groß, größer ist als sein Nebenwinkel. Alle rechten Winkel sind einander gleich, als Hälften von gestreckten Winkeln. Ein spitzer Winkel ist kleiner, ein stumpfer größer als ein rechter. Wenn zwei Gerade rechte Winkel bilden, so heißen sie normal (κάθετοι) zu einander.*)

Zwei concave Winkel heißen supplementär (einer des andern Supplement), wenn ihre Summe ein gestreckter Winkel ist. Zwei spitze Winkel heißen complementär (einer des andern Complement), wenn ihre Summe ein rechter Winkel ist. Wenn zwei Winkel gleiche Supplemente oder Complemente haben, so sind sie einander gleich. Zu dem größern Winkel gehört das kleinere Supplement und das kleinere Complement. Z. B. Nebenwinkel sind supplementär; Scheitelwinkel sind einander gleich, weil sie dasselbe Supplement haben (1).

3. Ein gegebener Winkel hat zur Ebene, auf der er liegt (zu 4 rechten Winkeln), ein endliches Verhältniß. Man bilde die Summe von mehreren Winkeln, die dem gegebenen Winkel gleich sind, und einen Kreis von beliebigem Radius um den gemeinschaftlichen Scheitel; zu den gleichen Winkeln am Centrum gehören gleiche Bogen des Kreises (§. 1, 6). Weil nun eine endliche Anzahl solcher Bogen eine ganze Peripherie aus-

---

*) Von norma Modell des rechten Winkels. Die in derselben Bedeutung vorkommenden Ausdrücke perpendiculär, lothrecht, senkrecht sind geographisch und bezeichnen eigentlich die verticale Richtung d. h. die Richtung eines ruhenden Pendels, welche normal zum Horizont ist.

macht oder übertrifft, so muß auch die gleiche Anzahl von zugehörigen Centriwinkeln eine Ebene ausmachen oder übertreffen.

Um das Verhältniß des Winkels zur Ebene anzugeben, theilt man die Ebene in 360 gleiche Winkel, welche Grade ($360^0$, μοῖραι) heißen, den Grad in 60 gleiche Winkel, die Minuten ($60'$, minutum primum) heißen, und die Minute in 60 gleiche Winkel, die Secunden ($60''$, minutum secundum) heißen.*)

4. Zwei Winkel, deren Differenz $360^0$ beträgt, sind in Bezug auf die gegenseitige Lage ihrer Schenkel von einander nicht unterscheidbar. Wenn zwei Schenkel einen Winkel von $a$ Grad bilden, so kann man von ihnen auch sagen, daß sie Winkel von $a + 360$, $a + 2 . 360, . .$, $a + k . 360$ Grad bilden, wobei $k$ eine ganze positive oder negative Zahl bedeutet. Insbesondere sind die Winkel 0 und $360^0$ gleichbedeutend.

Wenn die Schenkel $SA$, $SB$, $SC$ auf einer Ebene in beliebiger Ordnung liegen, so hat man (§. 1, 5)

$$ASB + BSC + CSA = 0$$

unter der üblichen Voraussetzung, daß alle Winkel durch Drehung in einerlei Sinn beschrieben sind.

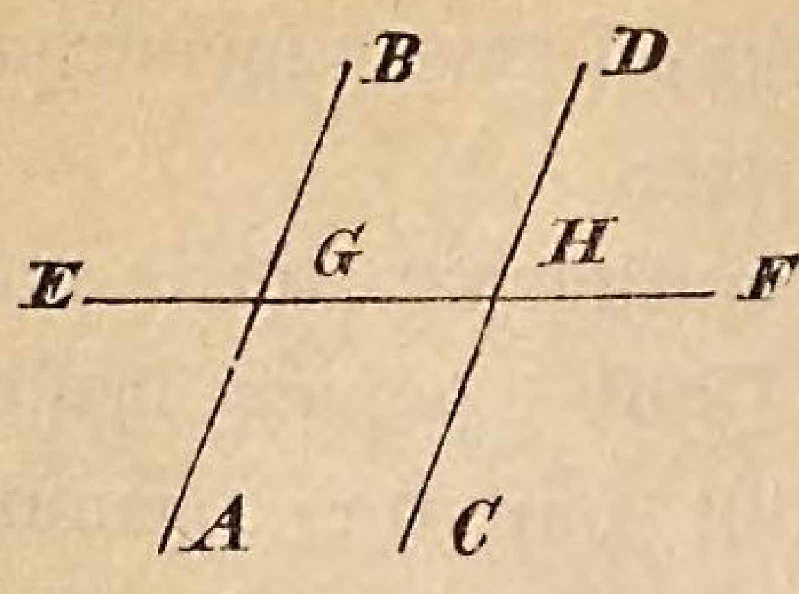
Wenn die Puncte $A$, $B$, $C$ auf einer Geraden liegen, so ist der Winkel $ABC$ entweder 0 oder $180^0$, folglich $2ABC = 0$. Wenn aber die genannten Puncte nicht auf einer Geraden liegen, so ist der Winkel $ABC$ weder 0 noch $180^0$, folglich $2ABC$ von 0 verschieden. Unter der Bedingung $2ABC = 0$ liegen also die Puncte $A$, $B$, $C$ auf einer Geraden in unbestimmter Ordnung.**)

5. Wenn zwei Gerade mit einer dritten Geraden Winkel bilden, die gleich oder um $180^0$ verschieden sind — jede Gerade in einer bestimmten Richtung, die Winkel in einerlei Sinn genommen nach §. 1, 5 — so schneiden sie sich nicht.

Beweis. Die beiden Geraden $AB$ und $CD$ bilden mit der Geraden $EF$ die gleichen Winkel $FGB$ und $FHD$, oder die um $180^0$ sich unterscheidenden Winkel $FGB$ und $FHC$. Dann sind die Winkel $FGB$ und $EHC$ gleich, weil beide dem Winkel $FHD$ gleich sind, und die

*) Nach Ptolemäus im Almagest. Früher theilte man nach chaldäischem Gebrauch einen Kreis in 60 gleiche Theile, wie noch heute auf dem Zifferblatt der Uhr; nur der Zodiacus war in 12 Bilder von je 30 Abschnitten getheilt. Das Wort Grad ist die Uebersetzung eines arabischen Kunstwortes, aus welchem degré gebildet worden. Kästner Gesch. d. Math. 1 p. 528. Klügel math. W. 2 p. 623.

**) Auf die Mehrdeutigkeit eines Winkels (oder eines concentrischen Kreisbogens) hat Newton Arithm. univ. ed. 1732 p. 180 hingewiesen. Die übrigen Bemerkungen sind von Möbius Kreisverw. §. 8 gemacht worden.

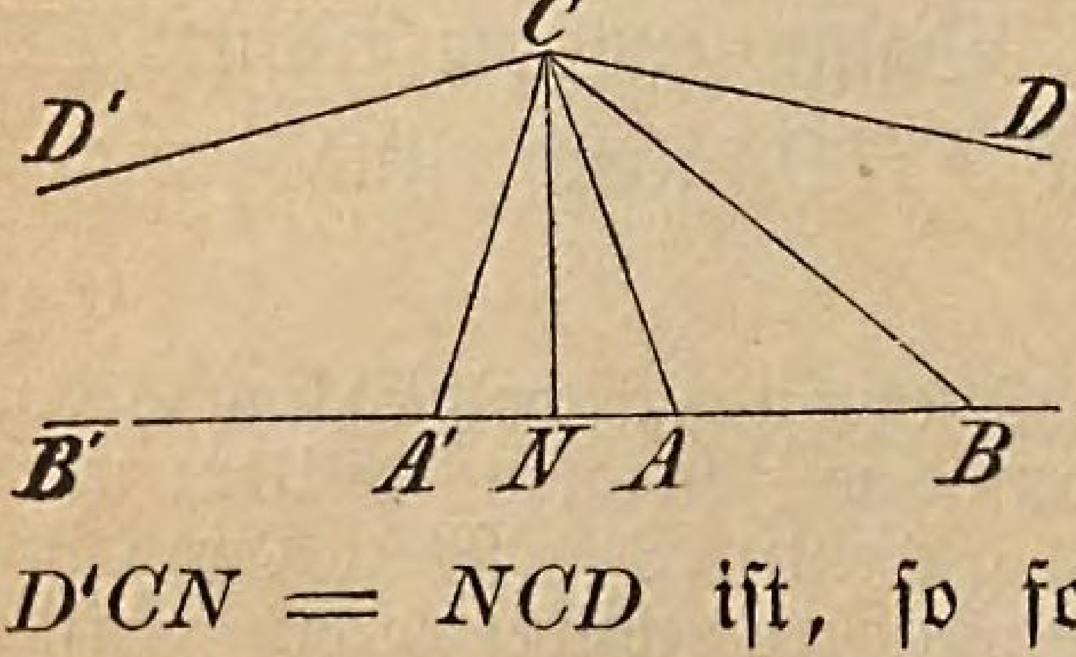



Winkel *DHE* und *AGF* sind gleich, weil ihre Nebenwinkel gleich sind. Demnach sind die offenen Figuren *BGHD* und *CHGA* congruent, und decken sich, nachdem man die eine in ihrer Ebene gedreht und fortgerückt hat, bis *GB* und *HC* zusammenfallen. Hätten die Schenkel *GB* und *HD* einen erreichbaren Punct gemein, so würden zufolge der Congruenz auch die Schenkel *GA* und *HC* einen erreichbaren Punct gemein haben. Also hätten die Geraden *AB* und *CD* zwei Puncte gemein und fielen zusammen (§. 1, 3) gegen die Voraussetzung. Daher haben die Geraden *AB* und *CD* keinen erreichbaren Punct gemein und schneiden sich nicht.

Der von den sich nicht schneidenden Geraden *AB* und *CD* eingeschlossene Streifen (bande) hat zur Ebene dasselbe Verhältniß, wie die Strecke *GH* zu der Geraden, von der die Strecke ein Theil ist. Wenn durch eine endliche Anzahl von Strecken die Gerade ausgefüllt wird oder nicht, so wird durch dieselbe Anzahl von Streifen die Ebene ausgefüllt oder nicht

Der Schluß, daß ein Winkel von einem Streifen nicht ganz eingeschlossen sein könne, weil von den Verhältnissen des Winkels und des Streifens zur unendlichen Ebene das eine nicht verschwindet, das anderee verschwindet, ist nicht berechtigt. Auf dieses mangelhafte Fundament war die Parallelentheorie von Bertrand (Développement etc. II. p. 19) gegründet.

6. Wenn in einem Dreieck *ABC* ein Winkel *BAC* und eine an demselben liegende Seite *CA* unverändert bleibt, und die andere daranliegende Seite *AB* zu wachsen beginnt, so beginnt der ihr gegenüberliegende Winkel *ACB* zu wachsen. Wenn es nun einen bestimmten Winkel *ACD* giebt, welchem der Winkel *ACB* bei hinreichender Größe der Seite *AB* bis auf eine beliebig kleine Differenz sich nähert, so heißt der Schenkel *CD*, welcher nach einem unendlich fernen Punct*) des Schenkels *AB* gerichtet ist und den letztern nicht schneidet, während alle von *C* ausgehenden und in dem Winkel *ACD* enthaltenen Schenkel ihn schneiden, parallel (παράλληλος) mit *AB*.




Der Winkel *ACD* kann das Supplement des Winkels *BAC* erreichen, aber nicht überschreiten (5). Wenn *NC* normal zu *AB* ist, wenn *NB* und *NB'* entgegengesetzte Richtungen haben und wenn der Winkel *D'CN* = *NCD* ist, so folgt aus der Congruenz der Figuren *BNCD*

*) Dieser Ausdruck ist von Desargues 1630, und in weiterem Umfang von Newton 1687 gebraucht worden.

und $B'NCD'$ daß auch $CD'$ parallel mit $NB'$. Wenn insbesondere der Winkel $NCD$ recht ist, so ist $D'CN + NCD = 180^0$, und die beiden Parallelen $CD$ und $CD'$ liegen auf einer Geraden.

Wenn aber eine solche Grenze $ACD$ des Winkels $ACB$ nicht existirt, wenn die Gerade eine geschlossene Linie ist, auf der man von $A$ über $B$ in derselben Richtung weitergehend nach $A$ gelangt, so sind die Parallelen nicht construirbar.

Den Parallelen entsprechend werden einer Geraden entweder zwei getrennte unendlich ferne Puncte (real oder nicht real), oder ein unendlich ferner Punct zugeschrieben.

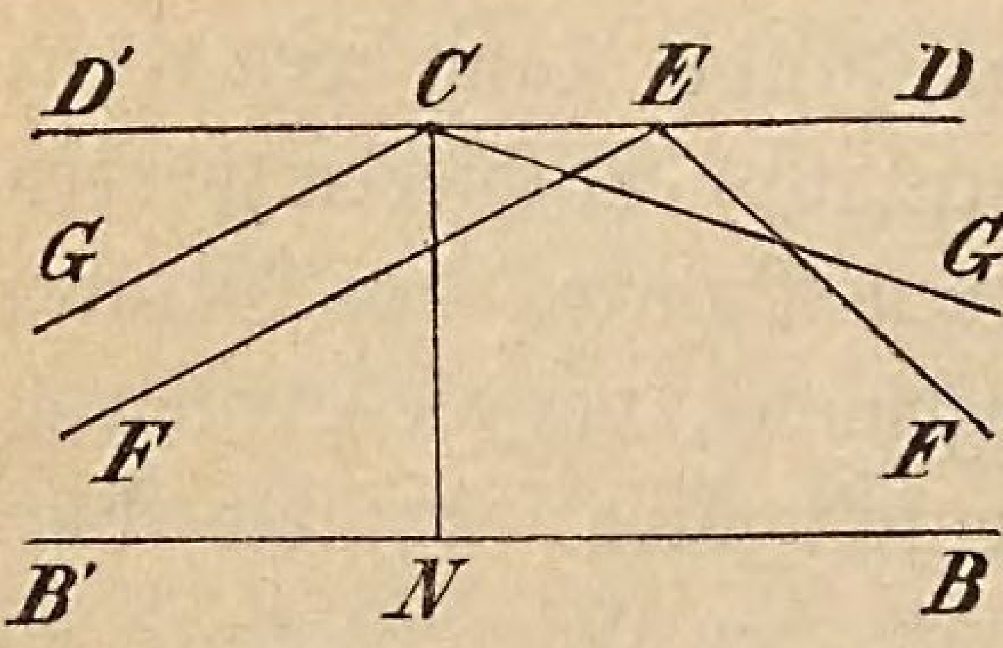
Welcher von den drei möglichen Fällen stattfindet, kann weder empirisch (durch Beobachtung) noch theoretisch (speculativ) entschieden werden. Auf die Voraussetzung eines unendlich fernen Punctes der Geraden ist die gemeine, Euclidische Geometrie gegründet, der die Erfahrung nicht widerspricht und die im Folgenden entwickelt wird; auf die Voraussetzung eines Paares unendlich ferner Puncte der Geraden wird die allgemeine, Nicht-Euclidische Geometrie gegründet.

Euclides nannte die Geraden $AB$, $CD$ einer Ebene, welche unter der Bedingung $BAC + ACD = 180^0$ sich nicht schneiden, parallel, indem er ohne Beweis annahm, daß unter der Bedingung $BAC + ACD < 180^0$ die Schenkel $AB$ und $CD$ sich schneiden (11tes Axiom, Elem. I, 27 ff.). Daß die Versuche, jenes Axiom (oder ein Aequivalent desselben) zu beweisen, aussichtslos sind, diese von Gauß (seit 1792) gehegte Ueberzeugung findet ihre Bestätigung durch die Existenz einer widerspruchsfreien Geometrie, welche Gauß, J. Bolyai, Lobatschewsky erbaut haben, indem sie die Möglichkeit geradliniger Dreiecke mit verschiedenen Winkelsummen (unter $180^0$) zuließen. Diese allgemeine Geometrie, welche in gewissen Lehren mit der gemeinen Geometrie unbedingt übereinstimmt, übrigens aber eine durch Erfahrung zu bestimmende Constante enthält, ist Nicht-Euclidische (imaginäre) Geometrie, Astralgeometrie, Pangeometrie genannt worden. Vergl. Gauß' Anzeigen von Schwab commentatio in primum elementorum Euclidis librum und Metternich Theorie der Parallellinien, Gött. gel. Anz. 1816 p. 617, und von C. R. Müller Theorie der Parallelen, Gött. gel. Anz. 1822 p. 1725. Gauß' Briefe an Schumacher (seit 1831) II p. 268 und 431, V p. 246. Sartorius v. Waltershausen, Gauß zum Gedächtniß p. 81. Ausgearbeitet wurde die Geometrie unter Voraussetzung von zwei realen unendlich fernen Puncten der Geraden gleichzeitig von J. Bolyai (Appendix zu dem Werke W. Bolyai's Tentamen in elementa matheseos etc. Maros Vasarhely 1832, in franz. Uebersetzung La science absolue de l'espace etc. Paris, Gauthier-Villars 1868) und von Lobatschewsky Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallelen (im Kasan'schen Boten 1829 und in den gelehrten Schriften der Universität Kasan 1836—38), Géométrie imaginaire 1837 (in Crelle's J. 17 p. 295), Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien: Berlin 1840 (in franz. Uebersetzung Etudes géométriques etc. p. Hoüel. Paris, Gauthier-Villars 1866), Pangéométrie: Kasan 1855. Frischauf absolute Geometrie, Leipzig 1872. Die Möglichkeit einer Geometrie bei Negation unendlich ferner Puncte der Geraden ist von Riemann 1854 erkannt worden: Ueber die Hypothesen der Geometrie, Göttinger Abh. 1867. Vergl. Helmholtz über die Thatsachen der Geometrie, Gött. Nachrichten 1868 und Verh. des Heidelb. naturhist. Vereins 1868 und 69. Beltrami Saggio di interpretazione della geometria Non-Euclidea, Napoli 1868. Teoria degli spazii di curvatura costante, Milano 1868, (in franz. Uebersetzung Ann. de l'école normale 1869). Genocchi dei primi princ. della mechanica e della geometria, Firenze 1869. Tilly études de mécanique abstraite (Mém. de l'ac. de Belgique 1870). Cayley Philos. Trans. 1859. Math.

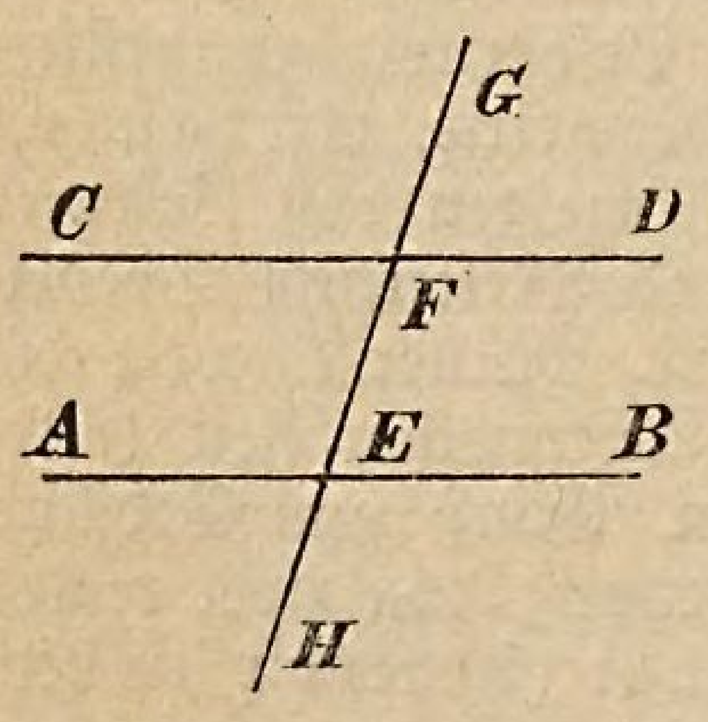
Ann. 5 p. 630. Klein Ueber die Nicht-Euclidische Geometrie Gött. Nachrichten 1871 n⁰ 17. Math. Annalen 4 p. 573. 6 p. 112.

7. Wenn die Schenkel $CD$ mit $NB$, $CD'$ mit $NB'$ parallel sind (6), wenn die Winkel $NCD$, $D'CN$ recht sind, und daher $CD$ und $CD'$ auf der Geraden $DD'$ liegen (Axiom der gemeinen Geometrie), so sind die Geraden $BB'$, $DD'$ parallel und haben folgende Eigenschaften.

I. Eine Gerade, welche eine der beiden Parallelen schneidet, schneidet auch die andere. Ein in dem Winkel $NCD$ enthaltener Schenkel schneidet $NB$, ein in dem Winkel $D'CN$ enthaltener Schenkel schneidet $NB'$ gemäß der Definition (6). Wenn $E$ ein Punct des Schenkels $CD$ und der Winkel $FED < NED$ ist, so ziehe man einen den Schenkel $EF$ schneidenden Schenkel $CG$, welcher $NB$ in $H$ schneidet; der Schenkel $EF$ schneidet die Seite $HC$ des Dreiecks $CNH$, die Seite $CN$ nicht, also schneidet er die Seite $NH$. Wenn dagegen $FED > NED$, so ziehe man einen den Schenkel $EF$ nicht schneidenden Schenkel $CG$, welcher $NB'$ in $H$ schneidet; der Schenkel $EF$ schneidet die Seite $CN$ des Dreiecks $CNH$, die Seite $HC$ nicht, also schneidet er die Seite $NH$. Die Figuren $BNCD$, $DCNB$ sind congruent, also wird von jeder Geraden, welche $NB$ schneidet, auch $DD'$ geschnitten.




II. Wenn die Parallelen $AB$, $CD$ von der Geraden $HG$ in $E$, $F$ geschnitten werden, so ist die Summe der innern Winkel $BEF + EFD = 180^0$. Wenn die Summe mehr als $180^0$ betrüge, d. h. $EFD$ größer wäre als das Supplement von $BEF$, so wäre der Schenkel $FD$ nicht parallel mit $EB$ (6.) Wenn die Summe weniger als $180^0$ betrüge, so wäre $CFE + FEA > 180^0$, und $FC$ nicht parallel mit $EA$. Also ist die Summe der innern Winkel von $180^0$ nicht verschieden.



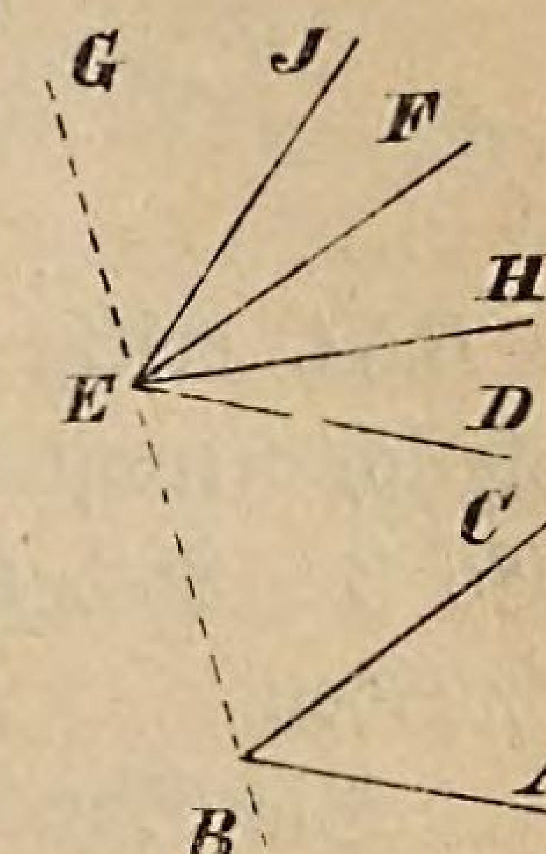

Die Gegenwinkel (correspondants) $BEF$ und $DFG$ und die Wechselwinkel (alternes-internes) $BEF$ und $CFE$ sind einander gleich, weil beide dasselbe Supplement haben.

III. Wenn zwei Gerade mit einer dritten Geraden supplementäre innere Winkel bilden, oder gleiche Gegenwinkel, oder gleiche Wechselwinkel, so sind sie parallel. Unter der Voraussetzung $BEF + EFD = 180^0$ kann nicht $FD'$ statt $FD$ mit $EB$ parallel sein, denn $BEF + EFD'$ betrüge $180^0$ (II), also wäre $BEF + FED$ nicht $180^0$ gegen die Voraussetzung.

Gerade einer Ebene, welche sich nicht schneiden, sind parallel. Wenn zwei Gerade mit einer dritten Geraden parallel sind, so sind sie parallel.

Parallele Gerade haben einerlei oder die entgegengesetzte Richtung, ihr Winkel mit unendlich fernem Scheitel ist 0 oder 180°.

IV. Wenn die Schenkel eines Winkels mit den Schenkeln eines andern Winkels parallel sind und einerlei Richtung haben, so sind die Winkel einander gleich. Wenn *ED* und *BA*, *EF* und *BC* parallel (in einerlei Richtung) sind, so ist der Winkel $DEG = ABG$, $FEG = CBG$, folglich durch Subtraction (oder Addition) $DEF = ABC$.



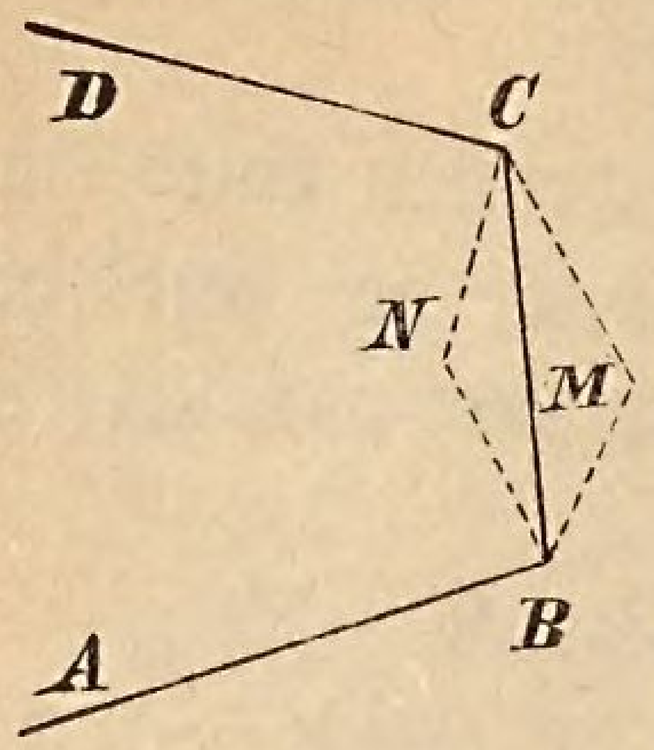

Wenn die Schenkel eines Winkels der Reihe nach mit den Schenkeln eines andern Winkels in einerlei Sinn gleiche Winkel bilden, so sind die Winkel einander gleich. Wenn die Winkel $BA^{\wedge}EH$ und $BC^{\wedge}EI$ (in einerlei Sinn) einander gleich sind, so sind auch die Winkel *DEH* und *FEJ* einander gleich, welche von jenen Winkeln sich nicht unterscheiden. Durch Subtraction der gleichen Winkel *DEH* und *FEI* von dem Winkel *DEI* erhält man $HEI = DEF$; weil aber $DEF = ABC$, so ist auch $HEI = ABC$.

8. Die Summe der Winkel eines Dreiecks beträgt 180°. Eucl. I, 32. Wenn *CD* parallel mit *AB*, so ist der Winkel $CBA = BCD$, $BAC + ACB + CBA = BAC + ACD = 180^0$ (7, II).

Die Summe von zwei Winkeln eines Dreiecks beträgt weniger als 180°. Durch zwei Winkel eines Dreiecks ist der dritte bestimmt; wenn zwei Winkel die Werthe $\alpha$, $\beta$ haben, so ist der dritte $180^0 - (\alpha + \beta)$. Das Dreieck hat zwei spitze Winkel; je nachdem der dritte Winkel spitz, recht, stumpf ist, heißt das Dreieck spitzwinkelig, rechtwinkelig, stumpfwinkelig. Die in einem rechtwinkeligen Dreieck den rechten Winkel einschließenden Seiten heißen Catheten (2), die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heißt die Hypotenuse (ὑποτείνουσα, subtendens, im Alterthum auch die einem beliebigen Winkel gegenüberliegende Seite). Die Winkel an der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks sind complementär (2).

Der von einer Seite eines Polygons mit der Verlängerung der vorhergehenden Seite gebildete Winkel heißt ein Außenwinkel des Polygons. Ein Außenwinkel des Dreiecks ist die Summe der an den beiden andern Eckpuncten liegenden Winkel des Dreiecks, denn der dritte Winkel des Dreiecks ist das Supplement sowohl dieser Summe als auch jenes Außenwinkels.

9. Die Summe der Winkel eines *n*Ecks, dessen Perimeter sich selbst nicht schneidet, beträgt $(n - 2) \,.\, 180^0$. Wenn nämlich aus dem *k*Eck *ABCD*.. das $(k + 1)$Eck *ABMCD*.. oder *ABNCD*.. wird, so




wächst die Summe seiner Winkel um 180°. In dem ersten Falle ist die Differenz

$$MBA + CMB + DCM - (CBA + DCB)$$
$$= MBC + CMB + BCM = 180^0 \ (8).$$

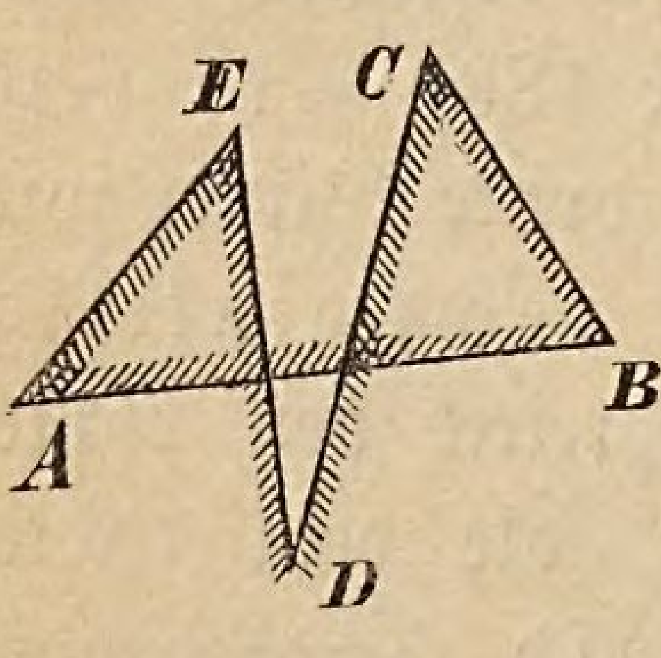
In dem zweiten Falle findet man für die Differenz

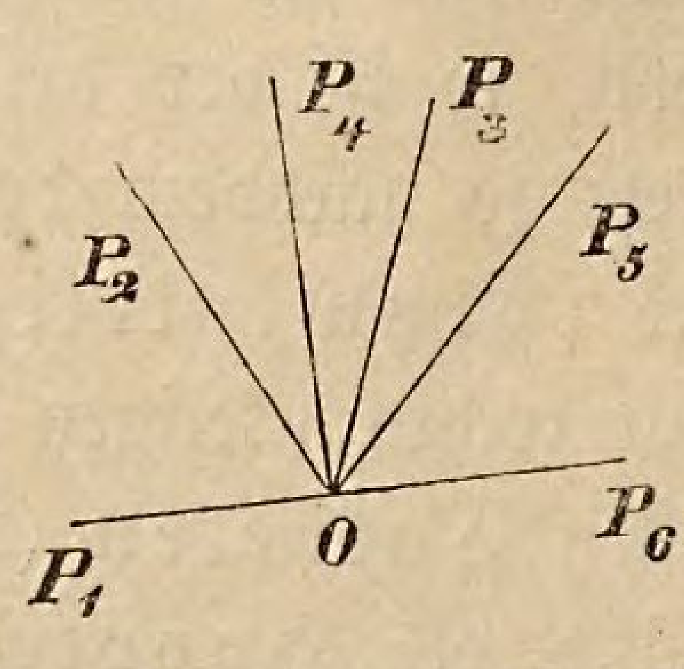
$$NBA + CNB + DCN - (CBA + DCB)$$

den Werth $360^0 - CBN - BNC - NCB = 180^0$, nachdem man den convexen Winkel $CNB$ durch $360^0 - BNC$ ersetzt hat. Nun ist die Summe der Winkel eines 3Ecks 180°, folglich beträgt die Summe der Winkel in einem 4Eck 2 . 180°, in einem 5Eck 3 . 180°, u. s. w., vorausgesetzt, daß die Perimeter sich selbst nicht schneiden.

Die Summe der Außenwinkel eines $n$Ecks, das nur concave Winkel hat, beträgt 360° unabhängig von der Anzahl der Eckpuncte. Denn die Summe eines Winkels und des daranliegenden Außenwinkels ist 180°, also die Summe aller Winkel und Außenwinkel $n \,.\, 180^0$. Nun beträgt die Summe der Winkel des $n$Ecks $(n-2) \,.\, 180^0$, folglich die Summe der Außenwinkel 2 . 180°.

Wenn der Perimeter des Polygons sich selbst schneidet, so beträgt die Summe der Winkel geradmal oder ungeradmal 180°, je nachdem die Anzahl der Eckpuncte gerade oder ungerade ist. Z. B. die Summe der Winkel des 5Ecks $ABCDE$, die auf der bezeichneten Seite des Perimeters liegen, wird gefunden, indem man durch einen beliebigen Punct $O$ die Schenkel $OP_1$, $OP_2$, $OP_3$, $OP_4$, $OP_5$, $OP_6$ parallel mit den Seiten $AB$, $BC$, $CD$, $DE$, $EA$, $AB$ zieht und zwar abwechselnd in der entgegengesetzten und in derselben Richtung.*) Dann ist $CBA = P_2OP_1$, $DCB = P_3OP_2$, u. s. w. (10), folglich




$$CBA + DCB + EDC + AED + BAE$$
$$= P_2OP_1 + P_3OP_2 + P_4OP_3 + P_5OP_4 + P_6OP_5.$$

Diese Summe giebt den Winkel $P_6OP_1$, der ungeradmal 180° (im vorliegenden Falle 3 . 180°) beträgt, weil der letzte Schenkel dem ersten entgegengesetzt ist. Bei der Summirung der Winkel eines Polygons von gerader Seitenzahl findet man einen Winkel, dessen letzter Schenkel mit dem ersten einerlei Richtung hat, dessen Werth also 0, 360°, . . ist. Hiernach findet man als Summe der Winkel eines 4Ecks entweder 2

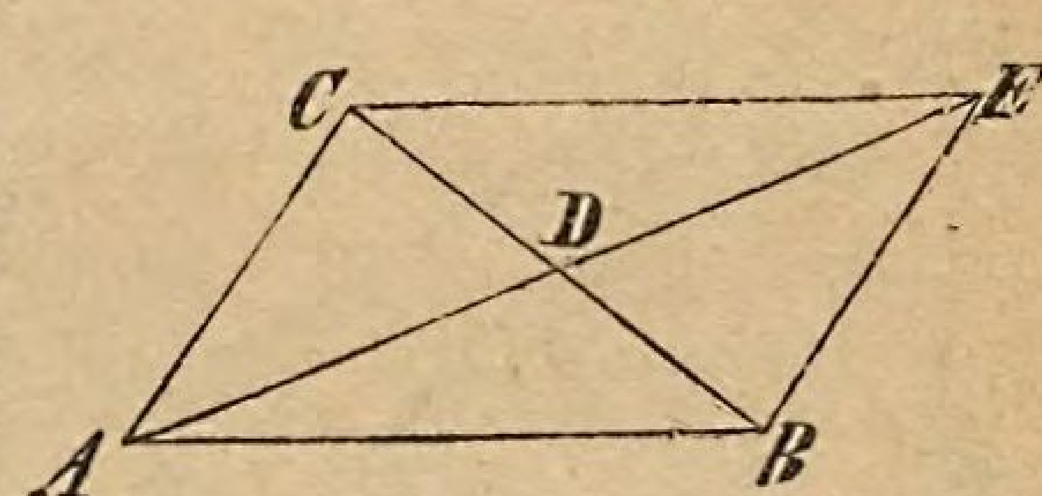
*) Vergl. J. H. T. Müller Lehrb. d. Geom. 1844, I. p. 84.

oder 4mal 180°, als Summe der Winkel eines 5Ecks entweder 1 oder 3 oder 5 oder 7mal 180°, u. s. w.

**10.** Versuche, die Parallelentheorie der gemeinen Geometrie ohne ein besonderes Axiom aufzubauen, sind in verschiedenen Epochen gemacht worden, im Anfang dieses Jahrhunderts von Legendre, der zu der Meinung gelangte, daß durch Definition der Geraden die bemerkte Lücke sich werde ausfüllen lassen (Géom. Note 2). Auf weitere Versuche hatte man zu verzichten seit der Veröffentlichung (1860—65) der Briefe Gauß's an Schumacher, nachdem Lobatschewsky's und Bolyai's Arbeiten nebst Riemann's Untersuchungen in Erinnerung gebracht worden. Legendre's letzte Untersuchungen haben folgende bemerkenswerthe Sätze ergeben (Mém. de Paris 1833).

I. Die Summe der Winkel eines Dreiecks kann 180° nicht übersteigen.

Beweis. Wenn man durch die Mitte $D$ von $BC$ die Strecke $AE = 2AD$ zieht*), so ist sowohl das Dreieck $CDE$ mit $BDA$, als auch $EDB$ mit $ADC$ congruent (1), daher in dem Dreieck $AEC$ der Winkel $CEA = BAD$, $ACE = ACB + CBA$, und in dem Dreieck $ABE$ der Winkel $AEB = DAC$, $EBA = ACB + CBA$. Man kann also, indem man den kleinern unter den Winkeln $BAD$ und $DAC$ durch $A_1$ bezeichnet, aus dem Dreieck $ABC$ mit den Winkeln $A$, $B$, $C$ ein Dreieck von derselben Fläche mit den Winkeln $A_1$, $B_1$, $C_1$ ableiten, so daß




$$A_1 \leqq \tfrac{1}{2}A, \quad A_1 + C_1 = A, \quad B_1 = B + C$$
$$A_1 + B_1 + C_1 = A + B + C$$

Ebenso kann aus dem abgeleiteten Dreieck ein Dreieck mit den Winkeln $A_2$, $B_2$, $C_2$ abgeleitet werden, so daß $A_2 \leq \frac{1}{2}A_1 \leq \frac{1}{4}A$, $A_2 + C_2 = A_1$, $A_2 + B_2 + C_2 = A_1 + B_1 + C_1$. U. s. w. Nachdem nun in einem abgeleiteten Dreieck der Winkel $A_{k-1}$ kleiner als ein gegebener Winkel $\omega$ geworden ist, hat man in dem folgenden abgeleiteten Dreieck $A_k + C_k = A_{k-1} < \omega$ und, sofern $B_k < 180°$ vorausgesetzt werden darf, $A_k + B_k + C_k < 180° + \omega$. Also kann auch die Summe der Winkel des gegebenen Dreiecks $180° + \omega$ nicht erreichen.

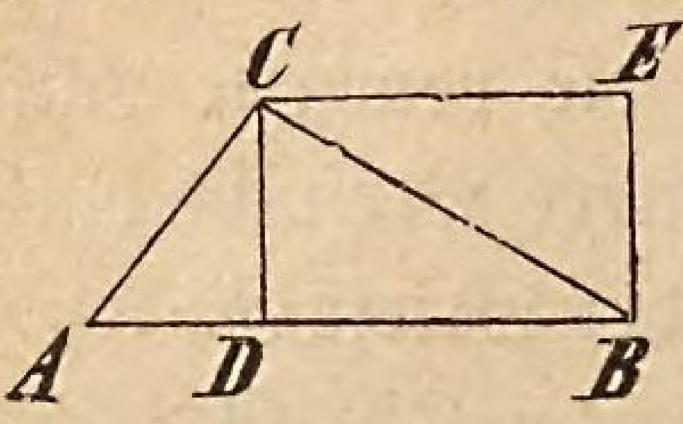
Anmerkung. Der gegebene Beweis verliert seine Geltung, wenn es unentschieden bleibt, ob der auf der Verlängerung von $AD$ liegende Punct $E$ in dem von $BC$ mit der Verlängerung der Seite $AB$ gebildeten Winkel liegt.

---

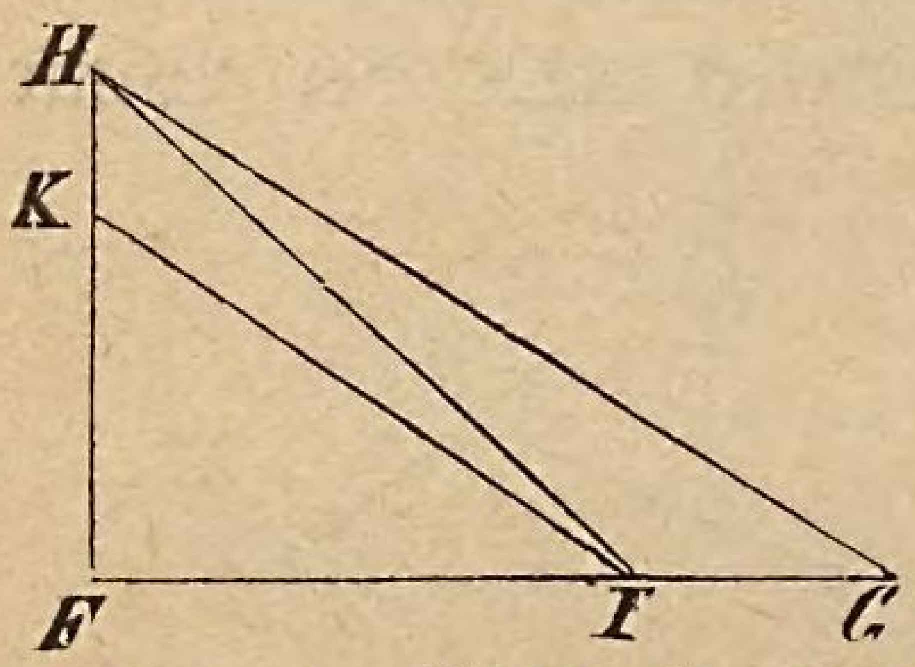
*) Durch diese Construction hatte Eucl. I, 16 gezeigt, daß ein Außenwinkel des Dreiecks größer ist als ein nicht anliegender innerer Winkel (8).

II. Wenn bei einem Dreieck die Summe der Winkel 180° beträgt, so beträgt bei jedem Dreieck die Summe der Winkel 180°.

Beweis. Es sei in dem Dreieck $ABC$ die Summe der Winkel $= 180°$, $AB$ eine Seite, an welcher spitze Winkel liegen, $CD$ normal zu $AB$, so liegt $CD$ in dem Winkel $ACB$ (vergl. I). Jede der Summen



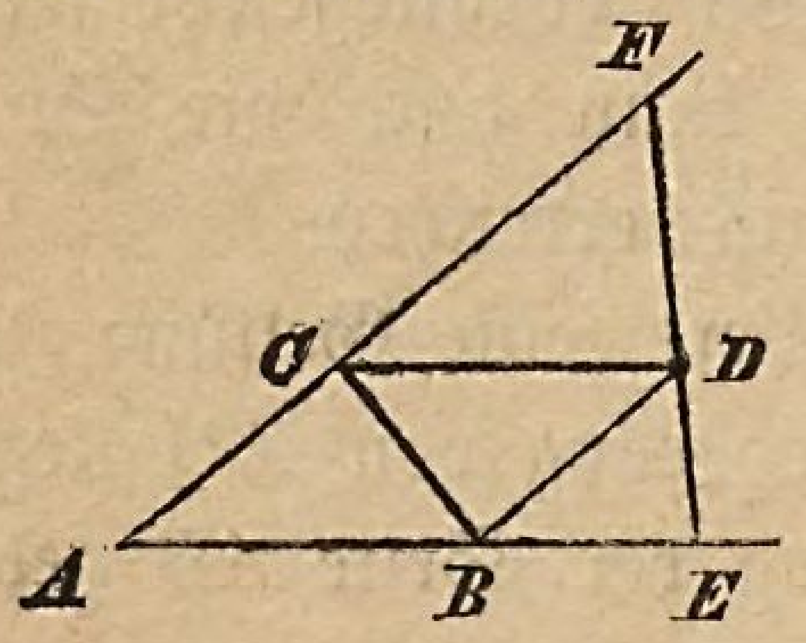

$DAC + ACD$, $DCB + CBD$ kann nicht mehr als 90° betragen (I), aber auch nicht weniger als 90°, weil dann $BAC + ACB + CBA$ weniger als 180° betrüge; also giebt es ein rechtwinkeliges Dreieck $BCD$, bei welchem die Summe der Winkel an der Hypotenuse 90° beträgt. Macht man das Dreieck $CBE$ mit $BCD$ congruent, so erhält man ein Viereck $CDBE$, dessen Winkel recht und dessen nicht folgende Seiten einander gleich sind. Durch Vervielfältigung dieses Vierecks findet man ein Viereck derselben Art von beliebiger Größe, welches durch eine Diagonale in zwei congruente rechtwinkelige Dreiecke getheilt wird von der Art, daß die Summe der Winkel an der Hypotenuse 90° beträgt.




Wenn nun in dem beliebig großen rechtwinkeligen Dreieck $FGH$ die Summe $FHG + HGF = 90°$ ist, so kann in dem kleinern rechtwinkeligen Dreieck $FIH$ die Summe $FHI + HIF$ nicht mehr als 90° betragen, aber auch nicht weniger als 90°, weil dann $FHI + IHG + HGI + GIH + HIF$ weniger als 270° d. h. $FHG + HGI$ weniger als 90° betrüge. Ebenso schließt man, daß in dem kleinern rechtwinkeligen Dreieck $FIK$ die Summe $FKI + KIF = 90°$ ist. U. s. w.

Jedes Dreieck kann in zwei rechtwinkelige Dreiecke zerlegt werden, also beträgt unter der obigen Voraussetzung auch bei ihm die Summe der Winkel 180°.

III. Daß die Summe der Winkel eines Dreiecks nicht weniger als 180° beträgt, läßt sich beweisen, wenn man annimmt, daß durch einen innerhalb eines Winkels gelegenen Punct eine Gerade gezogen werden kann, welche beide Schenkel schneidet.*)




Man setze an das Dreieck $ABC$ das mit ihm congruente Dreieck $CBD$ und ziehe durch $D$ eine Gerade, welche die Fortsetzungen von $AB$ und $AC$ in $E$ und $F$ schneidet. Gesetzt die Winkelsummen in $ABC$, $BED$, $CDF$ betragen

*) Vergl. den Aufsatz des Verf. in den Leipziger Berichten 1870 (Crelle's J. 73 p. 372).

$$180^0 - \delta,\ 180^0 - \delta',\ 180^0 - \delta''$$

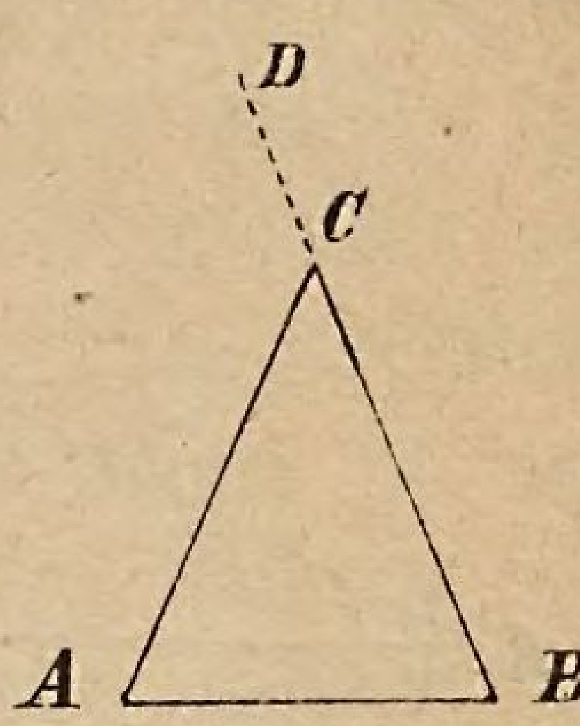
so beträgt die Winkelsumme in $AEF$

$$180^0 - \delta + 180^0 - \delta + 180^0 - \delta' + 180^0 - \delta'' - 3 \,.\, 180^0$$

d. i. weniger als $180^0 - 2\delta$, in einem andern Dreieck $180^0 - 4\delta$, endlich in einem Dreieck weniger als eine gegebene Größe, während doch das Dreieck den gegebenen Winkel $A$ enthält.

## §. 3. Von den Seiten eines Dreiecks.*)

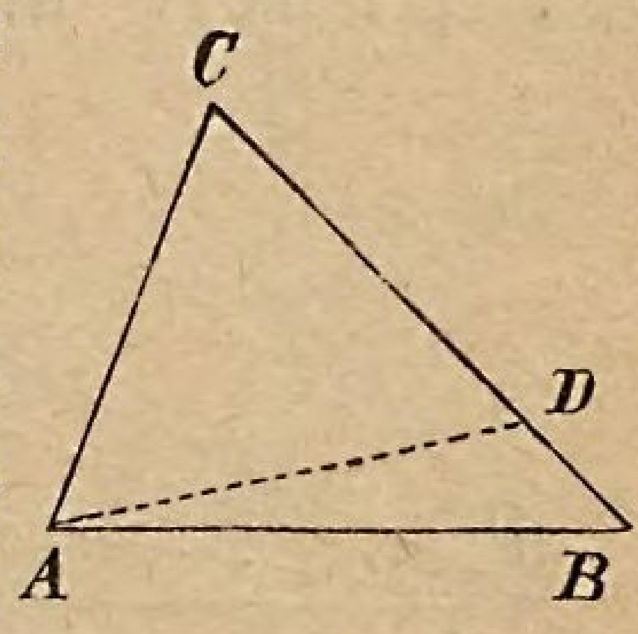
**1.** I. Ein Dreieck heißt gleichschenkelig (ἰσοσκελές), wenn zwei Seiten desselben einander gleich sind. Die dritte Seite heißt vorzugsweise die Basis, der gegenüberliegende Eckpunct die Spitze des gleichschenkeligen Dreiecks.




Gleichen Seiten eines Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber. Oder: die Winkel an der Basis eines gleichschenkeligen Dreiecks sind einander gleich. Wenn die Seite $BC = CA$, so ist der Winkel $A = B$. Das Dreieck $ABC$ deckt sich selbst auch dann, wenn man es umwendet und $C$ mit $C$, $CA$ mit $CB$, $CB$ mit $CA$ vereint. Dabei deckt der Schenkel $AB$ den Schenkel $BA$ (§. 1, 3), also sind die an der Seite $AB$ liegenden Winkel einander gleich.

Ein Winkel an der Basis des gleichschenkeligen Dreiecks ist spitz (§. 2, 8) und die Hälfte des Außenwinkels an der Spitze, weil $DCA = BAC + CBA = 2CBA$.

II. Der größern Seite eines Dreiecks liegt der größere Winkel gegenüber. Wenn $BC > CA$, so ist $A > B$.




Beweis. Trägt man $CA$ auf $CB$, so daß $DC = CA$, so ist der Winkel $BAC > DAC$. Ferner ist $DAC = CDA$ gegenüber den gleichen Seiten $DC$, $CA$ des Dreiecks $ADC$ (I). Endlich ist $CDA > CBA$, als Außenwinkel des Dreiecks $ABD$ (§. 2, 8). Aus den Prämissen $BAC > DAC$, $DAC = CDA$, $CDA > CBA$ folgt $BAC > CBA$.

III. Gleichen Winkeln eines Dreiecks liegen gleiche Seiten gegenüber. Wenn $A = B$, so ist $BC = CA$. Wären $BC$ und $CA$ ungleich, so würden $A$ und $B$ ungleich sein (2). Dieß ist gegen die Voraussetzung, also können $BC$ und $CA$ nicht ungleich sein.

IV. Dem größern Winkel eines Dreiecks liegt die größere Seite gegenüber. Wenn $A > B$, so ist $BC > CA$. Wäre $BC = CA$, so

---

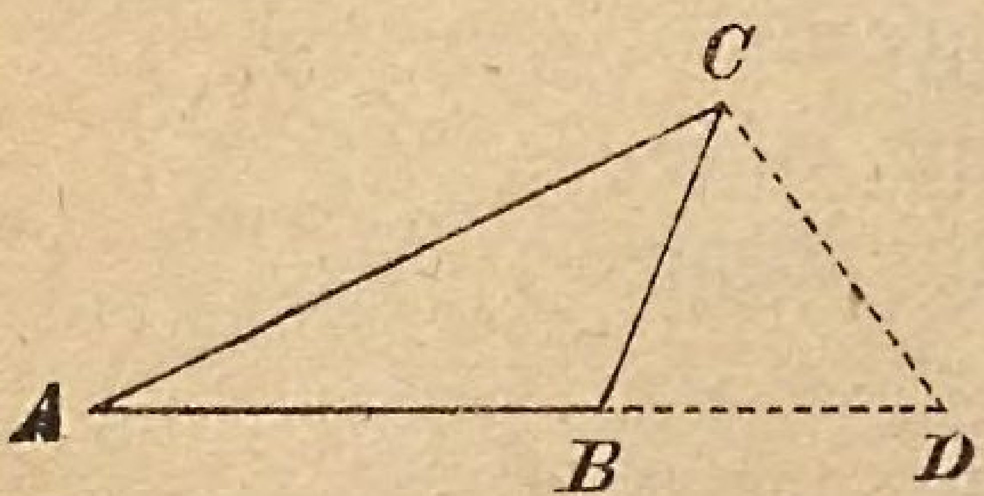
*) Vergl. Eucl. I, 5. 6. 18. 19. 20 und III.

würde $A = B$ sein (I); wäre $BC < CA$, so würde $A < B$ sein (II). Beides ist gegen die Voraussetzung, also kann $BC$ weder ebensogroß, noch kleiner sein als $CA$.

Im rechtwinkeligen Dreieck ist der rechte Winkel, im stumpfwinkeligen Dreieck ist der stumpfe Winkel größer als jeder von den beiden andern Winkeln (§. 2, 8). Also ist die Hypotenuse größer als jede von beiden Catheten; die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite ist größer als jede von den beiden andern Seiten.

2. I. Jede Seite eines Dreiecks ist kleiner als die Summe der beiden andern Seiten, größer als die Differenz derselben.

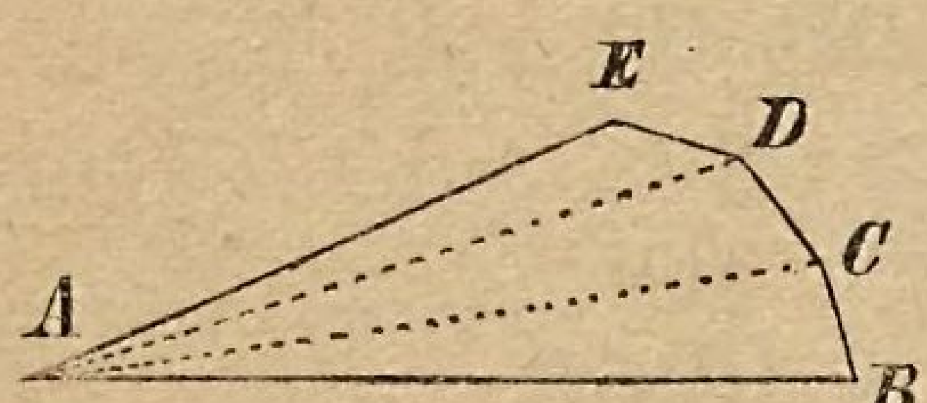
$$AB - BC < CA < AB + BC.$$

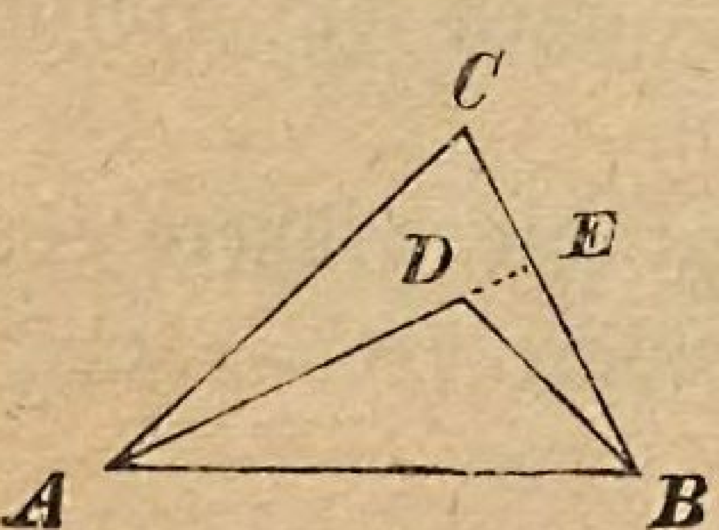



Beweis. Verlängert man $AB$ und macht $BD = BC$, so ist $AD = AB + BC$ und der Winkel $CDB = BCD$ (1); ferner $BCD < ACD$, mithin $CDB < ACD$; endlich $CA < AD$ gegenüber den ungleichen Winkeln des Dreiecks $ADC$ (1, IV), d. h. $CA < AB + BC$. Ebenso ist $AB < BC + CA$, woraus durch Subtraction von $BC$ geschlossen wird, daß $AB - BC < CA$.

Von den Strecken, welche zum Perimeter eines Dreiecks vereint werden sollen, sind 2 willkürlich; die 3te kann nur zwischen der Summe und der Differenz der beiden ersten gewählt werden.

II. Die gerade Linie zwischen 2 Puncten ist kürzer als jede andere zwischen denselben Puncten enthaltene Linie, und giebt den Abstand der Puncte an. Z. B. $AB < BC + CA$, $CA < CD + DA$, $DA < DE + EA$, . . (I). Folglich ist $AB$ kürzer als die gebrochene Linie $BCA$, kürzer als die gebrochene Linie $BCDA$, kürzer als die gebrochene Linie $BCDEA$, . . , kürzer als eine Linie, die in unendlich vielen zwischen $B$ und $A$ unendlich nahe auf einander folgenden Puncten gebrochen, von irgend einer krummen Linie sich nicht unterscheidet.



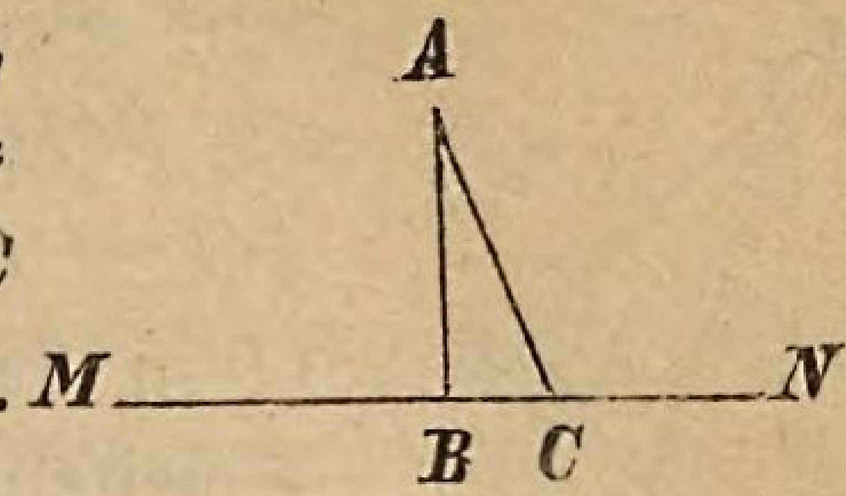




Wenn der Punct $D$ von dem Perimeter des Dreiecks $ABC$ eingeschlossen ist, so ist die gebrochene Linie $AD + DB$ kürzer als $AC + CB$. Denn die Gerade $AD$ schneidet $BC$ in $E$ so daß $DB < DE + EB$, folglich

$$AD + DB < AE + EB < AC + CB.$$

III. Unter den Strecken, welche auf einer Geraden anfangen und in

einem gegebenen Punct endigen, ist die normale die kürzeste, und giebt den Abstand des Punctes von der Geraden an. Wenn $AB$ normal zu $MN$, und $AC$ eine beliebige andere Strecke ist, die einen Punct der Geraden $MN$ mit $A$ verbindet, so ist in dem rechtwinkeligen Dreieck $ABC$ die Cathete $BA$ kleiner als die Hypotenuse $CA$ (1).

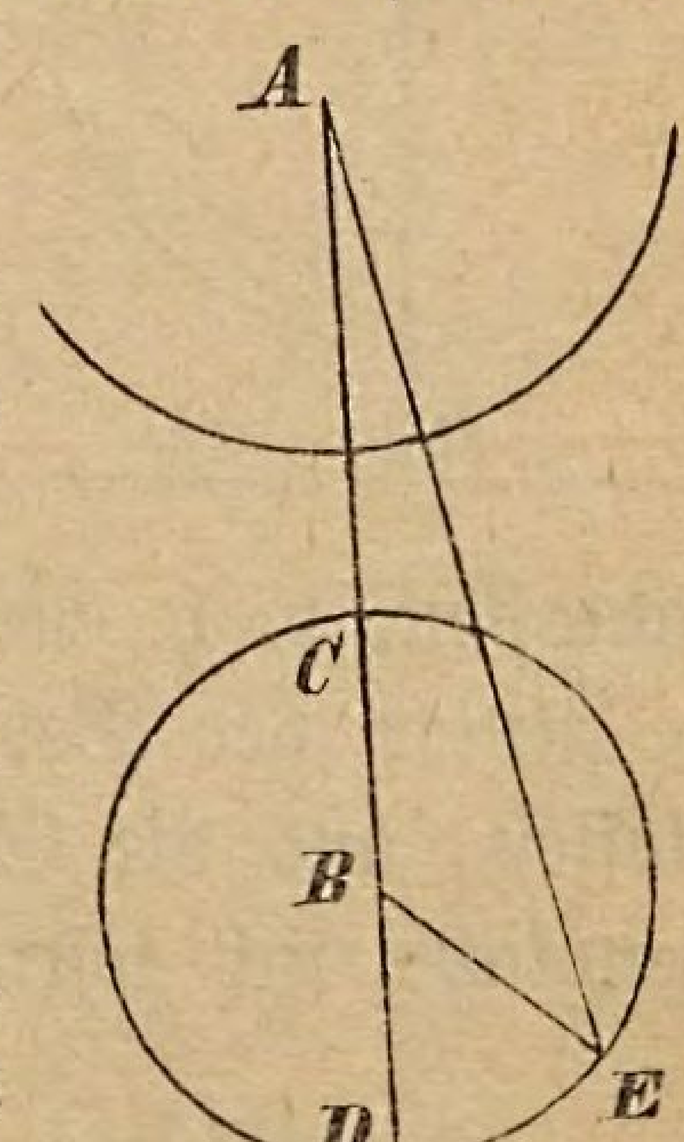



3. Wenn der Abstand der Centren von zwei Kreisen größer ist als die Summe der Radien, so schließen die Kreise einander aus. Wenn der Abstand der Centren der Summe der Radien gleich ist, so berühren sich die Kreise außen in einem Punct. Wenn der Abstand der Centren kleiner als die Summe und größer als die Differenz der Radien ist, so schneiden sich die Kreise in zwei Puncten. Wenn der Abstand der Centren der Differenz der Radien gleich ist, so berühren sich die Kreise innen in einem Puncte. Wenn der Abstand der Centren kleiner ist, als die Differenz der Radien, so schließt der größere Kreis den kleinern ein.

Beweis. Die Puncte des Kreises $B$ haben von dem Centrum $A$ verschiedene Abstände. Der Punct $C$, welcher in der Richtung $BA$ liegt, ist dem Punct $A$ am nächsten; der Punct $D$, welcher in der entgegengesetzten Richtung liegt, ist dem Punct $A$ am fernsten; d. h. $AC < AE < AD$, weil (2)

$$AB - BE < AE < AB + BE$$

Ein Punct liegt aber außer, auf, in dem Kreise $A$, je nachdem sein Abstand von dem Centrum $A$ größer, ebensogroß, kleiner ist als der Radius des Kreises $A$, welcher durch $r$ bezeichnet wird.



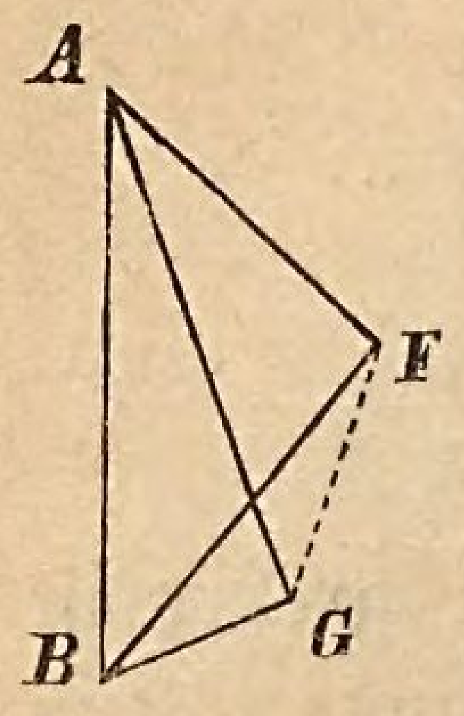

Unter der Bedingung $AB > r + BE$ hat man $AB - BE > r$, $AC > r$. Also sind alle Puncte des Kreises $B$ vom Kreise $A$ ausgeschlossen.

Unter der Bedingung $AB = r + BE$ hat man $AB - BE = r$, $AC = r$, $AE > r$. Also liegt $C$ auf dem Kreise $A$, alle übrigen Puncte des Kreises $B$ sind von dem Kreise $A$ ausgeschlossen, d. h. der Kreis $A$ wird von dem Kreise $B$ in $C$ außen berührt.

Unter der Bedingung $r - BE < AB < r + BE$ ist $AB - BE < r$, $AC < r$ und $r < AB + BE$, $r < AD$. Also liegt $C$ in, $D$ außer dem Kreise $A$, und der Kreis $A$ wird von dem Kreise $B$, der eine geschlossene Linie ist, in zwei Puncten (beim Ein- und Ausgang) geschnitten.

Auf einer Seite der Geraden $AB$ können die Kreise nicht neben

dem gemeinschaftlichen Punct $F$ einen Punct $G$ gemein haben. Der Punct $G$ kann nicht in dem Dreieck $ABF$ liegen (2, II). Liegt er in



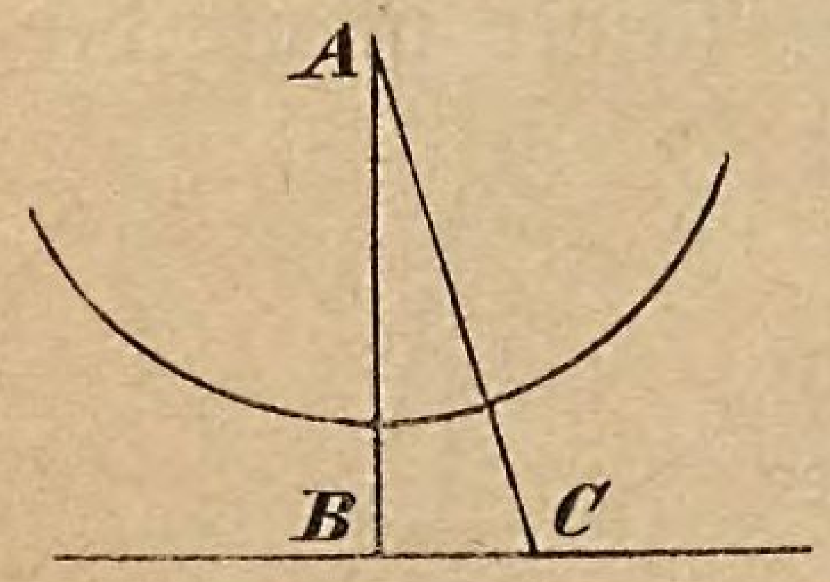

dem Winkel $BAF$, so ist der Winkel $AFG > BFG$, $BFG = FGB$, $FGB > FGA$, folglich $AFG > FGA$ und $AG > FA$, gegen die Voraussetzung. Ebensowenig kann $G$ in dem Winkel $FBA$ oder in dem zu $AFB$ gehörigen Scheitelwinkel liegen.

Unter der Bedingung $AB = r - BE$ ist $AB + BE = r$, $AD = r$, $AE < r$. Also liegt $D$ auf dem Kreise $A$, alle übrigen Puncte des Kreises $B$ sind von dem Kreise $A$ eingeschlossen. d. h. der Kreis $A$ wird von dem Kreise $B$ in $D$ innen berührt.

Unter der Bedingung $AB < r - BE$ ist $AB + BE < r$, $AD < r$. Also sind alle Puncte des Kreises $B$ vom Kreise $A$ eingeschlossen.

**4.** Wenn der Abstand einer Geraden vom Centrum eines Kreises größer ist als der Radius, so ist die Gerade vom Kreise ausgeschlossen. Wenn derselbe Abstand dem Radius gleich ist, so berühren sich die Gerade und der Kreis in einem Puncte. Wenn derselbe Abstand kleiner ist als der Radius, so schneiden sich die Gerade und der Kreis in zwei Puncten.

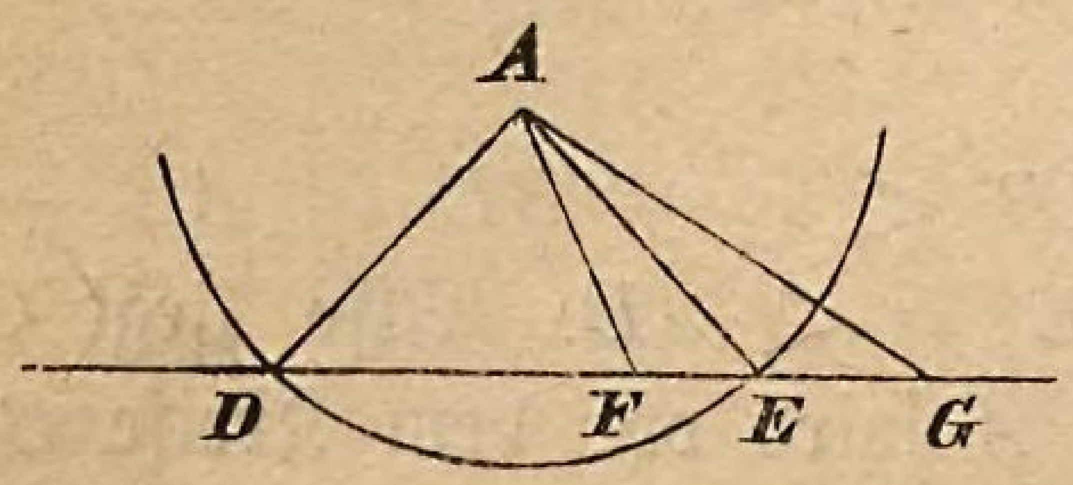
Beweis. Bezeichnet man den Abstand der Geraden von dem Centrum $A$ durch $AB$, einen beliebigen andern Punct der Geraden durch $C$, so ist $AB < AC$ (2, III).




Unter der Bedingung $AB > r$, worin $r$ den Radius der Kreises $A$ bedeutet, sind alle Puncte der Geraden vom Kreise $A$ ausgeschlossen.

Unter der Bedingung $AB = r$, ist $AC > r$. Also liegt $B$ auf dem Kreise $A$, alle übrigen Puncte der Geraden sind von dem Kreise ausgeschlossen, d. h. der Kreis $A$ wird von der Geraden in $B$ berührt.

Unter der Bedingung $AB < r$ ist $B$ von dem Kreise $A$ eingeschlossen, und die Gerade, welche von $B$ aus nach beiden Seiten ins Unendliche sich erstreckt, schneidet den Kreis $A$ in zwei Puncten $D$, $E$.



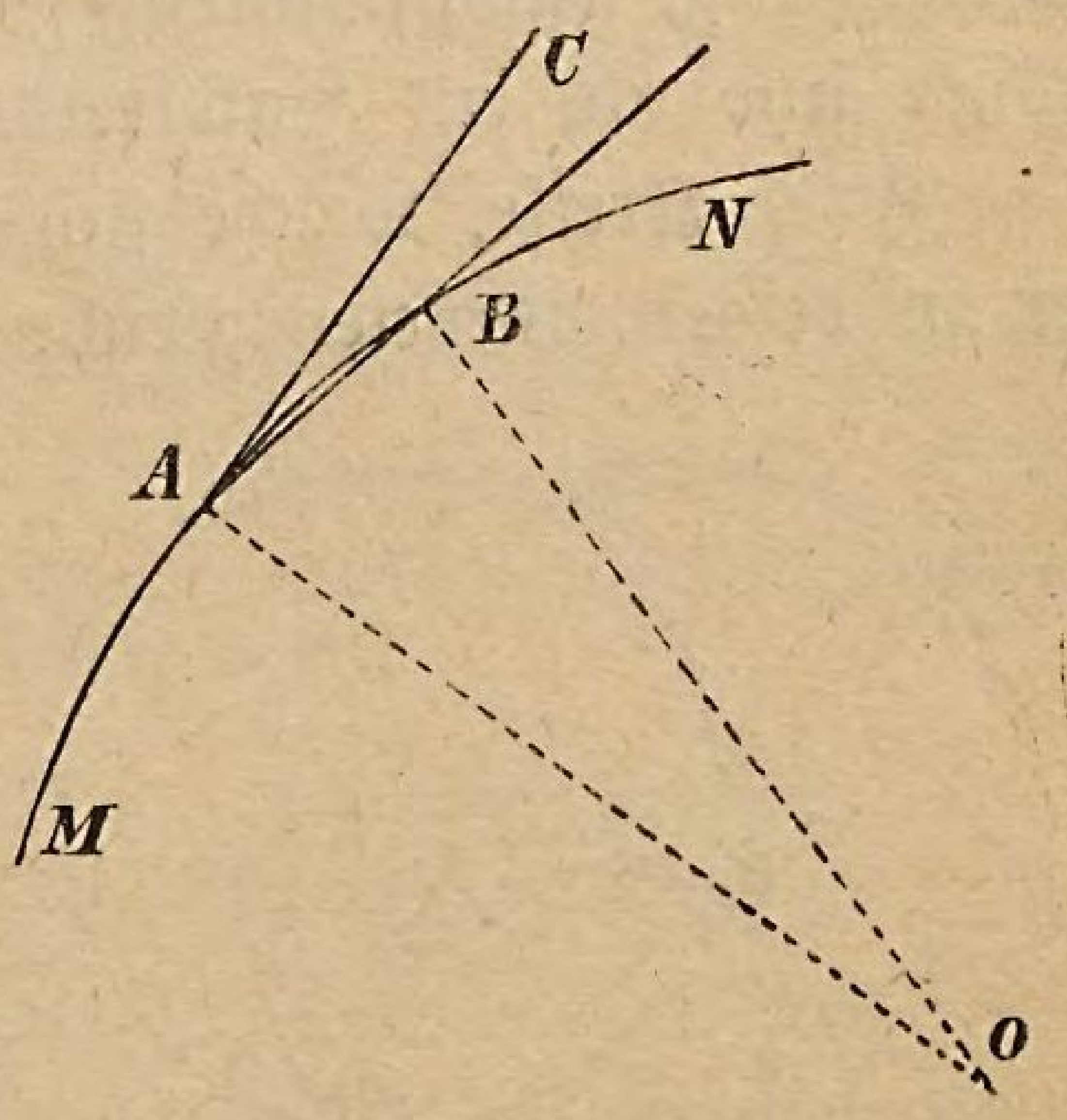

Die übrigen Puncte der Geraden sind von dem Kreise ein- oder ausgeschlossen, je nachdem sie zwischen $D$ und $E$ liegen oder nicht. Liegt $F$ zwischen $D$ und $E$, so ist der Winkel $FDA = AEF$ gegenüber den gleichen Seiten $EA$ und $AD$ des Dreiecks $ADE$ (1), $AEF < AFD$ als Außenwinkel des Dreiecks $AFE$ (§. 2, 8), mithin $FDA < AFD$, also $AF < AD$. Liegt $G$ auf der Verlänge-

rung von $DE$ jenseit $E$, so ist der Winkel $GDA = AED$, $AED > AGD$, mithin $GDA > AGD$, also $AG > AD$.

Weil demnach 3 beliebig nahe Puncte des Kreises nicht auf einer Geraden liegen, so ist der Kreis eine krumme Linie (§. 1, 3).

5. Eine Gerade hat in allen Puncten dieselbe Richtung; eine Curve hat im Allgemeinen in jedem Puncte eine bestimmte Richtung, in verschiedenen Puncten verschiedene Richtungen. Unter den Geraden, welche durch einen gegebenen Punct einer Curve sich ziehn lassen, fällt im Allgemeinen eine mit der Curve in der Nähe des gegebenen Punctes am genauesten zusammen, so daß zwischen ihr und der Curve eine Gerade sich nicht ziehn läßt. Diese der Curve in dem gegebenen Puncte am engsten sich anschmiegende Gerade heißt eine Tangente (Berührende) der Curve; der gemeinschaftliche Punct der Tangente und Curve heißt der Berührungspunct. Die Tangente giebt die Richtung der Curve in dem Berührungspuncte an.

Um die Tangente der Curve $MN$ in $A$ zu finden, zieht man die Gerade $AB$ nach einem in der Nähe von $A$ auf der Curve liegenden Puncte $B$. Wenn nun der Punct $B$ den Bogen $BA$ zurücklegt, so dreht sich die nach $B$ gerichtete Gerade $AB$ um $A$, und wird zur Tangente $AC$, indem $B$ mit $A$ zusammenfällt.*) Weil die Sehne $AB$ die Richtung der Tangente $AC$ erhält, wenn ihre Länge verschwindet, so sagt man, daß die Tangente mit der Curve 2 unendlich nahe Puncte gemein hat, die in dem Berührungspunct vereint sind. Der hinreichend kleine Bogen $AB$ liegt in dem Winkel $BAC$, so daß zwischen dem Bogen $AB$ und seiner Tangente $AC$ eine Gerade nicht gezogen werden kann.




Wenn insbesondere der Bogen $AB$ einem Kreise angehört, dessen Centrum $C$, so ist das Dreieck $OAB$ gleichschenkelig, also (1) der Winkel

$$OAB = \tfrac{1}{2}(180^\circ - BOA) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}BOA$$

Fällt nun $B$ mit $A$ zusammen, so verschwindet $BOA$, und $OAB$ wird recht, während sein Schenkel $AB$ zur Tangente des Bogens wird. Also ist die Tangente eines Kreises normal zum Radius des Berührungspunctes; ihr Abstand vom Centrum ist einem Radius gleich (4).

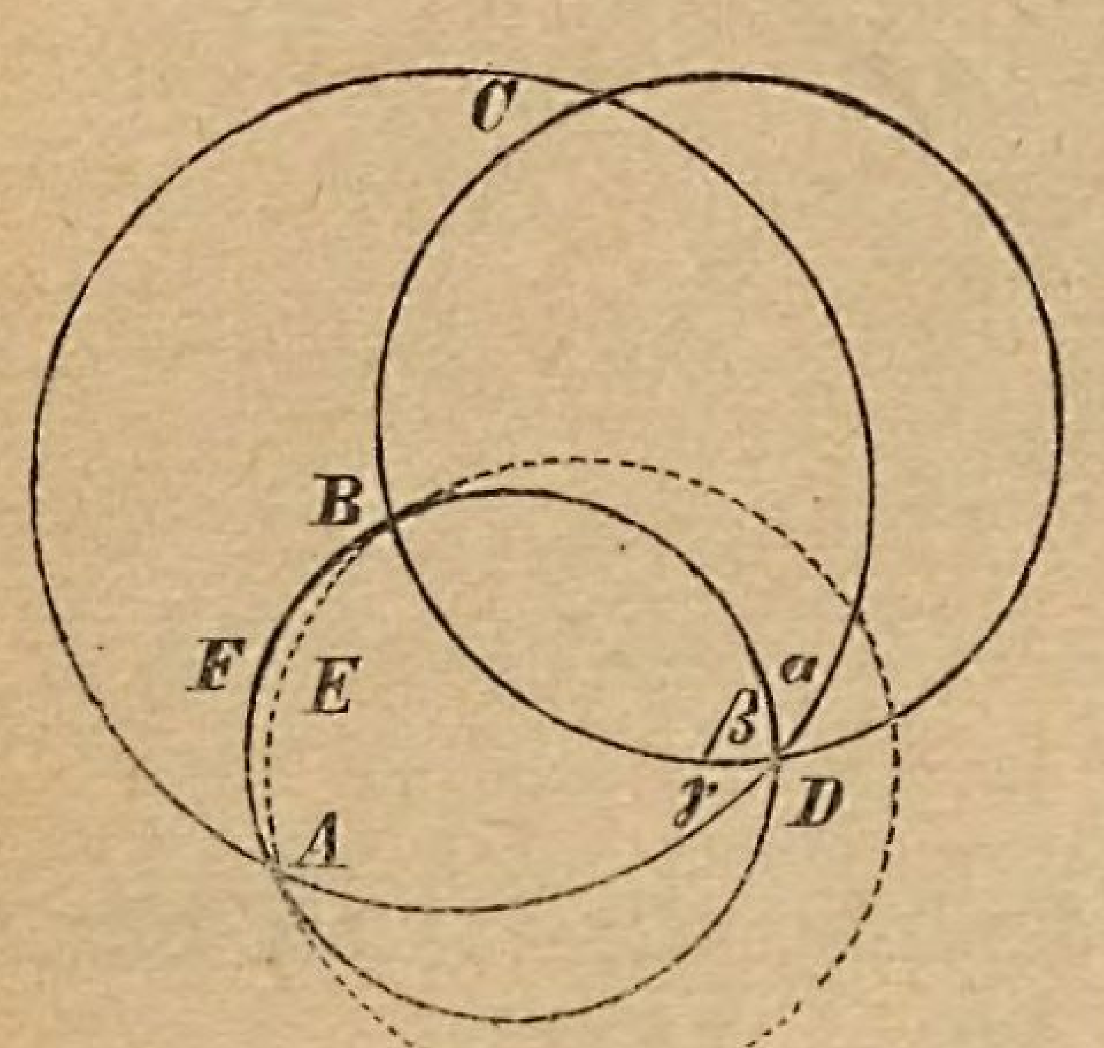
*) Diese „Methode der Tangenten" wurde im 17. Jahrhundert von Fermat, Huygens, Newton, Leibniz ausgebildet. Vergl. Klügel math. W. I p. 280.

Aus dem Zusammenfallen von 2 gemeinschaftlichen Puncten wird nach derselben Methode die Berührung von 2 gegebenen Curven abgeleitet. Die Curven haben in dem Berührungspuncte eine gemeinschaftliche gerade Tangente, und liegen entweder einerseits derselben oder beiderseits.

6. Unter dem Winkel einer Curve mit einer sie schneidenden geraden oder krummen Linie versteht man den Winkel ihrer Tangente in dem gemeinschaftlichen Puncte mit der Geraden oder mit der Tangente der andern Curve in demselben Puncte. Eine Gerade, welche die Curve rechtwinkelig schneidet, heißt eine Normale der Curve. Der Winkel der Curve mit ihrer eignen Tangente (angulus contactus) ist null, obwohl zwischen der Curve und ihrer Tangente durch den Berührungspunct berührende Curven gehn können, welche der erstern mehr oder minder sich anschmiegen und mit ihr so zu sagen verschiedene unendlich kleine Winkel einschließen. Vergl. §. 13, 10.

Der Kreis bildet mit seinen Radien rechte Winkel (5), mit einer Sehne in den beiden Endpuncten derselben gleiche spitze Winkel, die Complemente der Winkel an der Basis des gleichschenkeligen Dreiecks, dessen Spitze das Centrum ist. Die Segmente eines Kreises werden mit Rücksicht auf den Winkel des Bogens mit der Sehne spitzwinkelig, rechtwinkelig, stumpfwinkelig genannt, je nachdem sie kleiner, eben so groß, größer sind als ein Halbkreis.*)

Zwei Kreise, welche sich in 2 Puncten schneiden, bilden mit einander in beiden Puncten gleiche Winkel. Wenn 3 Kreise in einem Puncte sich schneiden, so bilden sie ein Bogendreieck, dessen Winkel die Summe 180° haben. Z. B. in dem Bogendreieck $ABC$ ist der Winkel $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$, $A + B + C = \alpha + \beta + \gamma = 180°$.




Wenn in dem Bogendreieck $ABC$ die Summe der Winkel 180° beträgt, so schneiden sich die Bogen $AB$, $BC$, $CA$ in einem Punct. Denn sobald der Bogen $AEB$ nicht durch den gemeinschaftlichen Punct $D$ der Bogen $BC$, $CA$ geht, so ist die Summe der Winkel verschieden von der Summe der Winkel des Bogendreiecks $ABC$, dessen Bogen durch $D$ gehn.**)

---

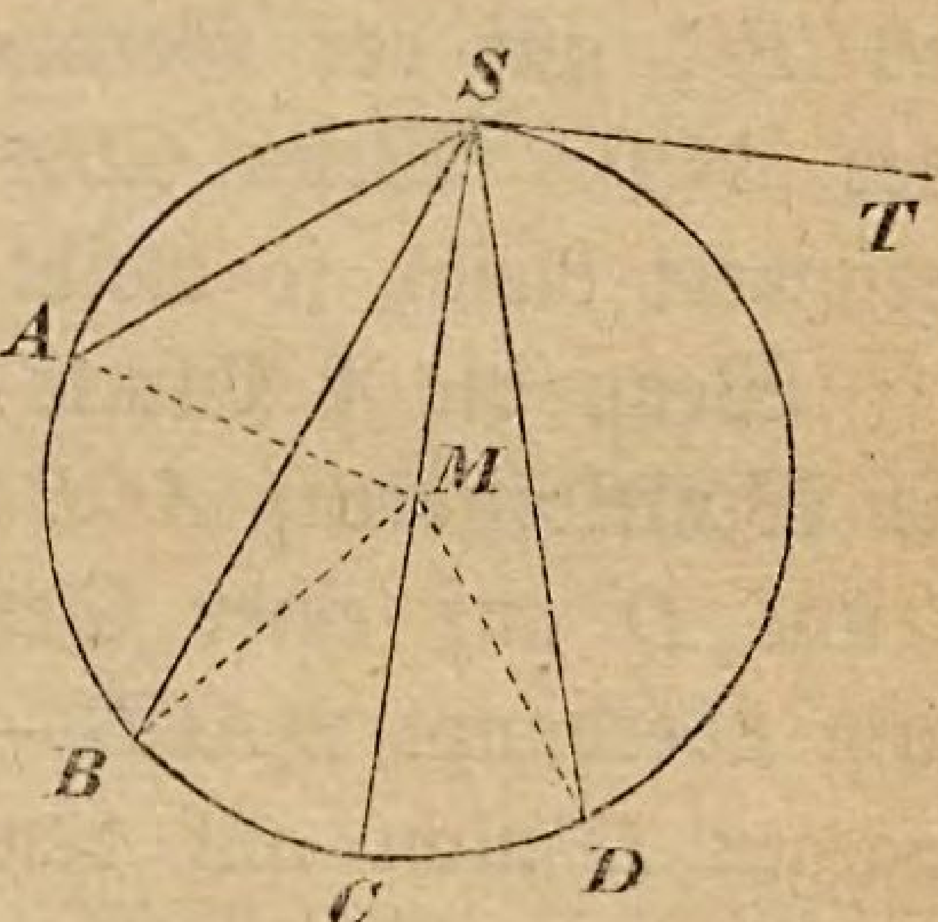
*) Steiner Crelle J. 24 p. 108.

**) Plücker Crelle J. 11 p. 222. Miquel Liouville J. 9 p. 24. Möbius Kreisverw. 47.

## §. 4. Von den Figuren, welche einem Kreise ein- oder umgeschrieben sind.

**1.** Ein Polygon heißt einem andern Polygon eingeschrieben (inscriptum), wenn seine Eckpuncte der Reihe nach auf den Seiten des andern Polygons liegen; umgeschrieben (circumscriptum), wenn seine Seiten der Reihe nach durch die Eckpuncte des andern gehn. Ein Polygon heißt einer Curve eingeschrieben, wenn seine Eckpuncte auf der Curve liegen; umgeschrieben, wenn seine Seiten Tangenten der Curve sind. Ueberhaupt, wenn eine Figur einer andern eingeschrieben ist, so ist die andere der erstern umgeschrieben, und umgekehrt (Eucl. IV).

Ein Winkel, der einem Kreise eingeschrieben ist, d. h. dessen Scheitel auf dem Kreise liegt, heißt ein Peripheriewinkel, der auf dem Bogen steht, welchen er einschließt. Seine Schenkel sind Sehnen, von denen eine ein Diameter oder verschwindend klein d. h. Tangente des Kreises sein kann. Ein Winkel ist dem Kreise umgeschrieben, wenn seine beiden Schenkel den Kreis berühren.




**2.** Ein Peripheriewinkel ist die Hälfte des Centriwinkels auf dem eingeschlossenen Bogen.*) Z. B. $ASB = \frac{1}{2}AMB$, $ASC = \frac{1}{2}AMC$, $ASD = \frac{1}{2}AMD$, $AST = \frac{1}{2}AMS$, wenn $SC$ ein Diameter, $ST$ eine Tangente des Kreises ist.

Beweis. $ASC = \frac{1}{2}AMC$, weil das Dreieck $SAM$ gleichschenkelig ist (§. 3, 1). Ebenso ist $BSC = \frac{1}{2}BMC$, $CSD = \frac{1}{2}CMD$. Ferner ist $CST = \frac{1}{2}CMS$, weil die Tangente normal zum Radius des Berührungspunctes (§. 3, 5). Daher ist

$$ASC - BSC = \tfrac{1}{2}(AMC - BMC), \quad ASB = \tfrac{1}{2}AMB$$
$$ASC + ASD = \tfrac{1}{2}(AMC + CMD), \quad ASD = \tfrac{1}{2}AMD$$
$$ASC + CST = \tfrac{1}{2}(AMC + CMS), \quad AST = \tfrac{1}{2}AMS$$

wobei die durch je 3 Buchstaben bezeichneten Winkel einerlei Sinnes sind (§. 1, 5).

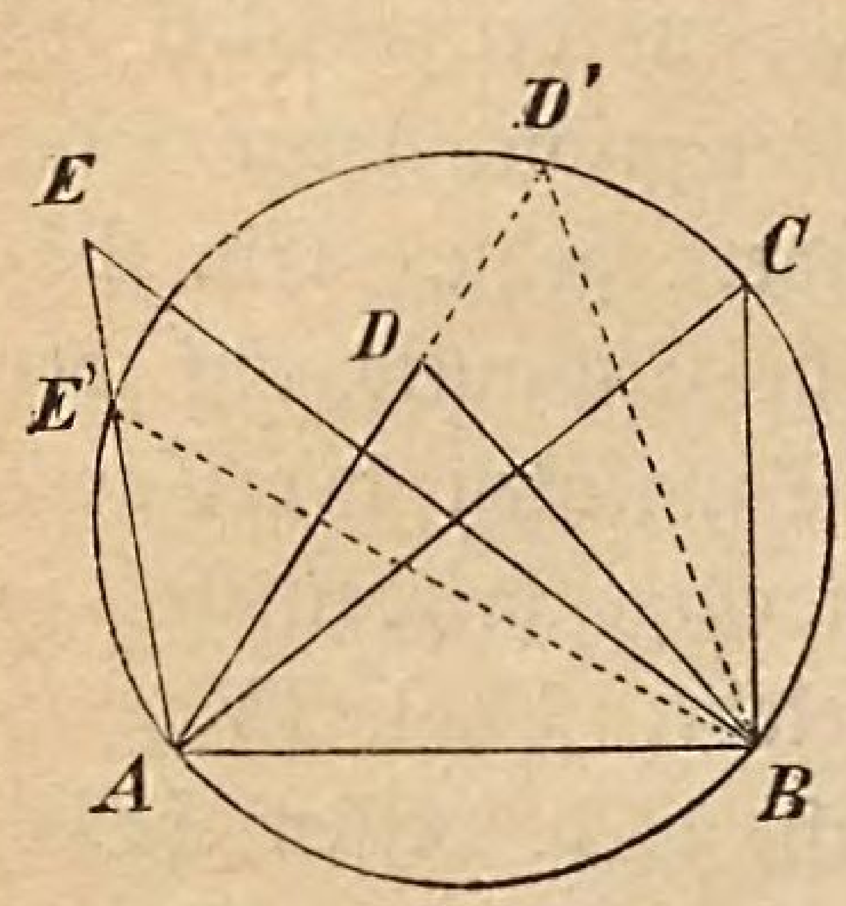
Anmerkung. Ein Peripheriewinkel ist spitz, recht, stumpf, je nachdem der eingeschlossene Bogen kleiner, ebensogroß, größer ist als ein Halbkreis. Zwei Peripheriewinkel sind complementär oder supplementär, je nachdem die von ihnen eingeschlossenen Bogen zu einem Halbkreis oder zu einem Kreis sich ergänzen.

**3.** Alle Peripheriewinkel auf demselben Bogen oder auf gleichen

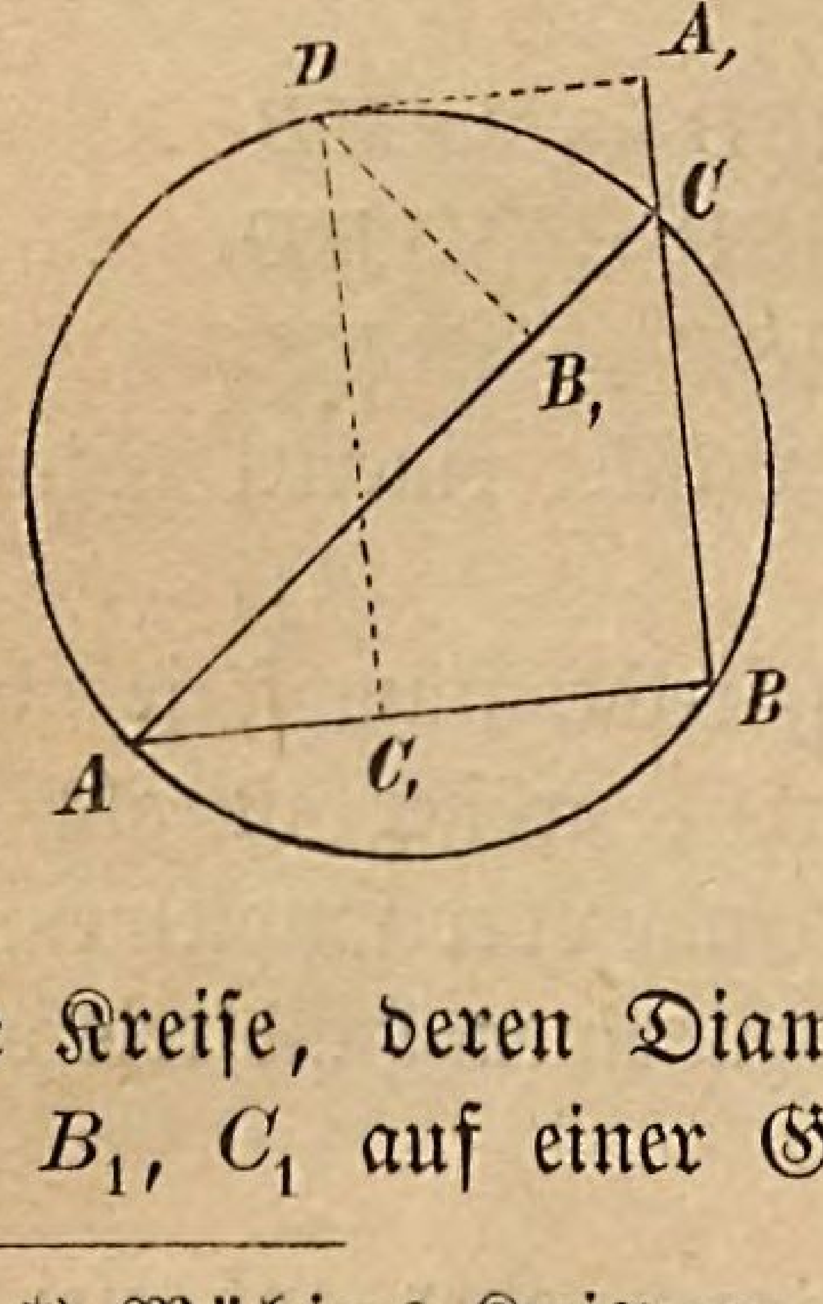
*) Eucl. III, 20.

Bogen eines Kreises sind einander gleich, weil sie Hälften desselben Centriwinkels oder gleicher Centriwinkel sind (§. 1, 6). Aus allen Puncten eines Kreisbogens hat die Sehne desselben gleiche scheinbare Größe.

Umgekehrt: die Spitzen der Dreiecke auf einer gemeinschaftlichen Basis, welche gleiche Winkel an den Spitzen haben, oder gleiche Summen der Winkel an der Basis, oder gleiche Differenz zwischen dem Winkel an der Spitze und der Summe der Winkel an der Basis, liegen auf einem bestimmten Kreisbogen, dessen Sehne die gemeinschaftliche Basis ist. Wenn die Winkel $ACB$, $ADB$, $AEB$ einander gleich sind, so liegen $B$, $C$, $D$, $E$, $A$ auf einem Kreisbogen. Läge $D$ in dem Segment $ABCD'$ auf der Geraden $AD'$, so wäre der Winkel $ADB > AD'B$ oder $ACB$ (§. 2, 8). Läge $E$ außer dem Segment $ABCE'$, auf der Geraden $AE'$, so wäre der Winkel $AEB < AE'B$ oder $ACB$. Wenn $CBA + BAC$ oder $CBA + BAC - ACB$ unverändert bleibt, so bleibt $ACB$ unverändert, folglich u. s. w.




Wenn die 4 Puncte $A$, $B$, $C$, $D$ auf einem Kreise liegen, so hat die Winkeldifferenz $ACB - ADB$ den Werth 0 oder 180°, je nachdem $C$ und $D$ auf einer Seite der Geraden $AB$ liegen oder nicht. Also kann überhaupt $2(ACB - ADB = 0$ gesetzt werden (§. 2, 4). Wenn dagegen $D$ nicht auf dem Kreise liegt, der durch $A$, $B$, $C$ geht, so ist $2(ACB - ADB)$ von 0 verschieden. Unter der Bedingung $2(ACB - ADB) = 0$ liegen demnach die Puncte $A$, $B$, $C$, $D$ auf einem Kreise in unbestimmter Ordnung.*)




Wenn die Puncte $A$, $B$, $C$, $D$ auf einem Kreise liegen, und die Normalen $DA_1$, $DB_1$, $DC_1$ auf die Seiten $BC$, $CA$, $AB$ des Dreiecks $ABC$ gefällt werden, so liegen die Fußpuncte $A_1$, $B_1$, $C_1$ auf einer Geraden.**) Da $A_1$, $B_1$, $C$, $D$ und $A_1$, $B$, $C_1$, $D$ je auf einem Kreise liegen, so hat man $2DA_1B_1 = 2DCB_1 = 2DCA = 2DBA = 2DBC_1 = 2DA_1C_1$. Also ist $2DA_1B_1 = 2DA_1C_1$ d. h. $A_1$, $B_1$, $C_1$ liegen auf einer Geraden. Die Kreise, deren Diameter $DA$, $DB$, $DC$ sind, schneiden einander in $A_1$, $B_1$, $C_1$ auf einer Geraden.

*) Möbius Kreisverw. 8.

**) Dieser Satz wird R. Simson zugeschrieben von Servois Gerg. Ann. 4 p. 250. Vergl. Gerg. Ann. 14 p. 28 und 280, Poncelet propr. proj. 468.

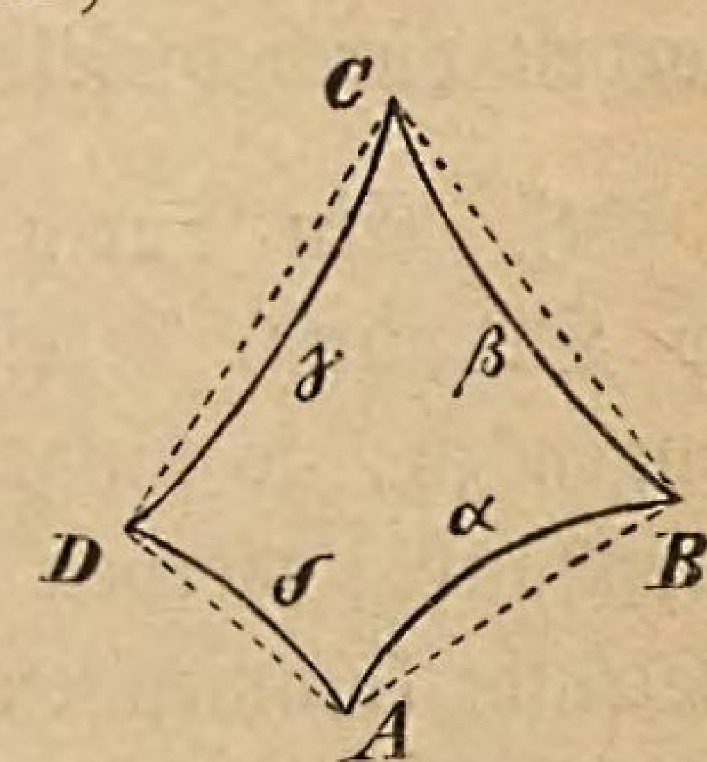
**4.** Bei einem dem Kreise eingeschriebenen Viereck ist die Summe des 1ten und 3ten Winkels gleich der Summe des 2ten und 4ten Winkels. Ist $M$ das Centrum des dem Viereck $ABCD$ umgeschriebenen Kreises, so ist $BAM = MBA$, $CBM = MCB$, u. s. f., daher für alle besondern Lagen des Punctes $D$

$$BAM + MAD + DCM + MCB = CBM + MBA + ADM + MDC,$$
$$BAD \quad + \quad DCB \quad = \quad CBA \quad + \quad ADC.$$

Ebenso*) ist bei einem dem Kreise eingeschriebenen Sechseck die Summe des 1ten, 3ten, 5ten Winkels gleich der Summe des 2ten, 4ten, 6ten Winkels u. s. w. Um den entsprechenden Satz für ein dem Kreise eingeschriebenes Fünfeck aufzustellen, betrachte man dasselbe als ein eingeschriebenes Sechseck, dessen 6ter Eckpunct mit dem 1ten zusammenfällt, so daß die letzte Seite den Kreis in dem ersten Eckpuncte berührt (§. 3, 5).

Wenn einem Kreise das Viereck $ABCD$ eingeschrieben ist, dessen Seiten Bogen von beliebigen Kreisen sind, so ist die Summe von zwei nichtfolgenden Winkeln der Summe der beiden andern gleich.**) Man hat

$$\beta B\alpha + \delta D\gamma - (\alpha A\delta + \gamma C\beta)$$
$$= CB\beta + \beta B\alpha + \alpha BA + AD\delta + \delta D\gamma + \gamma DC$$
$$- (BA\alpha + \alpha A\delta + \delta AD + DC\gamma + \gamma C\beta + \beta CB)$$
$$= CBA + ADC - (BAD + DCB)$$




weil die Kreisbogen mit ihren Sehnen beiderseits gleiche Winkel bilden (§. 3, 6). Nun ist $CBA + DCB + ADC + BAD = 360^0$ oder 0, folglich

$$\beta B\alpha + \delta D\gamma - (\alpha A\delta + \gamma C\beta)$$
$$= 2(CBA + ADC) = 2(CBA - CDA).$$

Diese Differenz verschwindet nur dann, wenn $A$, $B$, $C$, $D$ auf einem Kreise liegen (3).

Umgekehrt schließt man: Wenn in einem von Bogen beliebiger Kreise gebildeten Viereck die Summe von zwei nichtfolgenden Winkeln der Summe der beiden andern gleich ist, so ist das Viereck einem Kreise eingeschrieben.

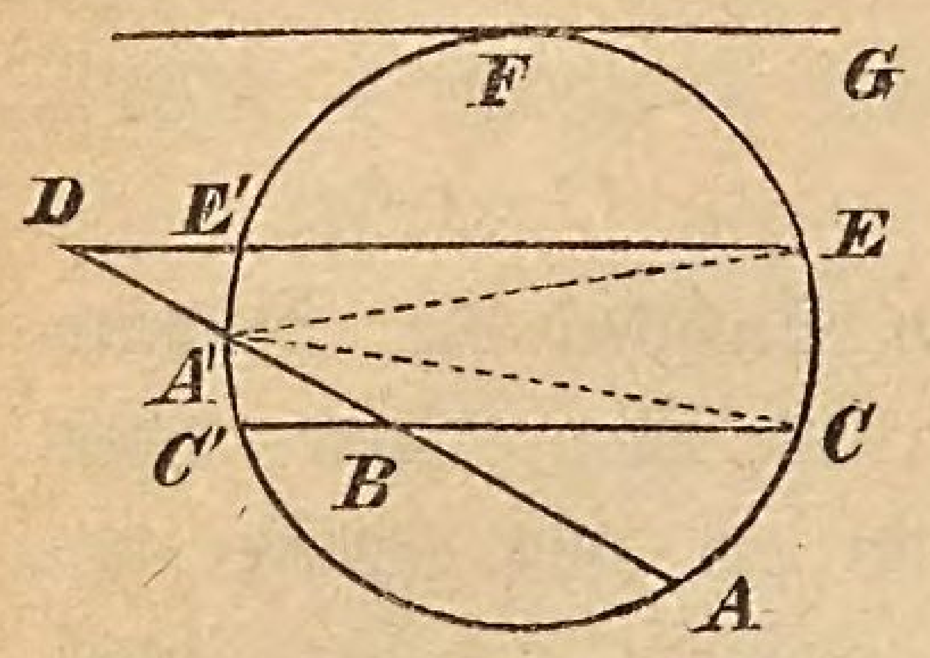
**5.** Ein Winkel, dessen Scheitel von einem Kreise eingeschlossen ist, ist die halbe Summe der Centriwinkel auf den Bogen, welche der Winkel und sein Scheitelwinkel einschließen. Ein Winkel, dessen Scheitel von dem Kreise ausgeschlossen ist, ist die halbe Differenz der Centriwinkel,

---

*) Carnot géom. de pos. 304.

**) Lexell Acta Petrop. 1782. I. p. 58 hat diesen Satz an dem sphärischen Viereck bemerkt. Vergl. Guénau d'Aumont Gerg. Ann. 12 p. 279. Miquel Liouv. J. 10 p. 347.

auf den von dem Winkel eingeschlossenen Bogen.*) Die zwischen parallelen Sehnen enthaltenen Bogen des Kreises sind einander gleich. Wenn eine Tangente und eine Sehne des Kreises parallel sind, so ist der Berührungspunct die Mitte des eingeschlossenen Bogens.




Beweis. Der Winkel $ABC$ ist ein Außenwinkel des Dreiecks $A'BC$, folglich $ABC = BA'C + A'BC$ (§. 2, 8) oder $ABC = AA'C + A'CC''$.

Der Winkel $ADE$ ist ein Winkel des Dreiecks $A'DE$, folglich $ADE = AA'E - DEA'$ oder $AA'E - E'EA'$.

Wenn die Sehnen $CC''$, $EE'$ parallel sind, so bilden sie mit der Sehne $E'C$ gleiche oder um $180^0$ verschiedene Winkel, und die auf den Bogen $CE$ und $E'C'$ stehenden Centriwinkel sind gleich; gleiche Centriwinkel schließen gleiche Bogen ein.

Die von den parallelen Sehnen $CC''$, $EE'$ eingeschlossenen Bogen bleiben einander gleich, während $E$ mit $E'$ in $F$ zusammenfällt und $EE'$ zur Tangente $FG$ wird. In der That ist der Radius des Punctes $F$ normal nicht nur zu $FG$, sondern auch zu $CC'$, und halbirt den Winkel an der Spitze des gleichschenkeligen Dreiecks, welches $C$, $C'$ und das Centrum des Kreises bestimmen. Ein Centriwinkel und sein Bogen werden durch dieselbe Gerade halbirt.

6. Ein durch seinen Anfangspunct und seinen Endpunct (in dieser Ordnung) bezeichneter Kreisbogen läßt 2 sich ausschließende Deutungen zu, so lange nicht der Sinn gegeben ist, in welchem der Kreis durchlaufen werden soll. Bei der Bezeichnung von allen gleichzeitig in Betracht kommenden Bogen wird vorausgesetzt, daß der Kreis in demselben Sinne durchlaufen werde, übereinstimmend mit dem Sinne der Drehung, der bei der Bezeichnung der Centriwinkel, welche auf den Bogen stehn, angenommen wird (§. 1, 5).

Zwei Bogen, deren Anfangspuncte vereint sind und deren Differenz eine Peripherie ist, haben dieselben Endpuncte; bezeichnet man einen Werth des Bogens $AB$ durch $a$, den Werth der Peripherie durch $p$, so sind auch $a+p$, $a+2p$, . ., $a+kp$ Werthe des Bogens $AB$, wobei $k$ eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet (§. 2, 4). Daher ist

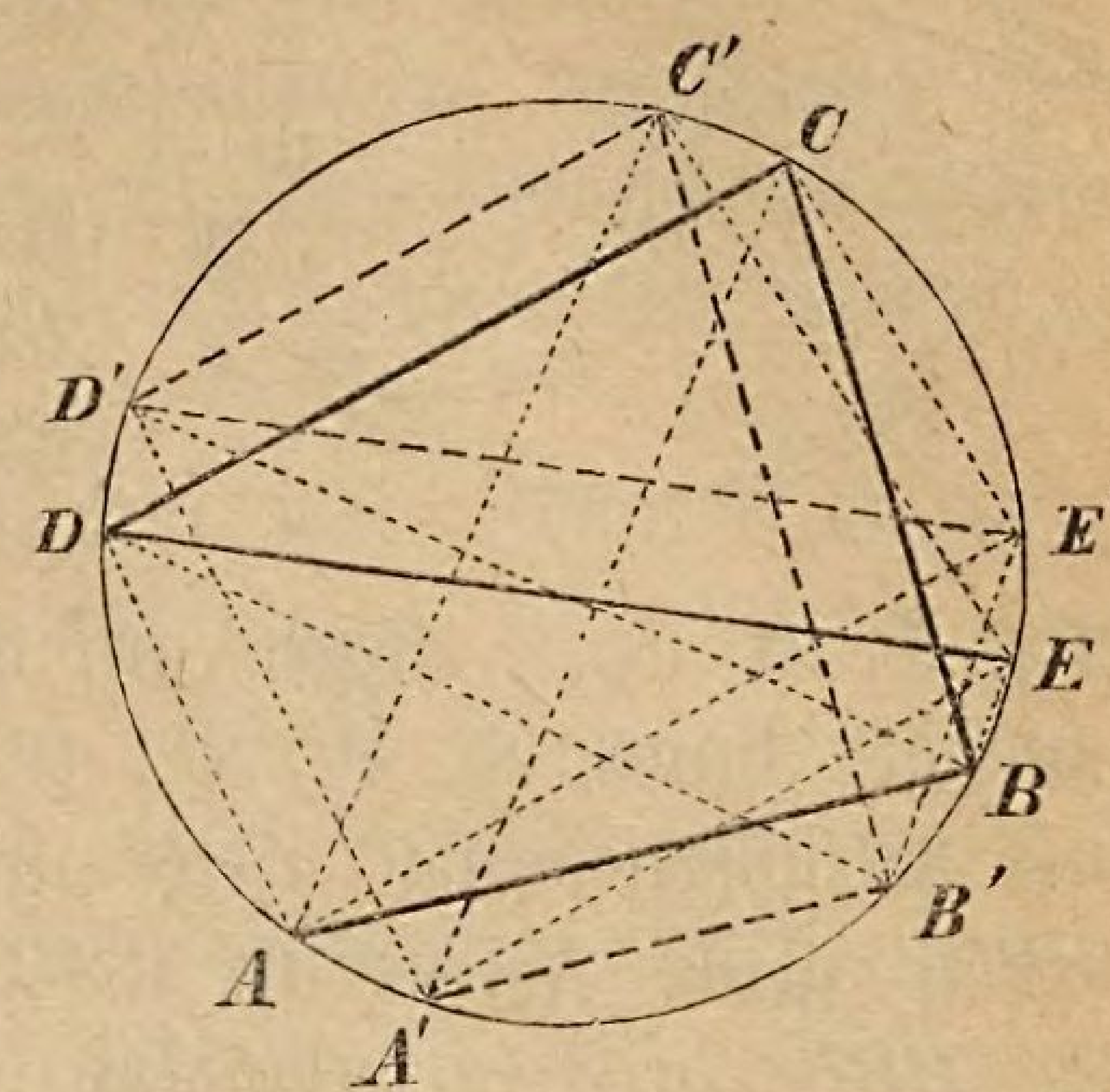
$$AB + BA = 0$$

oder eine beliebige positive oder negative ganze Anzahl von Peripherien; und für jede Lage der Puncte $A$, $B$, $C$ auf dem Kreise hat man

$$AB + BC = AC.$$

*) Diese Sätze werden von Vitello Opt. I, 55 nach Alhazen mitgetheilt.

Wenn zwei Sehnen parallel sind, so ist der Bogen vom Anfang der ersten zum Anfang der zweiten dem Bogen gleich, der vom Ende der zweiten zum Ende der ersten Sehne sich erstreckt (5). Sind die Sehnen $AB$, $A'B'$ parallel, so sind die Bogen $AA'$, $B'B$ oder $AB'$, $A'B$ einander gleich.




Umgekehrt schließt man aus der Gleichheit der Bogen $AA'$, $B'B$, daß die vom Anfang des einen nach dem Ende des andern Bogens gehenden Sehnen $AB$, $A'B'$ parallel sind.

Zieht man willkürlich die parallelen Sehnen $AB$ und $A'B'$, $BC$ und $B'C''$, $CD$ und $C''D'$, $DE$ und $D'E'$, . . , so sind die Bogen $AA'$, $B'B$, $CC''$, $D'D$, $EE'$, . . einander gleich. Folglich sind die Sehnen

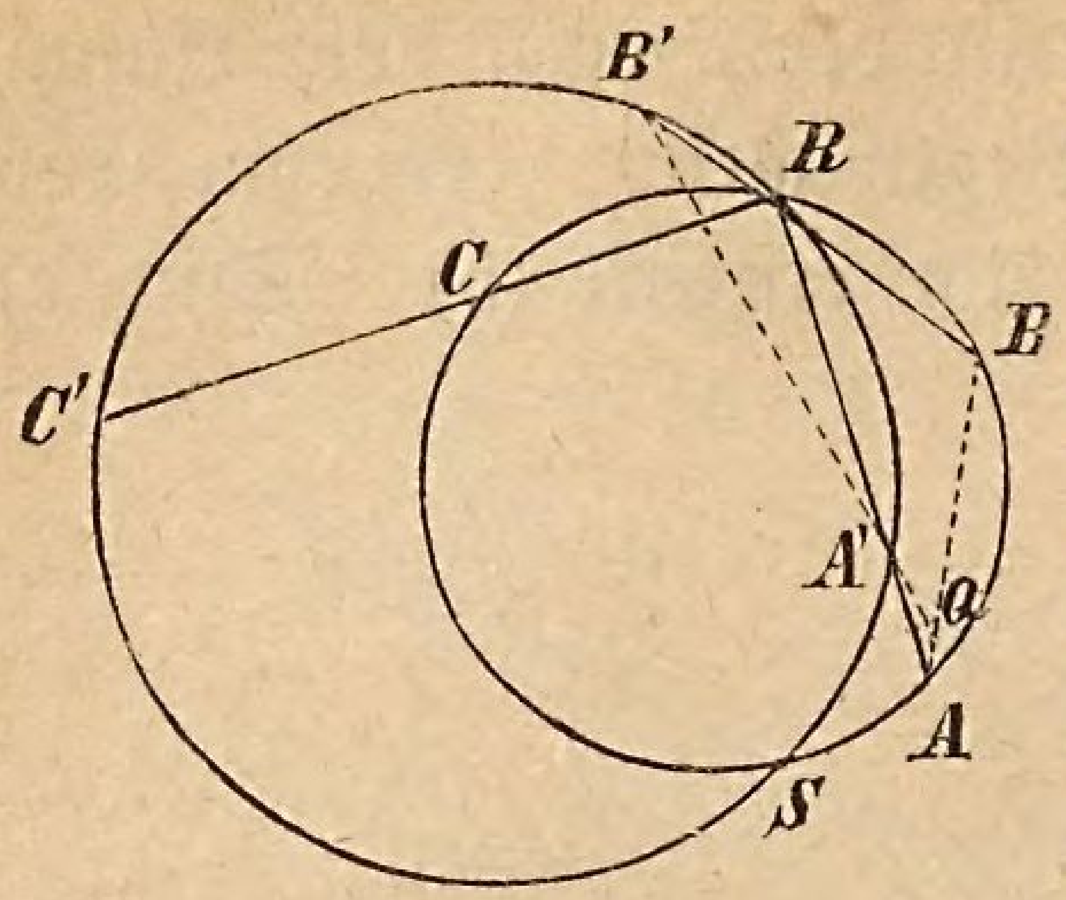
$$C'A \text{ und } CA',\ D'A' \text{ und } DA,\ E'A \text{ und } EA', \ldots$$
$$D'B \text{ und } DB',\ E'B' \text{ und } EB, \ldots$$
$$E'C \text{ und } EC'', \ldots$$

parallel.

Die Sehnen $AB$, $BC$, $CA'$ bilden mit den parallelen Sehnen $A'B'$, $B'C''$, $C'A$ ein dem Kreise eingeschriebenes Sechseck. Die Sehnen $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ bilden mit den parallelen Sehnen $A'B'$, $B'C''$, $C''D'$, $D'A'$ zwei dem Kreise eingeschriebene Vierecke. Die Sehnen $AB$, $BC$, $CD$, $DE$, $EA'$ bilden mit den parallelen Sehnen $A'B'$, $B'C'$, $C''D'$, $D'E'$, $E'A$ ein dem Kreise eingeschriebenes Zehneck u. s. w. Ueberhaupt sind bei einem dem Kreise eingeschriebenen $(4n+2)$Eck die letzte und die $(2n+1)$te Seite parallel, wenn die auf die $(2n+1)$te folgenden Seiten der Reihe nach mit den ersten $2n$ Seiten parallel sind. Bei zwei dem Kreise eingeschriebenen $2n$Ecken sind die letzten Seiten parallel, wenn die ersten $2n-1$ Seiten des einen Polygons mit den ersten $2n-1$ Seiten des andern Polygons der Reihe nach parallel sind.*)

7. Wenn zwei Kreise sich in $R$ und $S$ schneiden, und durch $R$ Gerade gezogen werden, die den einen Kreis in $A$, $B$, $C$, . . , den andern in $A'$, $B'$, $C'$, . . schneiden, so haben die in einerlei Sinn genommenen Bogen $SA$ und $SA'$, $SB$ und $SB'$, . . , $AB$ und $A'B'$, . . gleiche Centriwinkel. Die Dreiecke $SAB$ und $SA'B'$, $SAC$ und $SA'C''$, . . haben der Reihe nach gleiche Winkel; die Winkel $ASA'$, $BSB'$, . . , $AB^{\wedge}A'B'$,

*) Möbius Crelle J. 36 p. 216. Vergl. Crelle J. 6 p. 310. Den Satz vom Sechseck, einen besondern Fall des Pascal'schen Theorems (Trigon. §. 7) hatte Gergonne betrachtet Ann. 4 p. 78.



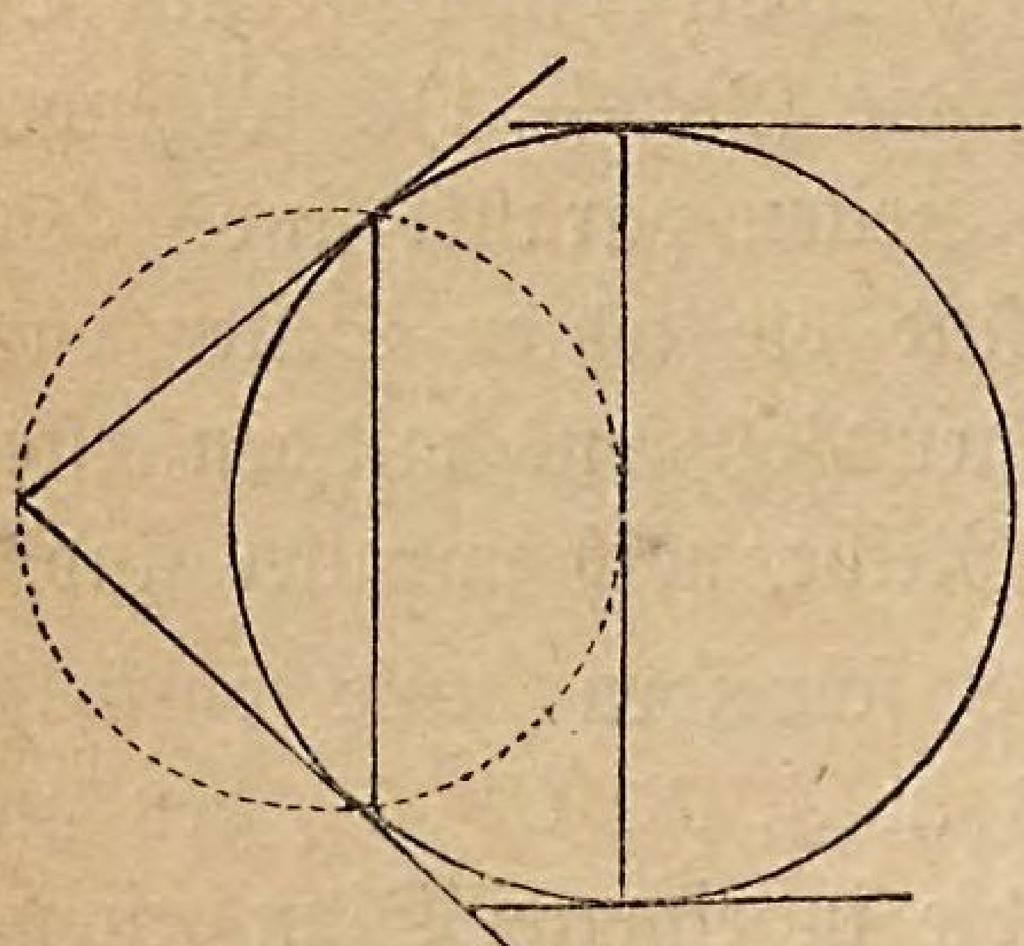

$AC^\wedge A'C'$, $BC^\wedge B'C'$, .. sind einander gleich und gleich dem Winkel der beiden Kreise.*)

Beweis. Weil $R$, $A$, $A'$ auf einer Geraden liegen, so ist (§. 2, 4) $2SRA = 2SRA'$. Es sind aber $2SRA$, $2SRA'$ den Centriwinkeln gleich, die auf den Bogen $SA$, $SA'$ stehn. Also stehn auf den Bogen $SA$ und $SA'$, $SB$ und $SB'$, .., $AB$ und $A'B'$, .. gleiche Centriwinkel. Die Puncte $S$, $A$, $B$, $C$, .. liegen auf dem einen Kreise in derselben Reihenfolge, wie die Puncte $S$, $A'$, $B'$, $C'$, .. auf dem andern Kreise; folglich sind die Peripheriewinkel $ASB$ und $A'SB'$, $BAS$ und $B'A'S$, $SBA$ und $SB'A'$ gleich. Ferner ist $ASB + BSA' = BSA' + A'SB$, d. h. $ASA = BSB'$, u. s. w. Endlich, weil $BAS = B'A'S$, so ist $AB^\wedge A'B' + A'B'^\wedge AS = A'B'^\wedge AS + AS^\wedge A'S$, d. h. $AB^\wedge A'B' = ASA'$ u. s. w. Der Winkel $ASA'$ ist aber der Winkel der beiden Kreise, wenn der Bogen $SA$ und damit der Bogen $SA'$ verschwindet (§. 3, 10).

Anmerkung. Der Durchschnitt der Geraden $AB$ und $A'B'$ werde durch $Q$ bezeichnet; nun ist $2AQA' = 2ASA'$, $2BQB' = 2BSB'$, folglich liegt $S$ auf den Kreisen $AQA'$, $BQB'$ (4), und man schließt**):

Wenn zwei gegenüberliegende Seiten eines Vierecks $AB$, $A'B'$ in $Q$, die beiden andern $BB'$, $A'A$ in $R$ sich schneiden, so gehn die Kreise $ABR$, $BB'Q$, $B'A'R$, $A'AQ$ durch einen Punct $S$.

8. Die Tangenten an Gegenpuncten eines Kreises sind parallel, weil sie normal zu dem Diameter sind, der die Berührungspuncte verbindet (§. 3, 6. §. 2, 7).



Die Tangenten an den Endpuncten einer Sehne bilden mit der Sehne ein gleichschenkeliges Dreieck, weil sie mit ihr gleiche spitze Winkel einschließen (§. 3,, 6. 1).

Durch jeden von dem Kreise ausgeschlossenen Punct gehn 2 Tangenten des Kreises. Die Berührungspuncte liegen auf dem Kreise, von welchem der gegebene Punct und das Centrum des gegebenen Kreises Gegenpuncte sind, weil diese Puncte mit einem der gesuchten Berührungspuncte ein rechtwinke-

*) Vergl. die von Möbius Statik 118 angestellten Betrachtungen.
**) Steiner in Gergonne's Ann. 18 p. 302.

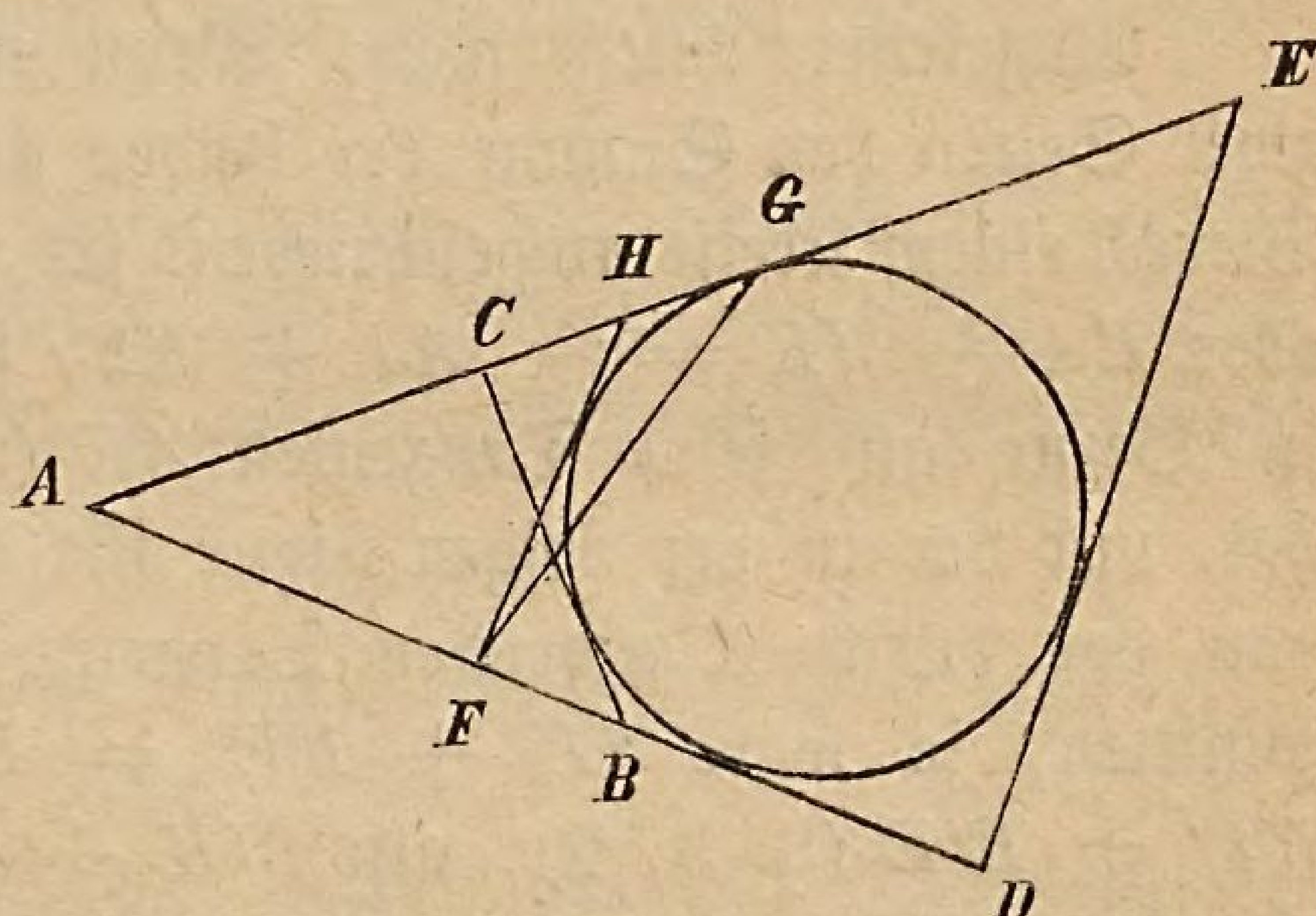
liges Dreieck bilden (3). Die Berührungspuncte haben von dem gegebenen Punct gleiche Abstände.

**9.** Die Dreiecke, welche einen Winkel gemein haben und demselben Kreise umgeschrieben sind, haben gleiche Summe der Seiten oder gleiche Differenz zwischen der Summe der den gemeinschaftlichen Winkel einschließenden Seiten und der dritten Seite, je nachdem der Kreis von den Dreiecken ausgeschlossen oder eingeschlossen ist.*)

Beweis. Bezeichnet man die Tangenten, welche von $A$, $B$, $C$, .. bis an den Kreis reichen, der Reihe nach durch $a$, $b$, $c$, .., so hat man

$$CA + AB + BC = a - c + a - b + b + c = 2a,$$
$$EA + AD - DE = e + a + a + d - (d + e) = 2a.$$

Umgekehrt schließt man: Die Dreiecke, welche einen Winkel gemein haben und gleiche Summe der Seiten, oder gleiche Differenz zwischen der Summe der den gemeinschaftlichen Winkel einschließenden Seiten und der dritten Seite, sind demselben Kreise umgeschrieben. Wenn $FG$ nicht, wohl aber $FH$ eine Tangente des von $AB$, $BC$, $CA$ berührten Kreises ist, so ist $FG + GH > FH$ (§. 3, 2), also $GA + AF + FG > HA + AF + FH$. Nun ist $HA + AF + FH = CA + AB + BC$, folglich $GA + AF + FG > CA + AB + BC$, u. s. w.



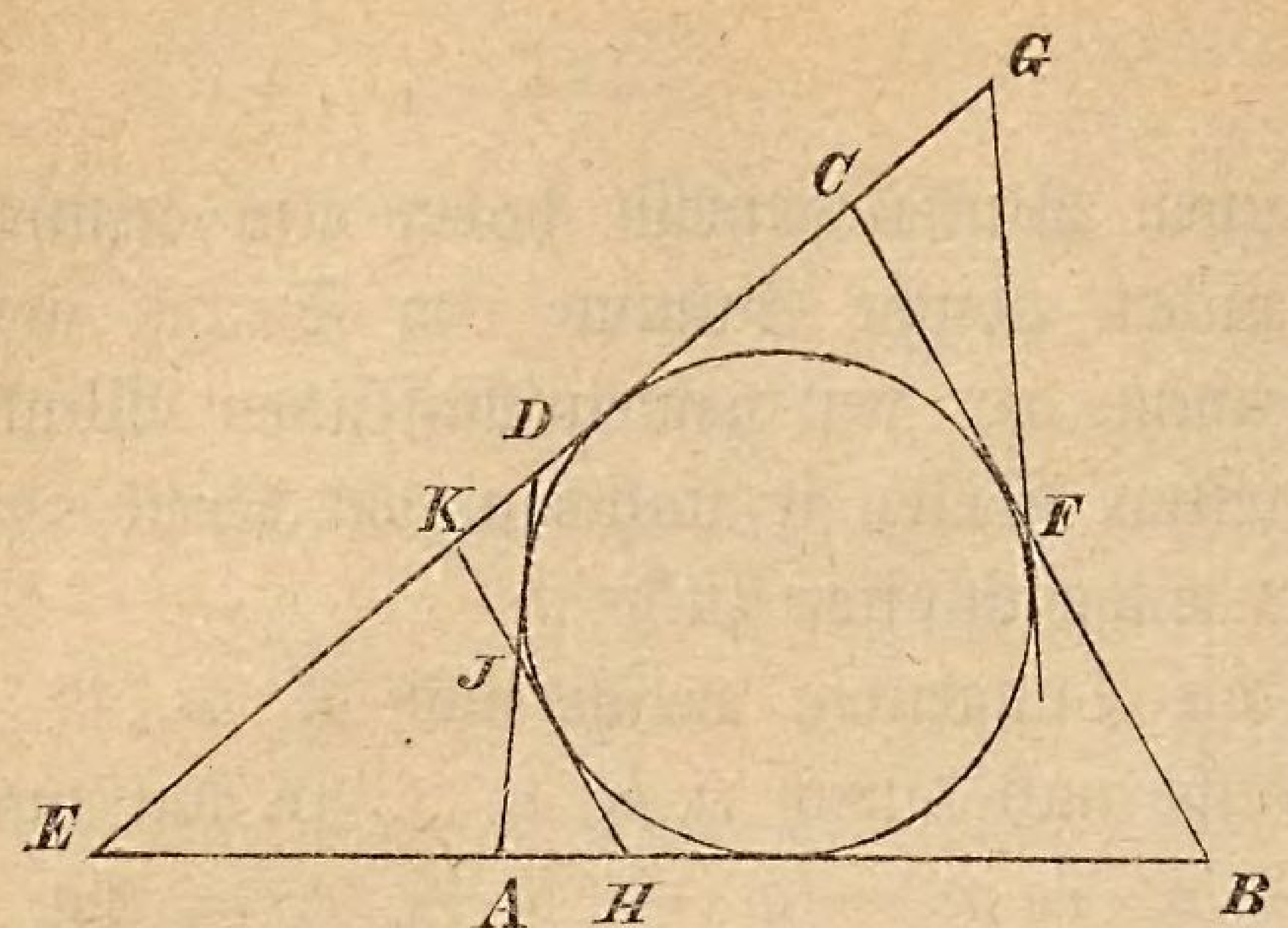

**10.** Wenn ein Viereck einem Kreise umgeschrieben ist und den Kreis einschließt, so ist die Summe von zwei nichtfolgenden Seiten der Summe der beiden andern Seiten gleich.**) Für das umgeschriebene Viereck, welches den Kreis nicht einschließt, gilt derselbe Satz, wenn man die Seiten mit den entgegengesetzten Zeichen nimmt, in Bezug auf welche der Kreis die entgegengesetzte Lage hat.

Beweis. Nach der in (9) angenommenen Bezeichnung ist in dem Viereck $ABCD$ sowohl $AB + CD$, als auch $BC + DA = a + b + c + d$.

---

*) Der entsprechende Satz der Sphärik ist dem Lexell'schen Satze zugeordnet. Stereom. §. 4, 13.

**) Diese Eigenschaft der einem Kreise umgeschriebenen Vierecke und die ähnliche Eigenschaft der Sechsecke, u. s. f. ist von Pitot Mém. de Paris 1725 p. 45 angegeben worden. Auf die nothwendige Modification derselben hat zuerst Steiner Crelle J. 32 p. 305 hingewiesen.




Ebenso ist in dem Viereck *EBFG* sowohl $EB + FG$ als auch $BF + GE = e + b + g - f$.

Dagegen ist in dem Viereck *EHJD* sowohl $EH - JD$ als auch $- HJ + DE = e - h - i - d$, während der Kreis in Bezug auf die Seiten *EH*, *DE* (d. h. in Bezug auf einen diese Seiten zurücklegenden Zuschauer) links, in Bezug auf die Seiten *HJ*, *JD* rechts liegt. Ebenso ist in dem Viereck *EAJK*

$$EA - JK = - AJ + KE,$$

und in dem Viereck *AHKD*

$$AH - KD = - HK + DA.$$

Umgekehrt schließt man: Wenn in einem Viereck die Summe von zwei Seiten der Summe der beiden andern Seiten gleich ist, so ist das Viereck einem Kreise umgeschrieben. Es sei z. B. $EA + AJ = JK + KE$, oder $EA - JK = - AJ + KE$, so berührt *KE* den Kreis, welcher in Bezug auf seine Tangenten *AE* (nicht *EA*), *JK*, *AJ* einerlei Lage hat, und der in der obigen Figur für dieselben rechts liegt. Würde *AE* von der durch *K* gehenden Tangente des erwähnten Kreises in *E'* geschnitten, so wäre $JK + KE' = E'A + AJ$, *KE* verschieden von $KE' \pm E'E$ (§. 3, 2), also $JK + KE$ verschieden von $JK + KE' \pm E'E$, also auch $JK + KE$ verschieden von $E'A + AJ \pm E'E$ und von $EA + AJ$, wider die Voraussetzung.

## §. 5. Von den gleichen und ähnlichen Dreiecken.

**1.** Wenn zwei Dreiecke zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel der Reihe nach gleich haben, so sind sie gleich und ähnlich*), d. h. es sind die Seiten der Dreiecke einander gleich, die den gleichen Winkeln gegenüberliegen; es sind die Winkel gleich, die den gleichen Seiten gegenüberliegen; es sind die Flächen gleich. Eucl. I, 4.

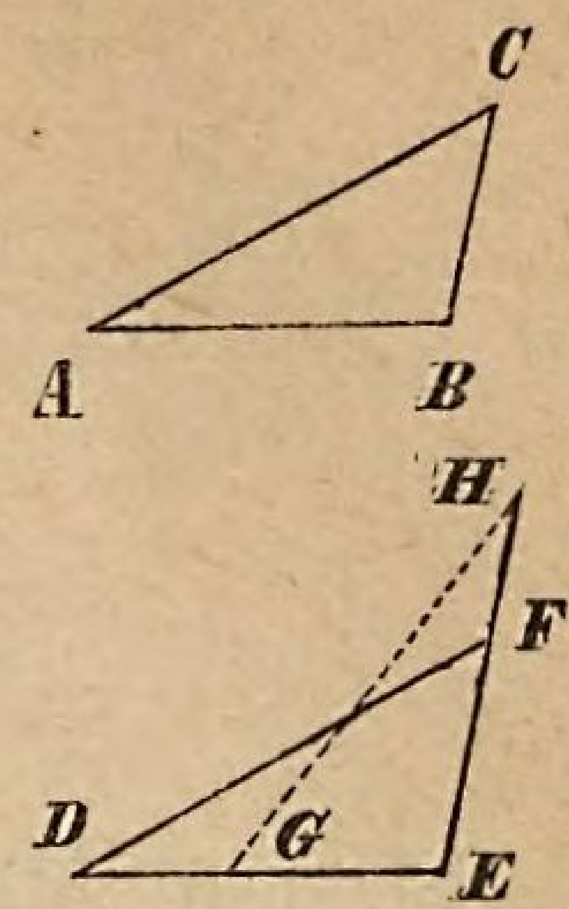
Wenn die Seiten $AB = DE$, $BC = EF$, und der Winkel $CBA = FED$, so sind

$CA = FD$ gegenüber den gleichen Winkeln *CBA* und *FED*,
$ACB = DFE$ „ „ „ Seiten *AB* „ *DE*,

*) Dieser Ausdruck ist von Euclides erst in der Stereometrie (Elem. XI) gebraucht worden. Nach Legendre (Elém. de géom. Note 1) braucht man auch gleich in der Bedeutung von gleich und ähnlich.

$BAC = EDF$ gegenüber den gleichen Seiten $BC$ und $EF$, und die Dreiecke $ABC$, $DEF$ haben gleiche Flächen.

Beweis. Vereint man die gleichen Winkel, so daß $BA$ auf $ED$, $BC$ auf $EF$ fällt, so fällt $A$ auf $D$, $C$ auf $F$, die Gerade $CA$ auf $FD$ (§. 1, 3), die Ebene $ABC$ auf $DEF$ (§. 1, 4). Die congruenten Seiten, Winkel, Flächen sind einander gleich.



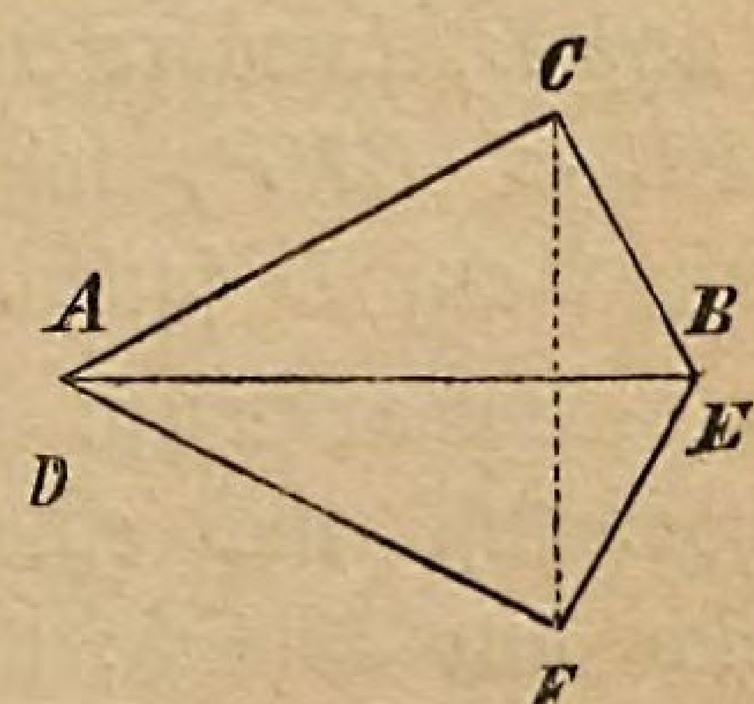

Anmerkung. Dreiecke, welche gleich und ähnlich sind, sind congruent und werden dadurch vereint, daß man das eine entweder in seiner Ebene dreht und fortbewegt, oder erst im Raume umwendet und dann in seiner Ebene dreht und fortbewegt. Z. B. das Dreieck $ABC$ kann in seiner Ebene so fortbewegt werden, daß es das Dreieck $DEF$ deckt; dagegen muß das Dreieck $ABC$ im Raume umgewendet werden, bevor es das Dreieck $HEG$ decken kann, in welchem $HE = AB$, $EG = BC$ und der Winkel $HEG = CBA$ ist. Raumfiguren, welche gleich und ähnlich sind, sind entweder congruent oder incongruent.

Daß die Dreiecke $ABC$ und $DEF$ gleich und ähnlich sind, wird nach Leibniz (Opp. 3 p. 416) durch $ABC \backsimeq DEF$ bezeichnet. Das Zeichen über dem Gleichheitszeichen ist aus dem Anfangsbuchstaben von similis gebildet.

2. Wenn zwei Dreiecke die drei Seiten der Reihe nach gleich haben, so sind sie gleich und ähnlich. Eucl. I, 8.

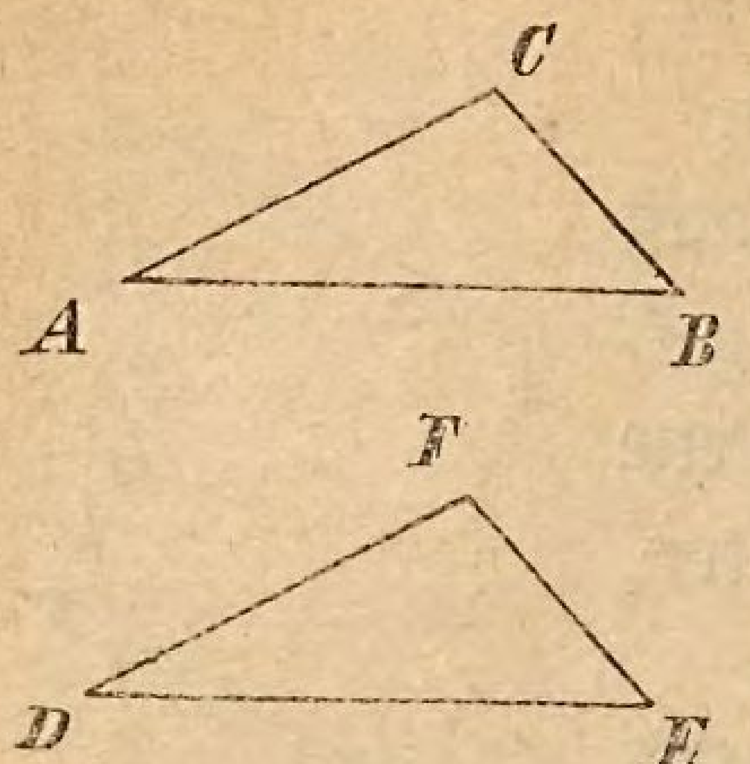
Wenn die Seiten $AB = DE$, $BC = EF$, $CA = FD$, so ist der Winkel $ACB = DFE$ gegenüber den gleichen Seiten $AB$ und $DE$, u. s. w.

Beweis. Vereint man die gleichen Seiten $AB$ und $DE$, so daß $C$ und $F$ auf verschiedene Seiten der gemeinschaftlichen Geraden fallen, so ist in den Dreiecken $ACF$, $BCF$ der Winkel
$ACF = CFA$ gegenüber den gleichen Seiten $AF$, $AC$,
$FCB = BFC$ " " " " $BF$, $BC$,
(§. 3, 1), folglich $ACF + FCB = CFA + BFC$, d. i. $ACB = BFA$. Die Gleichung dieser Winkel in Verbindung mit den Gleichungen der Seiten, welche die gleichen Winkel einschließen, lehrt, daß die Dreiecke gleich und ähnlich sind (1).




3. Wenn zwei Dreiecke zwei Winkel und eine dazu gleichliegende Seite der Reihe nach gleich haben, so sind sie gleich und ähnlich. Eucl. I, 26.

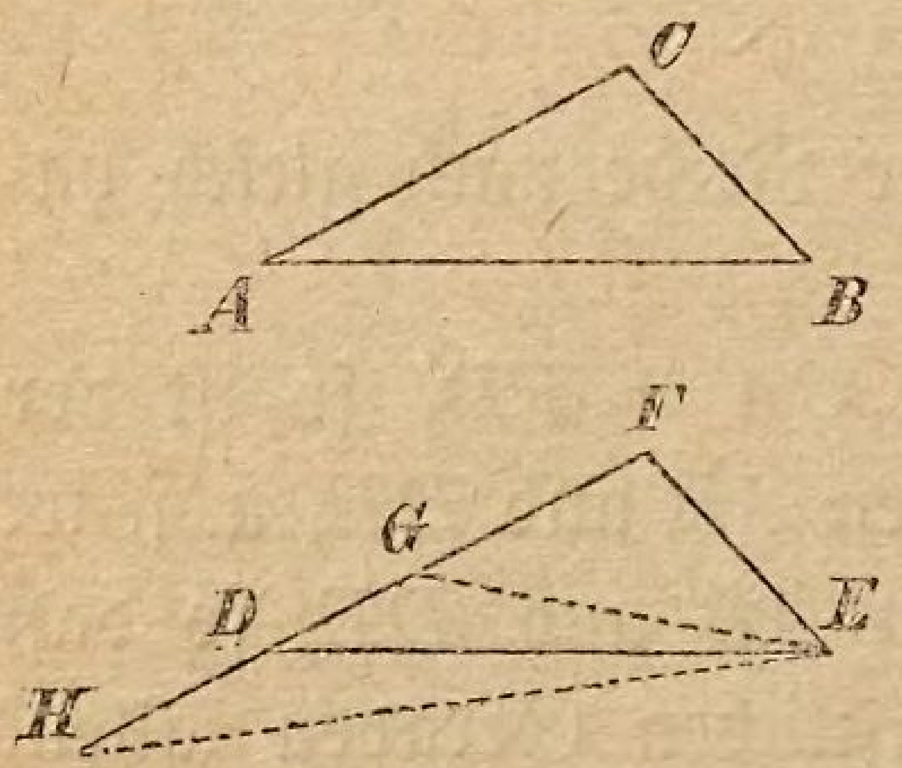
Wenn die Winkel $BAC$, $CBA$ und die an ihnen liegende Seite $AB$ der Reihe nach $EDF$, $FED$ und der an ihnen liegenden Seite $DE$ gleich sind, so ist die Seite $CA = FD$ gegenüber den gleichen Winkeln




$CBA$ und $FED$, u. s. w. Vereint man die gleichen Seiten $AB$, $DE$ und die gleichen Winkel $BAC$, $EDF$, so fällt der Punct $C$ auf $F$; wo nicht, so wären die Winkel $CBA$, $FED$ ungleich. Also ist die Seite $CA = FD$, u. s. w.

Wenn die Winkel $BAC$, $CBA$ und die dem ersten Winkel gegenüberliegende Seite $BC$ der Reihe nach $EDF$, $FED$, $EF$ gleich sind, so sind auch die den gleichen Winkeln $CBA$ und $FED$ gegenüberliegenden Seiten $CA$ und $FD$ einander gleich, u. s. w. Vereint man die Seite $BC$ mit $EF$ und den Winkel $CBA$ mit $FED$, so fällt $CA$ auf $FD$: sonst wären in dem von $CA$ und $FD$ auf $ED$ gebildeten Dreieck ein Winkel und der Nebenwinkel eines andern ungleich (§. 2, 8), mithin $BAC$ und $EDF$ ungleich, gegen die Voraussetzung. Die Gleichheit der dritten Winkel $ACB$ und $DFE$ kann auch daraus geschlossen werden, daß in beiden Dreiecken die Summen der Winkel übereinstimmen.

4. Wenn zwei Dreiecke zwei Seiten und den der größern Seite gegenüberliegenden Winkel der Reihe nach gleich haben, so sind sie gleich und ähnlich.




Wenn $AB > BC$, $AB = DE$, $BC = EF$, $ACB = DFE$, so ist $CA = FD$, u. s. w.

Beweis. Vereint man die gleichen Winkel und die gleichen Seiten $BC$, $EF$, so kann der Punct $A$ nicht neben $D$ fallen. Fiele $A$ auf $G$, so wäre der Winkel $DFE < DGE$ (§. 2, 8), $DGE = EDG$ (§. 3, 1), also $DFE < EDF$, mithin $DE < EF$ gegen die Voraussetzung $AB > BC$. Fiele $A$ auf $H$, so wäre der Winkel $DFE < HDE$, $HDE = EHD$, folglich $HFE < EHF$, mithin $HE < EF$ gegen die Voraussetzung. Also muß $A$ auf $D$ fallen.

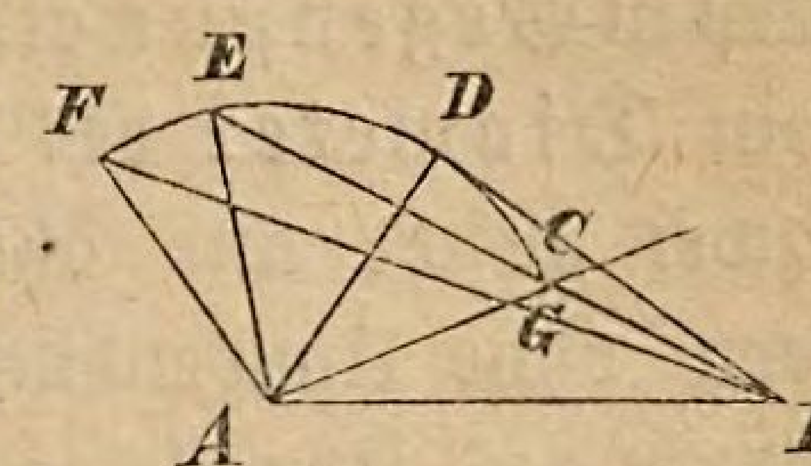
Anmerkung. Wenn insbesondere zwei rechtwinkelige Dreiecke die Hypotenuse und eine Cathete der Reihe nach gleich haben, so sind sie gleich und ähnlich; denn die Hypotenuse ist größer als eine Cathete, und den Hypotenusen liegen gleiche (rechte) Winkel gegenüber (§. 3, 1).

Ein Dreieck ist unzweideutig bestimmt durch 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel, durch die 3 Seiten, durch 2 Winkel und die Seite, welche an den beiden Winkeln liegt oder einem von ihnen gegenüberliegt, durch 2 Seiten und den Winkel, der der größern gegenüberliegt. Zwei Dreiecke können ungleich sein, obgleich sie zwei Seiten und

den der kleinern Seite gegenüberliegenden Winkel der Reihe nach gleich haben.

5. Wenn in einem Dreieck zwei Seiten unverändert bleiben, während der von ihnen eingeschlossene Winkel wächst, so wächst auch die demselben gegenüberliegende Seite. Eucl. I, 24.

Sind die Strecken $AD$, $AE$, $AF$ so lang als $AC$, die Winkel $BAD$, $BAE$, $BAF$ größer als $BAC$, so sind die Strecken $BD$, $BE$, $BF$ länger als $BC$.




Beweis. Die Strecke $AC$ wird von $BD$ außen, von $BE$ in $C$, von $BF$ innen in $G$ geschnitten. Dann ist

$BC + AC < BD + AD$ (§. 3, 2), folglich $BC < BD$;

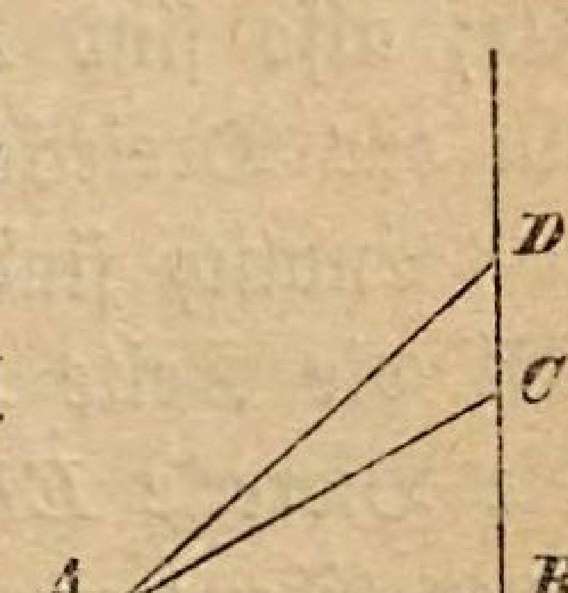
$BC$ ein Theil von $BE$, folglich $BC < BE$;

$BC < BG + GC$, $AF < GF + AG$, folglich

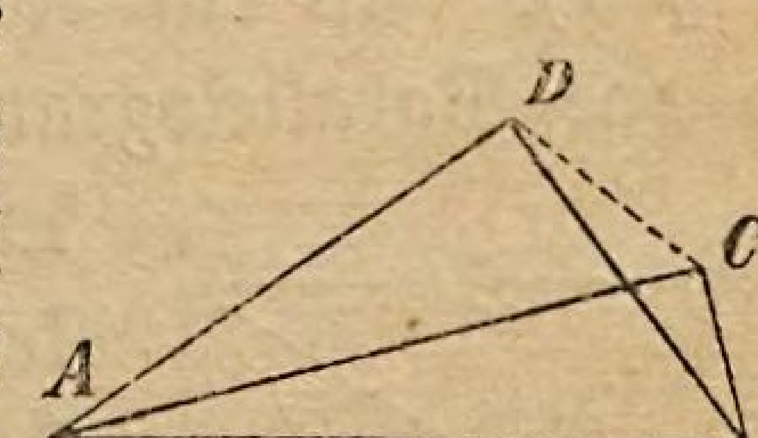
$BC + AF < BF + AC$, $BC < BF$.

Umgekehrt schließt man: Wenn in einem Dreieck zwei Seiten unverändert bleiben und die dritte Seite wächst, so wächst auch der ihr gegenüberliegende Winkel.

6. I. Wenn in einem rechtwinkeligen Dreieck eine Cathete unverändert bleibt, und ein anliegender Winkel wächst, so wächst sowohl die andere Cathete als auch die Hypotenuse. Die rechtwinkeligen Dreiecke $ABC$, $ABD$ haben die Cathete $AB$ gemein, den Winkel $BAD > BAC$. Dann ist $BD > BC$, und $AD > AC$ gegenüber dem stumpfen Winkel $DCA$ des Dreiecks $ACD$.




II. Wenn die Hypotenuse unverändert bleibt und ein anliegender Winkel wächst, so wächst die ihm gegenüberliegende Cathete und die andere Cathete nimmt ab. Die rechtwinkeligen Dreiecke $ABC$, $ABD$ haben die Hypotenuse $AB$ gemein, den Winkel $BAD > BAC$. Dann ist der Winkel $DBA < CBA$, weil der Punct $C$ nicht auf die Seite $BD$ oder in das Dreieck $ABD$ fallen kann, ohne daß der Winkel $ACB > ADB$ wäre (§. 2, 8). Die Winkel $DCB$ und $ADC$ sind stumpf, weil größer als $ACB$ und $ADB$. Daher ist sowohl $DB > BC$, als auch $AD < AC$.

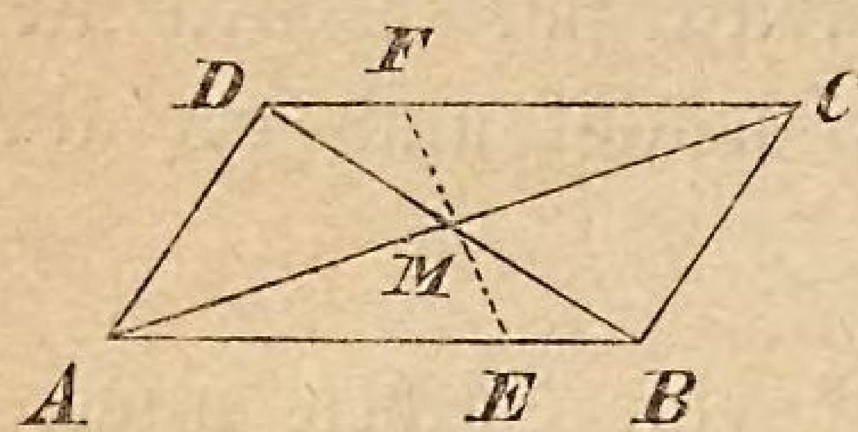



## §. 6. Die besonderen Vierecke.

1. Ein Viereck, dessen gegenüberliegende Seiten parallel sind, heißt ein Parallelogramm (παραλληλόγραμμον). Das Parallelogramm

wird von einer Diagonale in zwei gleiche und ähnliche Dreiecke getheilt, von denen eines das andere ohne vorherige Umwendung deckt. Die gegenüberliegenden Seiten sind gleich. Die Diagonalen halbiren einander. Ihr Durchschnittspunct heißt das Centrum des Parallelogramms; eine durch das Centrum gezogene Gerade schneidet die gegenüberliegenden Seiten in Gegenpuncten; die zwischen Gegenpuncten enthaltene Strecke ist ein Diameter des Parallelogramms, weil sie das Parallelogramm in zwei gleiche und ähnliche Theile zerschneidet, von denen einer den andern ohne Umwendung deckt. Die Mitten aller Diameter sind im Centrum des Parallelogramms vereint. Eucl. I, 34.

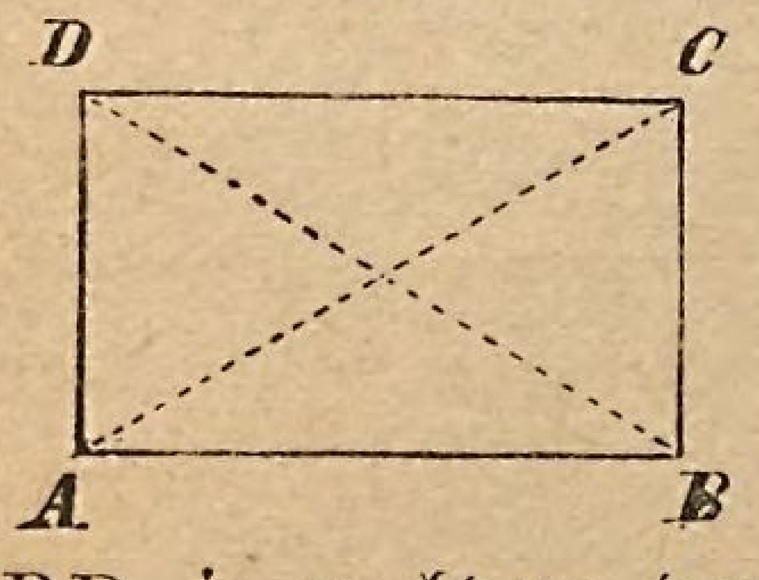
Beweis. Die Dreiecke $ABC$, $CDA$ sind gleich und ähnlich (§. 5, 3), weil die Seite $CA = AC$ und die Winkel $BAC = DCA$, $ACB = CAD$ als Wechselwinkel der Parallelen mit $AC$ (§. 2, 7). Vereint man die gleichen Winkel $BAC$ und $DCA$, so decken sich die Dreiecke $ABC$ und $CDA$. Die gegenüberliegenden Seiten $AB$ und $CD$, $BC$ und $DA$ sind einander gleich, gegenüber den gleichen Winkeln der Dreiecke.




Ferner sind die Dreiecke $ABM$, $CDM$ gleich und ähnlich (§. 5, 3), weil die Seite $AB = CD$ und die Winkel $BAM = DCM$, $MBA = MDC$ als Wechselwinkel der Parallelen mit $AC$ und $BD$; also sind $BM = MD$, $AM = MC$, gegenüber den gleichen Winkeln der Dreiecke.

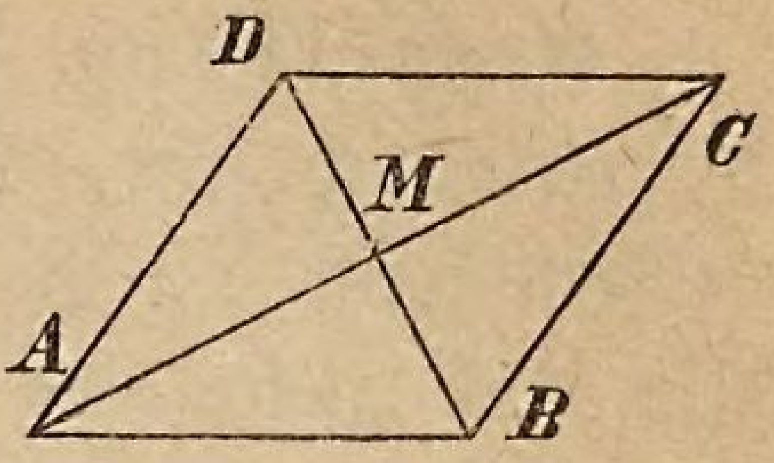
Endlich sind die Dreiecke $AEM$, $CFM$ gleich und ähnlich (§. 5, 3), weil die Seite $AM = CM$ u. s. w., daher $AE = CF$, $EM = MF$. Die Vierecke $EBCF$, $FDAE$ decken sich, wenn man eines derselben in seiner Ebene um $M$ gedreht hat, bis $EF$ mit $FE$ zusammenfällt.

2. Je zwei auf einander folgende Winkel des Parallelogramms sind supplementär, je zwei gegenüberliegende Winkel sind einander gleich (§. 2, 7). Ist ein Winkel recht, so sind auch die übrigen Winkel recht, und das Parallelogramm heißt ein Rectangel (ὀρθογώνιον, rectangulum, oblongum). Die Diagonale der spitzen Winkel ist größer als die Diagonale der stumpfen Winkel; die Diagonalen des Rectangels sind einander gleich. Denn in den Dreiecken $ABC$, $BAD$ ist $BC = AD$, folglich $AC$ größer, eben so groß, kleiner als $BD$, je nachdem der Winkel $CBA$ größer, eben so groß, kleiner als $BAD$ (§. 5, 5).




Wenn zwei folgende Seiten eines Parallelogramms gleich sind, so ist das Parallelogramm gleichseitig (1) und wird ein Rhombus (ῥόμ-

$\beta o\varsigma$, losange, Raute) genannt. Der rechtwinkelige Rhombus ist ein reguläres Viereck (§. 1, 8) und heißt ein Quadrat ($\tau\varepsilon\tau\varrho\acute{\alpha}\gamma\omega\nu o\nu$, quadratum). Eine Diagonale des Parallelogramms bildet mit den größeren Seiten die kleinern Winkel, auf den größern Seiten stehn die größern Winkel am Centrum; die Diagonalen des Rhombus halbiren die Winkel des Rhombus und sind normal zu einander. Wenn die Seite *BC* größer, eben so groß, kleiner ist als die Seite *AB*, so ist der Winkel *BAC* größer, eben so groß, kleiner als *ACB* oder *CAD* (§. 3, 1), und der Winkel *BMC* größer, eben so groß, kleiner als *AMB* (§. 5, 5).



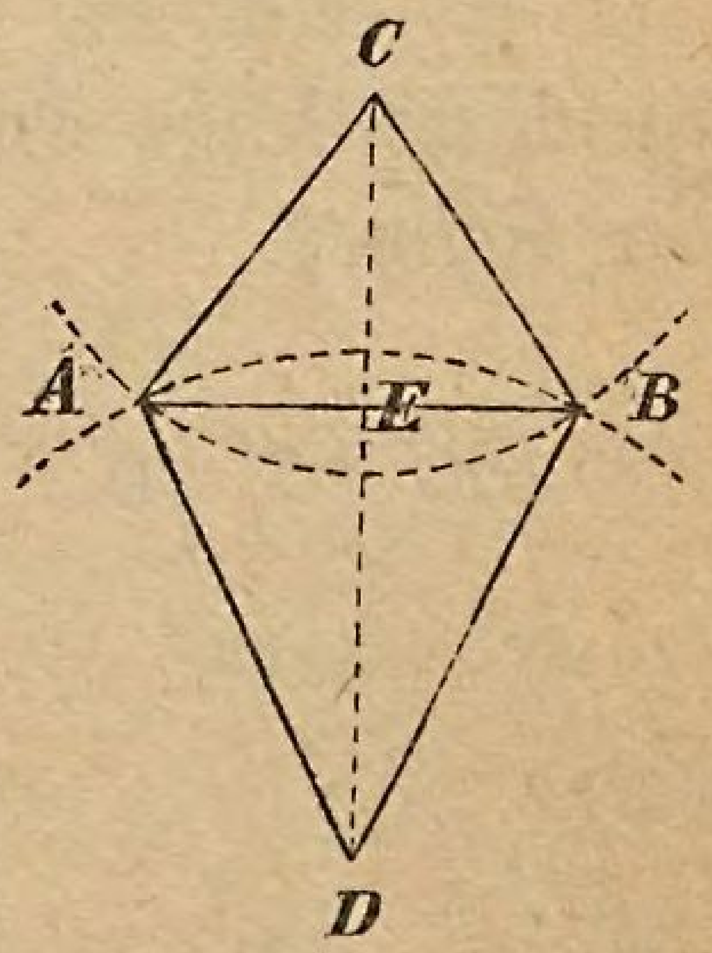

3. Wenn in einem Viereck, dessen Perimeter sich selbst nicht schneidet, ein Paar gegenüberliegende Seiten parallel und gleich sind, oder wenn die gegenüberliegenden Seiten einander gleich sind, oder wenn die Diagonalen einander halbiren, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Beweis. Wenn *AB* und *CD* parallel und gleich, mithin die Winkel *BAC* und *DCA* einander gleich sind, so sind die Dreiecke *ABC*, *CDA* gleich und ähnlich (§. 5, 1), d. h. der Winkel *ACB* = *CAD*, gegenüber den gleichen Seiten *AB*, *CD*. Die Geraden *BC*, *DA*, welche mit *AC* gleiche Wechselwinkel bilden, sind parallel (§. 2, 7).

Wenn *AB* = *CD*, *BC* = *DA*, so sind die Dreiecke *ABC*, *CDA* gleich und ähnlich (§. 5, 2). Aus der Gleichheit der Winkel *BAC*, *DCA* schließt man, daß *AB* und *CD* parallel sind, u. s. w.

Wenn *AM* = *MC*, *BM* = *MD*, so sind die Dreiecke *ABM*, *CDM* gleich und ähnlich (§. 5, 1). Aus der Gleichheit der Winkel *BAM*, *DCM* schließt man, daß *AB* und *CD* parallel sind, u. s. w.

4. Die Gerade, welche die Spitzen von zwei gleichschenkeligen Dreiecken auf einer gemeinschaftlichen Basis verbindet, halbirt die Winkel an den Spitzen, halbirt die gemeinschaftliche Basis und ist normal zu derselben.

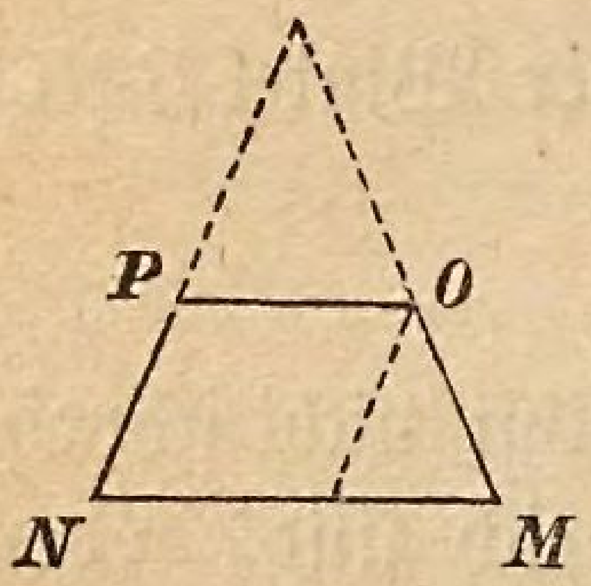



Wenn *AC* = *BC*, *AD* = *BD*, so ist der Winkel *ACD* = *DCB*, *CDA* = *BDC*, und *AB* wird von *CD* in *E* so geschnitten, daß *AE* = *EB*, *CEA* = $90^0$.

Beweis. In den Dreiecken *ACD*, *BCD* ist *CA* = *BC*, *AD* = *DB*, *CD* = *CD*, folglich (§. 5, 2) *ACD* = *DCB* gegenüber den gleichen Seiten *AD* und *DB*, *CDA* = *BDC* gegenüber den gleichen Seiten *CA* und *BC*. In den Dreiecken *AEC*, *BEC* ist *EC* = *EC*, *CA* = *CB*, der Winkel *ACE* = *ECB*,

folglich (§. 5, 1) $AE = EB$ gegenüber den gleichen Winkeln $ACE$ und $ECB$, der Winkel $CEA = BEC$ gegenüber den gleichen Seiten $CA$ und $BC$. Die gleichen Nebenwinkel $CEA$ und $BEC$ sind rechte Winkel (§. 2, 2).

Anmerkung. Das Viereck $ACBD$, in dem zweimal zwei folgende Seiten gleich sind, verdient den Namen Rhomboid (ῥομβοειδές), durch welchen sonst ein Parallelogramm bezeichnet wird, das weder gleichwinkelig noch gleichseitig ist.




Das Viereck $NMOP$, in dem zwei nichtfolgende Seiten parallel (nicht gleich), die beiden andern gleich (nicht parallel) sind, verdient den Namen Trapez (τραπέζιον), durch den sonst ein Viereck bezeichnet wird, wenn es kein Parallelogramm ist, oder wenn es ein Paar parallele Seiten hat. Dieses Viereck wird auch Antiparallelogramm genannt.

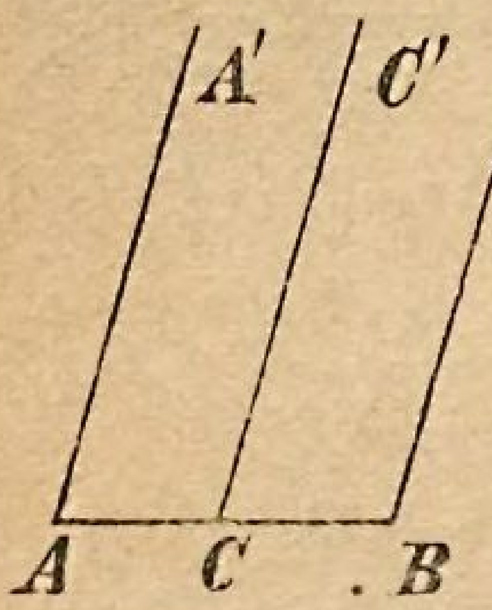
Rhomboid und Trapez decken sich selbst nach vorheriger Umwendung im Raume und gehören zur Classe der symmetrischen Figuren (§. 7, 7).

5. Der vorstehende Satz lehrt die Construction der Halbirenden eines Winkels, der Mitte einer Strecke, der Normale einer Geraden. Eucl. I, 9 ff.

a. Um den Winkel $ACB$ zu halbiren, schneidet man von ihm ein gleichschenkeliges Dreieck ab, dessen Basis $AB$ dem gegebenen Winkel gegenüber liegt. Auf dieselbe Basis stellt man ein anderes gleichschenkeliges Dreieck $ABD$ und zieht die Gerade $CD$ durch die Spitzen. Die Halbirenden von Nebenwinkeln sind normal zu einander.

Die Halbirende eines Centriwinkels trifft die Mitte des eingeschlossenen Bogens.

b. Um die Strecke $AB$ zu halbiren, stellt man auf dieselbe zwei gleichschenkelige Dreiecke $ABC$, $ABD$, und zieht die Gerade $CD$ durch die Spitzen.




Um den Streifen $A'ABB'$ zu halbiren, construirt man die Mitte $C$ der Strecke $AB$, und zieht die Gerade $CC'$ parallel mit $AA'$. Dann sind die Streifen $A'ACC'$, $C'CBB'$ congruent (§. 2, 7).

c. Um die Normale der Geraden $AB$ durch $E$ zu ziehn (errichten), wählt man $A$ und $B$ in gleichen Abständen von $E$, stellt auf $AB$ ein gleichschenkeliges Dreieck $ABC$, und zieht die Gerade $EC$ durch die Spitze.

d. Um die Normale der Geraden $AB$ durch $C$ zu ziehn (fällen),

wählt man $A$ und $B$ in gleichen Abständen von $C$, stellt auf $AB$ ein anderes gleichschenkeliges Dreieck $ABD$, und zieht die Gerade $CD$.

6. Im gleichschenkeligen Dreieck

ist die Halbirende des Winkels an der Spitze normal zur Basis und halbirt dieselbe,

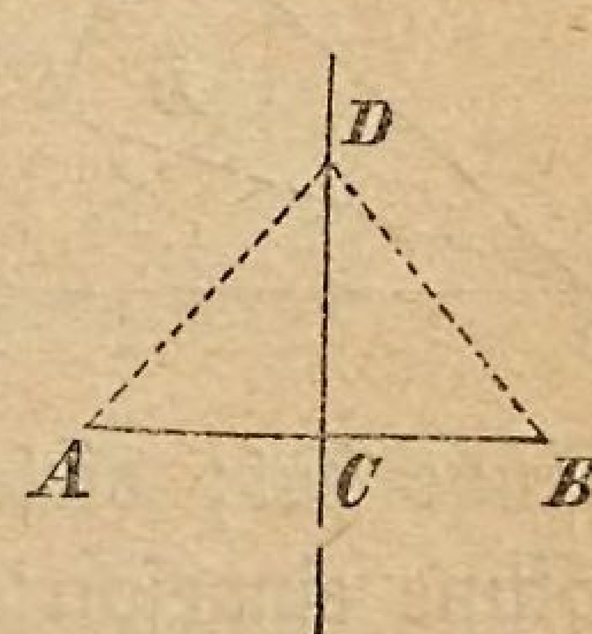
ist die Gerade von der Spitze nach der Mitte der Basis normal zur Basis und halbirt den Winkel an der Spitze,

geht die Normale der Basis aus der Mitte derselben durch die Spitze,

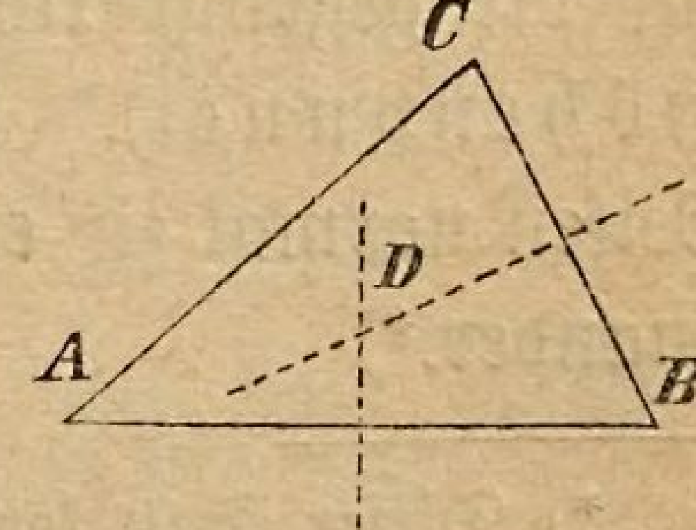
geht die Normale der Basis aus der Spitze durch die Mitte der Basis.

Beweis. Wenn $AC = CB$, der Winkel $ACE = ECB$, so ist $ACE \cong BCE$ (§. 5, 1). Wenn $AC = CB$, $AE = EB$, so ist $ACE \cong BCE$ (§. 5, 2). Eine Gerade aus der Mitte der Basis, welche nicht durch die Spitze geht, ist nicht normal zur Basis. Eine Gerade aus der Spitze, welche nicht durch die Mitte der Basis geht, ist nicht normal zur Basis.

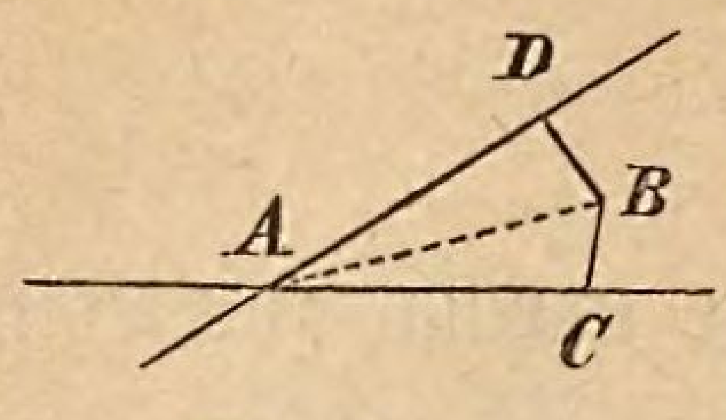
7. Ein Punct, der von 2 gegebenen Puncten gleiche Abstände hat, liegt auf der Geraden, welche die Strecke der gegebenen Puncte normal halbirt. Wenn $AC = CB$, so ist $AD$ eben so groß oder größer als $BD$, jenachdem Winkel $DCA$ eben so groß oder größer als $BCD$ (§. 5, 1. 5). Oder: die Centren der Kreise, welche eine gemeinschaftliche Sehne haben (durch 2 gegebene Puncte gehn), liegen auf der Geraden, welche die gemeinschaftliche Sehne normal halbirt.




Die Geraden, welche die Seiten eines Dreiecks normal halbiren, haben einen Punct gemein, der von den Eckpuncten gleiche Abstände hat, das Centrum des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises (Eucl. IV, 5). Wenn $AD = BD$, $BD = CD$, so ist $AD = CD$ und die Gerade, welche $AC$ normal halbirt, geht durch $D$ (6). Der Centriwinkel $ADB$ ist zweimal so groß als der Peripheriewinkel $ACB$, also gleich $180^0$ oder mehr als $180^0$, wenn $ACB$ recht oder stumpf ist. Ein Kreis ist durch 3 Puncte bestimmt; wenn die gegebenen Puncte auf einer Geraden liegen, so ist das Centrum unendlich fern (§. 2, 7) und der Kreis unterscheidet sich nicht von der Geraden, auf der die gegebenen Puncte liegen.

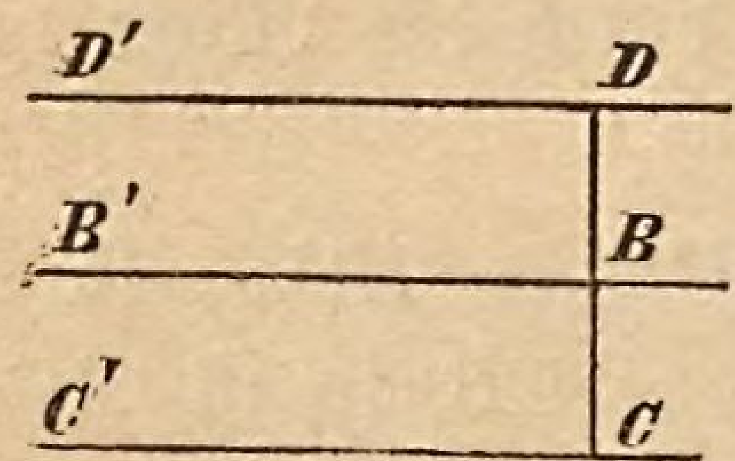


8. Ein Punct, der von 2 gegebenen Geraden gleiche Abstände hat, liegt auf den Geraden, welche die Winkel der Geraden halbiren.



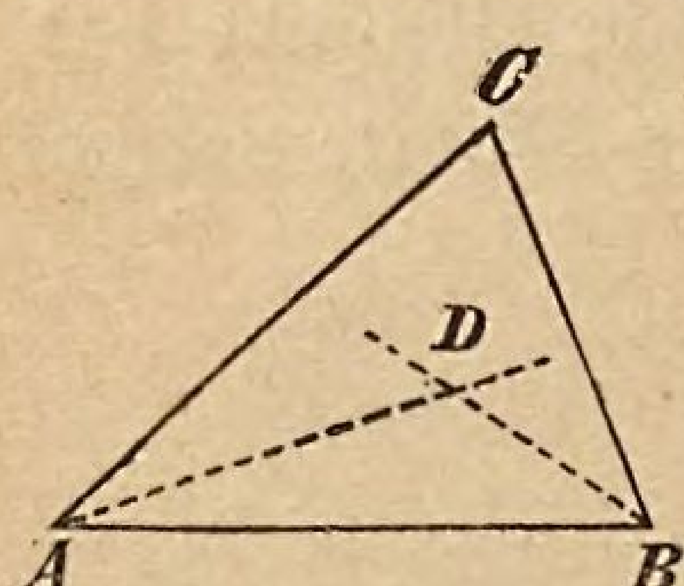

Die Normale $BC$ ist eben so groß oder größer als die Normale $BD$, je nachdem der Winkel $CAB$ eben so groß oder größer als $BAD$ (§. 5, 6). Oder: Die Centren der Kreise, welche einem gegebenen Winkel eingeschrieben sind (2 Gerade berühren), liegen auf der Halbirenden des Winkels.

Wenn insbesondere die Geraden parallel sind, so liegt ein Punct, der von ihnen gleiche Abstände hat, auf der Geraden, welche den Streifen halbirt.




Die Normale $BC$ ist eben so groß oder größer als die Normale $BD$, je nachdem der Streifen $C'CBB'$ eben so groß oder größer als der Streifen $B'BDD'$.

Die Geraden, welch die Winkel eines Dreiecks halbiren, haben einen Punct gemein, der von den Seiten des Dreiecks gleiche Abstände hat, das Centrum des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises (Eucl. IV, 4). Wenn $D$ auf der Halbirenden des Winkels $BAC$ und auf der Halbirenden des Winkels $CBA$ liegt, so hat $D$ sowohl von $CA$ und $AB$, als auch von $AB$ und $BC$



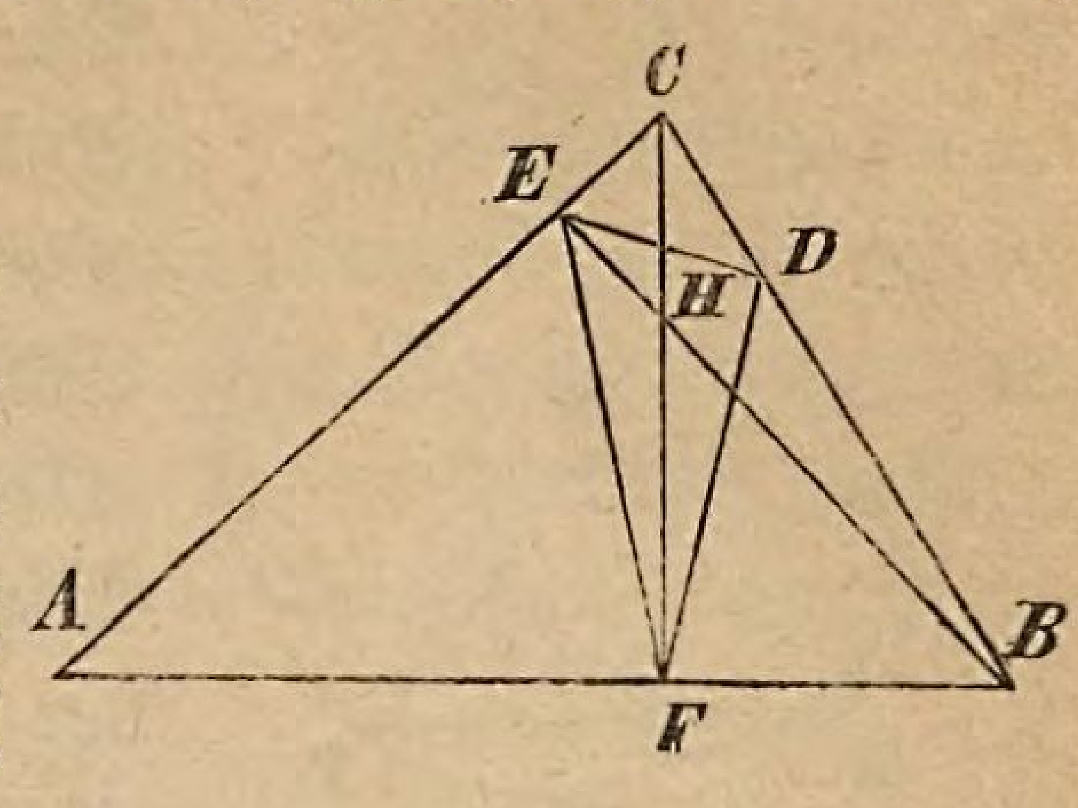

gleiche Abstände; also hat $D$ von $BC$ und $CA$ gleiche Abstände und liegt auf der Halbirenden des Winkels $ACB$. Ebenso haben die Geraden, welche einen Winkel des Dreiecks und die an der gegenüberliegenden Seite liegenden Außenwinkel halbiren, je einen Punct gemein, der von den Seiten des Dreiecks gleiche Abstände hat; diese Puncte sind die Centren der dem Dreieck im weitern Sinne eingeschriebenen Kreise. Ein Kreis ist durch 3 Gerade, die ihn berühren, 4deutig bestimmt; wenn die Geraden einen endlich oder unendlich fernen Punct gemein haben, so fallen die berührten Kreise in den gemeinschaftlichen Punct zusammen.

9. Die Höhen eines Dreiecks d. h. die Normalen aus den Spitzen auf die gegenüberliegenden Seiten haben einen gemeinschaftlichen Punct (Höhenpunct). Oder: Wenn in einem Viereck die gegenüberliegenden Seiten normal zu einander sind, so sind auch die Diagonalen normal zu einander.*)

*) Dieser Satz kommt in dem 5ten der Archimedeischen Lemmen vor, die dazu vorhandenen Scholien enthalten den ersten der hier gegebenen Beweise. Als Eigenschaft des Vierecks $ABHC$ wird derselbe Satz von Carnot géom. de pos. 130 ausgesprochen. Der zweite Beweis, dadurch bemerkenswerth, daß er unabhängig ist von der Summe der Winkel eines Dreiecks und auch für das sphärische Dreieck gilt,

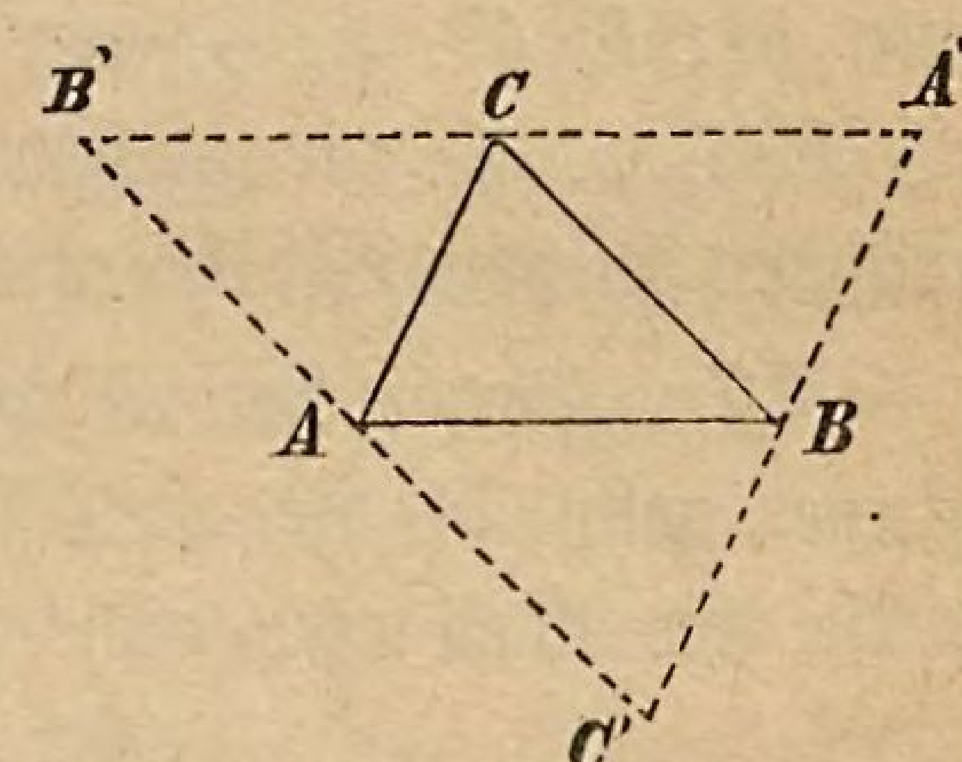
Beweis 1. Die Höhen $BE$, $CF$ schneiden sich in $H$. Dann liegen $B$, $C$, $E$, $F$ und $A$, $E$, $F$, $H$ auf je einem Kreise (§. 4, 3), und es ist

$$2CBA = 2CBF = 2CEF$$
$$2BAH = 2FAH = 2FEH$$




daher $2(CBA + BAH) = 2(CEF + FEH)$ $= 2CEH = 2CEB = 180^0$, also ist der dritte Winkel des von $AB$, $BC$, $HA$ gebildeten Dreiecks recht. Eine durch $A$ und nicht durch $H$ gehende Gerade ist nicht normal zu $BC$.

Beweis 2. Zieht man $ED$ und $FD$ so, daß $H$ von den Geraden $DE$, $EF$, $FD$ gleiche Abstände hat (8), so haben auch $A$, $B$, $C$ von denselben Geraden gleiche Abstände, weil $AF$ und $AE$ zu $HF$ und $HE$ normal sind. Daher liegt $A$ auf der Geraden $HD$, und $HD$ ist normal sowohl zu $DB$ als auch zu $DC$, so daß $D$ auf der Geraden $BC$ liegt. Also ist $AH$ normal zu $BC$, und eine durch $A$ und nicht durch $H$ gehende Gerade ist nicht normal zu $BC$.




Beweis 3. Dem Dreieck $ABC$ werde durch Gerade, die mit je einer Seite parallel sind, das Dreieck $A'B'C'$ umgeschrieben. Dann ist $A'C = BA = CB'$ (1), u. s. w. Die Höhen des Dreiecks $ABC$ sind die Geraden, durch die die Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ normal halbirt werden, und gehn durch einen Punct, das Centrum des dem Dreieck $A'B'C'$ umgeschriebenen Kreises (7).

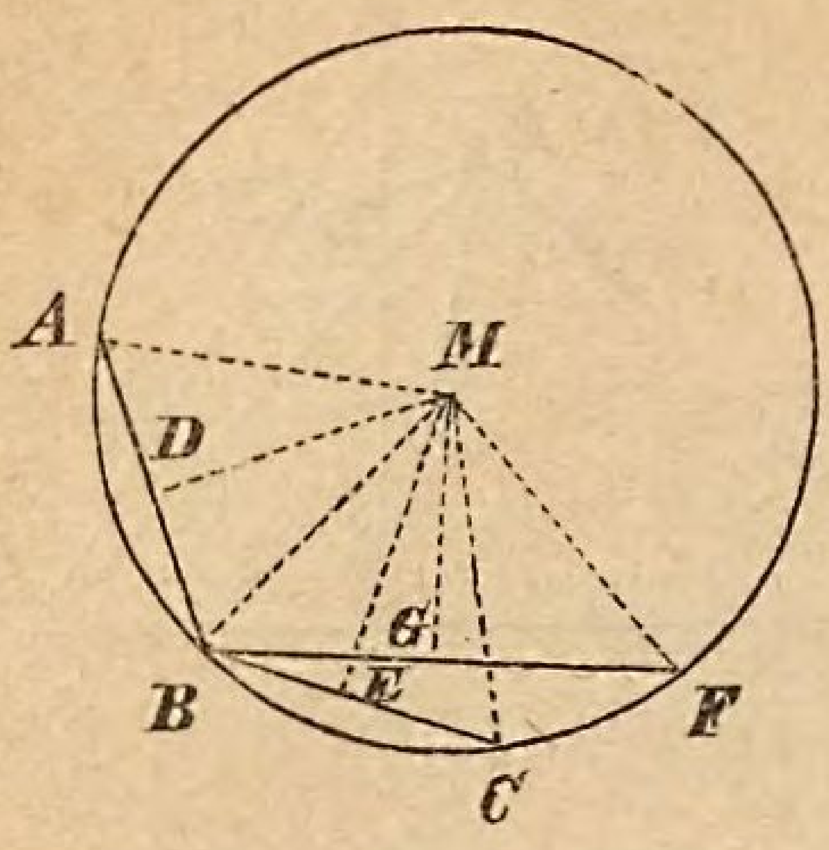
**10.** Gleiche Sehnen theilen auf einem Kreise gleiche Bogen ab, bilden mit dem Kreise gleiche Winkel, haben vom Centrum gleiche Abstände und berühren einen concentrischen Kreis. Wenn die Sehne wächst, so wächst ihr kleinerer Bogen und der Winkel des Segments, während ihr Abstand vom Centrum abnimmt. Eucl. III, 15.

Beweis. Sind die Sehnen $AB$, $BC$ einander gleich, so sind die Dreiecke $ABM$, $BCM$ gleich und ähnlich (§. 5, 2), d. h. die Winkel

---

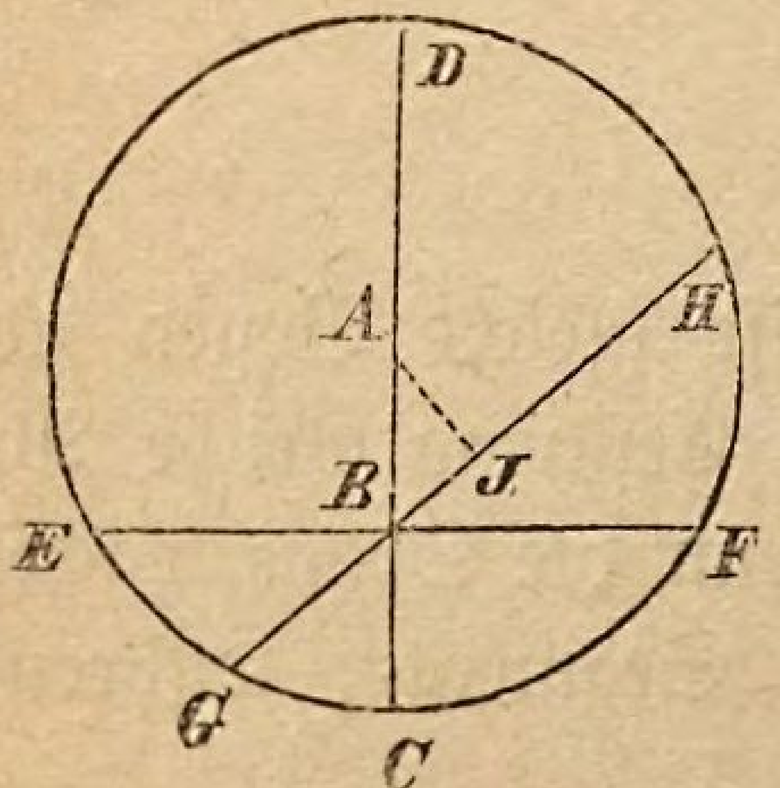
ist von Gudermann niedere Sphärik 68 gegeben worden. Daß jeder der Puncte $H$, $A$, $B$, $C$ von den Seiten des Dreiecks $DEF$ der Fußpuncte gleiche Abstände hat, war von Feuerbach (das geradlinige Dreieck 1822 §. 24) bemerkt worden. Die Gleichheit der Kreise $ABC$, $ABH$, $BCH$, $CAH$, welche durch Vergleichung der Winkel $AHB$, $BHC$, $CHA$ mit den Winkeln des Dreiecks $ABC$ erkannt wird, ist bei Carnot a. a. O. erwähnt. Der dritte Beweis rührt von Gauß her und ist mitgetheilt in Schumachers Uebers. von Carnot's géom. de pos. II p. 363.

*AMB*, *BMC* sind einander gleich; also sind auch die von den gleichen Centriwinkeln eingeschlossenen Bogen *AB*, *BC* einander gleich (§. 1, 6).



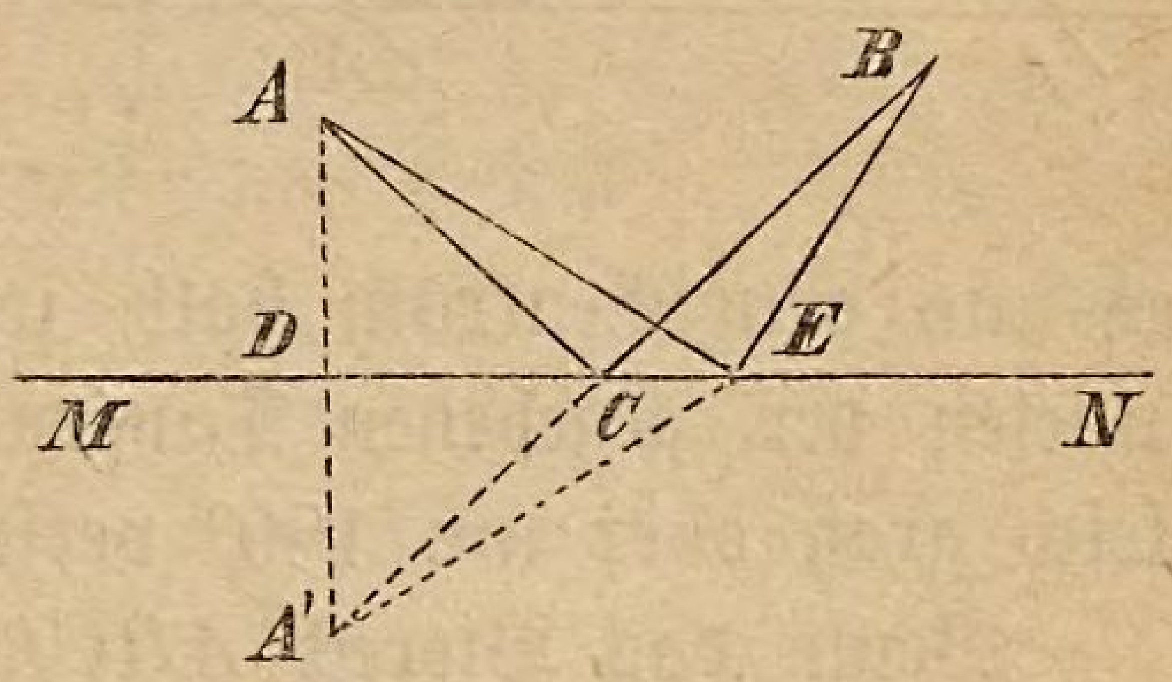

Die Normalen aus *M* zu den Sehnen *AB*, *BC* treffen die Mitten derselben (3), also sind *AD*, *BE* einander gleich als Hälften gleicher Sehnen, mithin die rechtwinkeligen Dreiecke *ADM*, *BEM* gleich und ähnlich. Die gleichen Winkel *AMD*, *BME* sind den spitzen Winkeln der Sehnen mit dem Kreise gleich, weil *MA*, *MB* normal zum Kreise und *MD*, *ME* normal zu den Sehnen (§. 2, 7). Die gleichen Catheten *DM*, *EM* sind die Abstände der Sehnen vom Centrum; der concentrische Kreis, dessen Radius *MD* ist, wird von *AB* und *BC* berührt (§. 3, 4). Wenn ferner die Sehne *BF* länger ist als *BC*, so ist in den Dreiecken *MBF*, *MBC* der Winkel $BMF > BMC$ (§. 5, 5). Zieht man noch *MG* normal zu *BF*, so ist *BG* die Hälfte von *BF*, und $BG > BE$. Hieraus folgt, daß in den rechtwinkeligen Dreiecken *MBG* und *MBE* (§. 5, 6) der Winkel $BMG > BME$ und die Cathete $GM < EM$, d. h. die größere Sehne *BF* schneidet den Kreis unter einem größern spitzen Winkel und hat einen kleinern Abstand vom Centrum.

**11.** Unter den Sehnen des Kreises, welche durch einen gegebenen Punct gehn, ist die größte der Diameter, dessen Abstand vom Centrum 0 ist, die kleinste diejenige, welche normal zu dem erwähnten Diameter ist und deren Abstand vom Centrum dem Abstand des gegebenen Punctes vom Centrum gleich kommt.




Gehn durch *B* der Diameter *CD*, die Sehne *EF* normal zu *CD*, und eine andere Sehne *GH*, zu welcher aus dem Centrum die Normale *AJ* gezogen worden, so ist *B* die Mitte von *EF*, *J* die Mitte von *GH*. Nun ist $GJ < GA$, folglich $GH < CD$. In den rechtwinkeligen Dreiecken *AGJ*, *AEB* ist $AG = AE$, $AJ < AB$, folglich $GJ > EB$ oder $GH > EF$ (§. 5, 6). Die Mitten der Sehnen, welche durch einen gegebenen Punct gehn, liegen auf einem bestimmten Kreise, von welchem das Centrum des gegebenen Kreises und der gegebene Punct Gegenpuncte sind. Ist *A* das Centrum des Kreises, *B* der gegebene Punct, *J* die Mitte einer durch *B* gezogenen Sehne, so ist der Winkel *AJB* recht, mithin *J* ein Punct des Kreises, dessen Diameter *AB* ist (§. 4, 3). Die Mitten von parallelen Sehnen liegen auf dem Diameter, der zu den Sehnen normal ist (auf einem Kreise, von dem ein Punct unendlich fern ist).

**12.** Zwei Puncte liegen symmetrisch zu einer Geraden, wenn die Strecke zwischen den Puncten von der Geraden normal halbirt wird. Insbesondere liegen die Durchschnittspuncte von 2 Kreisen symmetrisch zu der Geraden, welche die Centren verbindet (4). Die Durchschnittspuncte eines Kreises und einer Geraden liegen symmetrisch zur Normale der Geraden aus dem Centrum des Kreises (6). Die Berührungspuncte von 2 Tangenten eines Kreises liegen symmetrisch zu der Geraden, welche aus dem Centrum nach dem Durchschnittspunct der Tangenten geht (§. 4, 8).




Wenn die Gerade $MN$ und auf einer Seite derselben die Puncte $A$, $B$ gegeben sind, und auf der Geraden $MN$ ein Punct gesucht wird, aus welchem nach $A$ und $B$ Gerade sich ziehen lassen, die mit $MN$ gleiche Winkel einschließen, so construirt man den Punct $A'$, welcher mit $A$ zu $MN$ symmetrisch liegt, und findet den gesuchten Punct $C$ als Durchschnitt von $MN$ und $A'B$. Denn die Dreiecke $ADC$, $A'DC$ sind gleich und ähnlich, und der Winkel $ACD = DCA'$. Nun ist $DCA' = NCB$ als Scheitelwinkel, folglich $ACM = NCB$. Der gefundene Punct ist vor allen Puncten der Geraden $MN$ dadurch ausgezeichnet, daß die Summe seiner Abstände von den gegebenen Puncten am kleinsten ist*), daß also $AC + CB < AE + EB$, wenn $E$ irgend ein anderer Punct von $MN$ ist. In der That ist $AC = A'C$, $AE = A'E$, $A'C + CB < A'E + EB$ (§. 3, 2). Dagegen erreicht die Differenz $A'E - BE$ oder $AE - BE$ ihren größten Werth $AB$, wenn $E$ mit dem Durchschnitt der Geraden $MN$ und $AB$ zusammenfällt.

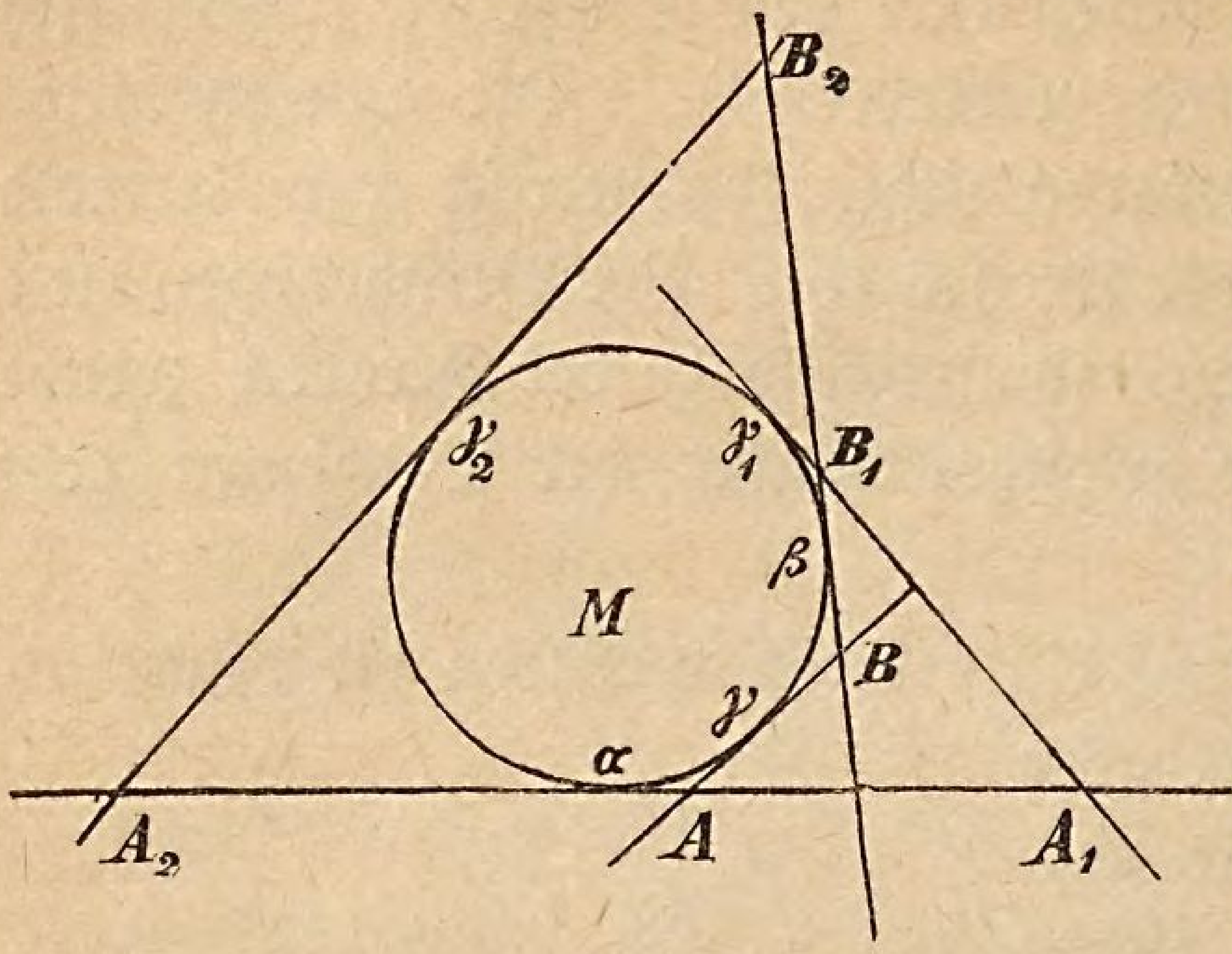
Die Fußpuncte der Höhen eines spitzwinkeligen Dreiecks bestimmen ein dem gegebenen Dreieck eingeschriebenes Dreieck von der Art, daß jedesmal die durch einen Eckpunct gehenden Seiten mit der durch denselben Eckpunct gehenden Seite des gegebenen Dreiecks entgegengesetzt gleiche Winkel bilden (9). Das Dreieck der Fußpuncte hat unter den dem gegebenen Dreieck einschreibbaren Dreiecken den kleinsten Perimeter, weil die Verschiebung eines seiner Eckpuncte mit einer Vermehrung des Perimeters verbunden ist.

**13.** Wenn zwei Gerade den Kreis, dessen Centrum $M$, in $\alpha$ und

---

*) Dieser Satz wird Heron von den griechischen Optikern zugeschrieben. Wilde Gesch. der Optik I p. 49. Die folgende Bemerkung über den Perimeter des Dreiecks der Fußpuncte hat der jüngere Fagnano gemacht (Acta Erud. 1775 p. 296).

$\beta$ berühren, und von einer Tangente des Kreises in $A$ und $B$ geschnitten werden, so erscheint aus dem Centrum der Bogen $\alpha\beta$ zweimal so groß, als die Tangente $AB$. Wird der Kreis von $AB$ in $\gamma$ berührt, so ist der Winkel $\alpha M\gamma = 2AM\gamma$ weil $\alpha$ und $\gamma$ symmetrisch zu $MA$ liegen; ebenso $\gamma M\beta = 2\gamma MB$; folglich $\alpha M\beta = 2AMB$. Auf dieselbe Weise findet man $\alpha M\beta = 2A_1MB_1 = 2A_2MB_2$ u. s. f. Zwischen zwei gegebenen Tangenten eines Kreises erscheinen alle andern Tangenten desselben Kreises aus dem Centrum halb so groß als der zwischen den Berührungspuncten der gegebenen Tangenten enthaltene Bogen, mithin (§. 2, 4) gleich groß oder um 180° verschieden.*)




Wenn das Viereck $ABCD$ dem Kreise, dessen Centrum $M$, umgeschrieben ist, und die Seiten $BC$, $DA$ den Kreis in $\alpha$, $\beta$ berühren, so ist $2AMB = \beta M\alpha$, $2CMD = \alpha M\beta$, folglich $2(AMB + CMD) = 0$. Wenn ferner das Sechseck $ABCDEF$ dem Kreise, dessen Centrum $M$, umgeschrieben ist, und die Seiten $BC$, $DE$, $FA$ den Kreis in $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ berühren, so ist $2AMB = \gamma M\alpha$, $2CMD = \alpha M\beta$, $2EMF = \beta M\gamma$, folglich $2(AMB + CMD + EMF) = 0$. U. s. w.**)

Wenn bei einem dem Kreise umgeschriebenen Sechseck die Diagonalen von der 1ten nach der 4ten, von der 2ten nach der 5ten Ecke durchs Centrum gehn, so geht auch die Diagonale von der 3ten nach der 6ten Ecke durchs Centrum.***) Bezeichnet man die doppelten Centriwinkel, welche die Seiten des Sechsecks einschließen, der Reihe nach durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, so ist $\alpha_4 = \alpha_1$, folglich $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 = 0$ nach dem vorhin bewiesenen Satze; hieraus fließt die Behauptung nach §. 2, 4. Wenn bei einem dem Kreise eingeschriebenen Zehneck die Diagonalen von der 1ten nach der 6ten, von der 2ten nach der 7ten, von der 3ten nach der 8ten, von der 4ten nach der 9ten Ecke durchs Centrum gehn, so geht auch die Diagonale von der 5ten nach der 10ten Ecke durchs Centrum. Nach der angenommenen Bezeichnung hat man $\alpha_6 = \alpha_1$, $\alpha_8 = \alpha_3$, folglich $\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9 = 0$. U. s. w. Wenn bei 2 dem

---

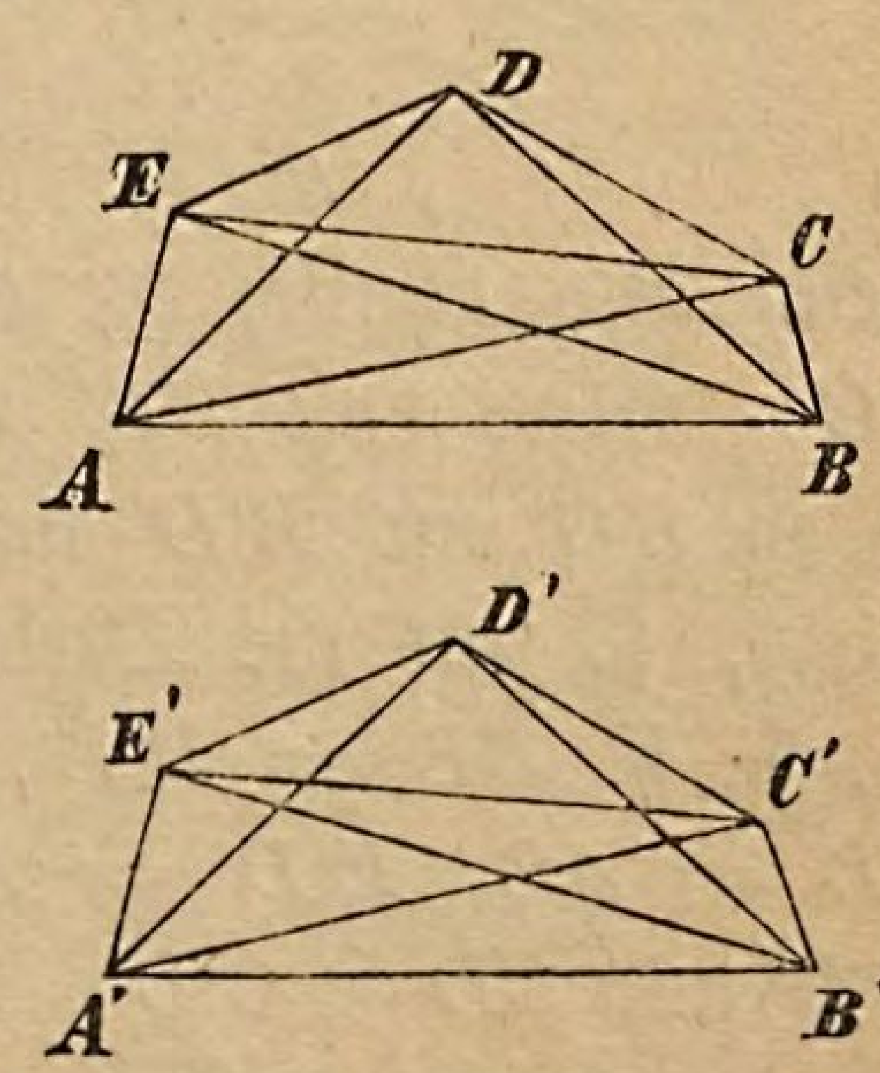
*) Poncelet propr. proj. 462.
**) Poncelet propr. proj. 463.
***) Gergonne in den Ann. de Math. 4 p. 78 hat diesen besondern Fall des Brianchon'schen Theorems in Betracht gezogen. Vergl. oben §. 4, 6.

Kreise umgeschriebenen Vierecken die die 1ten, 2ten, 3ten Ecken verbindenden Geraden durchs Centrum gehn, so geht auch die die 4ten Ecken verbindende Gerade durchs Centrum. Denn man hat bei ähnlicher Bezeichnung $\alpha_5 = \alpha_1$, $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_5 + \alpha_7 = 0$, folglich $\alpha_7 = \alpha_3$. U. s. w.

## §. 7. Von den gleichen und ähnlichen Figuren.

**1.** Für einen Zuschauer, der eine Seite eines Dreiecks $ABC$ z. B. $AB$ von $A$ nach $B$ zurücklegt, liegt der dritte Eckpunct $C$ entweder zur Linken oder zur Rechten, und der Zuschauer, welcher den Perimeter des Dreiecks $ABC$ von $A$ nach $B$ und von da nach $C$ bis $A$ (nicht entgegengesetzt) zurücklegt, dreht sich in dem ersten Falle linksum, in dem andern Falle rechtsum. Zwei Dreiecke $ABC$ und $DEF$ derselben Ebene heißen einerlei Sinnes oder entgegengesetzten Sinnes, je nachdem es die Drehungen sind, welche ein Zuschauer bei der Zurücklegung der Perimeter $ABC$ und $DEF$ macht.

Wenn jedem Punct einer Figur ein Punct einer andern Figur so entspricht, daß die Dreiecke $ABC$, $ABD$, $ABE$, . . welche von zwei Puncten der einen Figur mit den übrigen Puncten derselben Figur gebildet werden, den entsprechenden Dreiecken der andern Figur $A'B'C'$, $A'B'D'$, $A'B'E'$, . . der Reihe nach gleich und ähnlich sind, und dabei $ABD$, $ABE$, . . mit $ABC$ von einerlei oder entgegengesetztem Sinne, je nachdem $A'B'D'$, $A'B'E'$, . . mit $A'B'C'$ von einerlei oder entgegengesetztem Sinne sind: so sind die Figuren $ABCDE$ . . und $A'B'C'D'E'$ . . gleich und ähnlich, d. h. alle übrigen Dreiecke der einen Figur sind den entsprechenden Dreiecken der andern Figur gleich und ähnlich, $ACD$ und $A'C'D'$, $BCD$ und $B'C'D'$, $ACE$ und $A'C'E'$, $ADE$ und $A'D'E'$, $BCE$ und $B'C'E'$, $BDE$ und $B'D'E'$, $CDE$ und $C'D'E'$, . . .*)



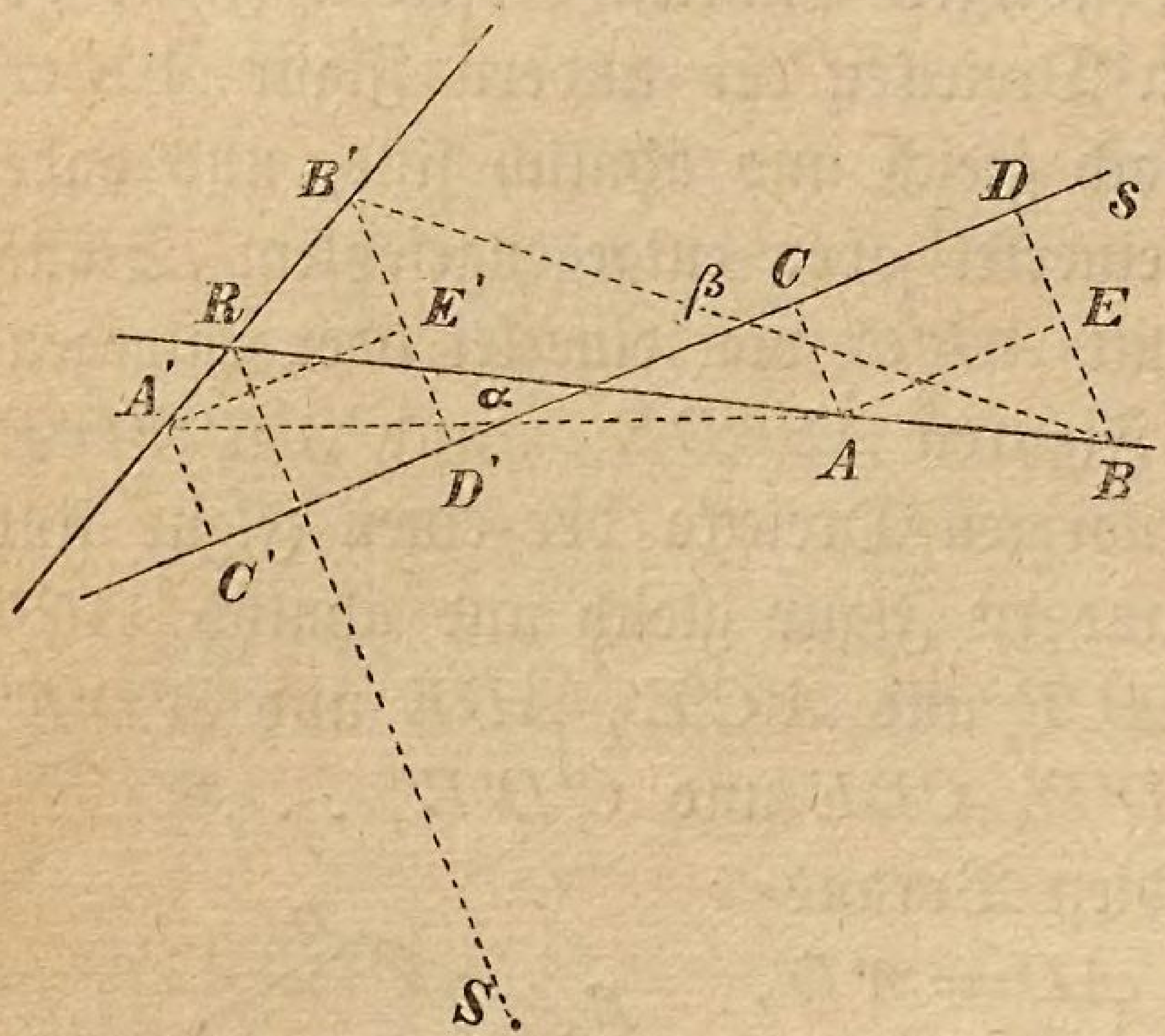

Beweis. Nach den gemachten Voraussetzungen ist die Seite $AC = A'C'$, $AD = A'D'$, der Winkel $BAD - BAC = B'A'D' - B'A'C'$, d. h. $CAD = C'A'D'$, folglich $ACD \cong A'C'D'$ (§. 5, 1). Eben so erkennt man, daß $ACE \cong A'C'E'$, $ADE \cong A'D'E'$, und daß $BCD \cong B'C'D'$, $BCE \cong B'C'E'$, $BDE \cong B'D'E'$. Aus den Ergebnissen $BCD \cong B'C'D'$, $BCE \cong B'C'E'$ wird ferner geschlossen, daß $CDE \cong C'D'E'$, u. s. f.

---

*) Vergl. des Verf. Abhandlung über Gleichheit und Aehnlichkeit 2c. Dresden 1852 p. 15 und 40.

Anmerkung. Je nachdem ein Paar entsprechende Dreiecke der gleichen und ähnlichen Figuren einerlei Sinnes oder entgegengesetzten Sinnes sind, so sind es alle Paare von entsprechenden Dreiecken und die ganzen Figuren.

2. Zu zwei gleichen Strecken $AB$, $A'B'$ auf Geraden, welche sich in $R$ schneiden, giebt es einen Punct $S$, mit dem die Strecken gleiche und ähnliche Dreiecke von einerlei Sinn bilden. Ist nämlich $S$ der zweite Durchschnittspunct der Kreise $RAA'$, $RBB'$, so haben die Dreiecke $SAB$, $SA'B'$ der Reihe nach gleiche Winkel (§. 4, 7) und die Seite $AB = A'B'$, folglich ist $SAB \cong SA'B'$ (§. 5, 3). Zugleich ist der Winkel $ASA' = BSB' = AB^\wedge A'B'$ (§. 4, 7). Durch $S$ gehn die Geraden, welche $AA'$ und $BB'$ normal halbiren, weil $AS = A'S$ und $BS = B'S$. Durch $S$ geht auch die Gerade, welche den Nebenwinkel des von $AB$ und $A'B'$ gebildeten Winkels halbirt, weil $S$ von $AB$ und $A'B'$ gleiche Abstände hat (§. 6, 7. 8). Wird die Figur $SAB$ in ihrer Ebene um $S$ gedreht, bis $SA$ mit $SA'$ oder mit der entgegengesetzten Verlängerung von $SA'$ zusammenfällt, so gelangt $AB$ zur Deckung von $A'B'$ oder bildet mit $A'B'$ ein Parallelogramm, dessen Centrum $S$ ist (§. 6, 1).




Ferner giebt es eine Gerade $s$, mit der $AB$ und $A'B'$ entgegengesetzt gleiche Winkel bilden, und von der die Puncte $A$ und $A'$, $B$ und $B'$ entgegengesetzt gleiche Abstände haben. Ist $\alpha$ die Mitte von $AA'$, und die Gerade $s$ durch $\alpha$ parallel mit der Halbirenden des Winkels $AB^\wedge A'B'$ gezogen, sind ferner die Geraden $AC$ und $A'C'$ normal zu $s$, so sind die Dreiecke $\alpha AC$ und $\alpha A'C'$ gleich und ähnlich (§. 5, 3), d. h. $AC = A'C'$ und $\alpha$ die Mitte von $CC'$. Wird nun $BB'$ von $s$ in $\beta$ geschnitten, und zieht man die Geraden $BD$ und $B'D'$ normal zu $s$, die Geraden $AE$ und $A'E'$ parallel mit $s$, so sind die Dreiecke $ABE$ und $A'B'E'$ gleich und ähnlich (§. 5, 3), d. h. $BE = B'E'$, $AE = A'E'$. Zugleich hat man $ED = AC$, $CD = AE$, $E'D' = A'C'$, $C'D' = A'E'$ (§. 6, 1), folglich $BD = B'D'$ und $CD = C'D'$. Da nun $BDB'D'$ ein Parallelogramm ist (§. 6, 3), so ist $\beta$ die Mitte sowohl von $BB'$, als auch von $DD'$. Indem man die gleichen Strecken $CD$, $C'D'$ von $C'D$ subtrahirt oder zu $D'C$ addirt, findet man noch $CC' = DD'$, und daher $\alpha\beta = CD = C'D'$,

weil $\alpha D - \beta D = CD$. Wird die Figur $ABDC$ in ihrer Ebene der Geraden $s$ entlang fortbewegt, bis $C$ mit $C'$ zusammenfällt, so gelangt $A$ mit $A'$, $B$ mit $B'$ in symmetrische Lage zu $s$ (§. 6, 12).

Wenn insbesondere $ABA'B'$ ein Parallelogramm ist, so ist der Punct $S$ das Centrum des Parallelogramms und die Gerade $s$ normal zu $AB$. Wenn $ABB'A'$ ein Parallelogramm ist, so ist $S$ ein unendlich ferner Punct der Ebene $ABB'A'$, und die Gerade $s$ ist die Halbirende des von $AB$ und $A'B'$ eingeschlossenen Streifens. Wenn $A$ mit $A'$ vereint ist, so fällt $S$ mit dem Punct $AA'$ zusammen und die Gerade $s$ ist die Halbirende des von $AB$ und $A'B'$ eingeschlossenen Winkels.

3. Zu zwei gleichen und ähnlichen Polygonen von einerlei Sinn, $ABC$ .. und $A'B'C'$ .., giebt es einen sich selbst so entsprechenden Punct $S$, daß $SABC$ .. und $SA'B'C'$ .. gleiche und ähnliche Polygone einerlei Sinnes sind. Ist nämlich $S$ der Punct, mit welchem $AB$ und $A'B'$ gleiche und ähnliche Dreiecke von einerlei Sinn bilden (2), so folgt aus den Bedingungen $ABS \cong A'B'S$, $ABC \cong A'B'C'$, .., daß $SABC$ .. $\cong SA'B'C'$ .. (1).

Weil die Winkel $ASA'$, $BSB'$, $CSC'$, .., $AB^\wedge A'B'$, $AC^\wedge A'C'$, $BC^\wedge B'C'$, .. von derselben Größe sind (2), so schneiden sich die entsprechenden Geraden $AB$ und $A'B'$, $AC$ und $A'C'$, .. auf dem Kreise $AA'S$ (§. 4, 3), die entsprechenden Geraden $BA$ und $BA'$, $BC$ und $B'C'$, .. auf dem Kreise $BB'S$, u. s. f. Weil der Punct $S$ von den entsprechenden Puncten $A$ und $A'$, $B$ und $B'$, $C$ und $C'$, .. der Reihe nach gleiche Abstände hat, so gehn die Geraden, welche $AA'$, $BB'$, $CC'$, .. normal halbiren, durch $S$. Weil der Punct $S$ von den entsprechenden Geraden $AB$ und $A'B'$, $AC$ und $A'C'$, $BC$ und $B'C'$, .. der Reihe nach gleiche Abstände hat, so gehn die Geraden, welche die Nebenwinkel der Winkel $AB^\wedge A'B'$, $AC^\wedge A'C'$, $BC^\wedge B'C'$ halbiren, durch $S$. Wird das Polygon $SABC$ .. in seiner Ebene um $S$ gedreht, bis $SA$ mit $SA'$ oder mit der entgegengesetzten Verlängerung von $SA'$ zusammentrifft, so gelangt $ABC$ .. zur Deckung von $A'B'C'$ .., oder $ABA'B'$, $ACA'C'$, $BCB'C'$, .. werden Parallelogramme, deren gemeinschaftliches Centrum $S$ ist (§. 6, 1).

Wenn insbesondere die gegebenen Polygone so liegen, daß $ABB'A'$ ein Parallelogramm ist, so sind auch $ACC'A'$, $BCC'B'$, .. Parallelogramme, und die Strecken $AA'$, $BB'$, $CC'$, .. sind parallel und gleich. Bewegt man das Polygon $ABC$ .. in der Richtung $AA'$, bis $A$ mit $A'$ zusammenfällt, so gelangt $ABC$ .. mit $A'B'C'$ .. zur Deckung.*)

---

*) Der Punct $S$ ist einerlei mit dem von Euler (1777) betrachteten centrum similitudinis (Nov. Act. Petrop. 9 p. 154) und dem von Magnus sogenannten Situationspunct (Aufg. d. anal. Geom. I p. 59). Auf die Bemerkung, daß jede

4. Zu zwei gleichen und ähnlichen Polygonen von entgegengesetztem Sinn, $ABC$.. und $A'B'C'$.., giebt es eine sich selbst entsprechende Gerade $s$, mit welcher die entsprechenden Geraden $AB$ und $A'B'$, $AC$ und $A'C'$, $BC$ und $B'C'$, .. der Reihe nach entgegengesetzt gleiche Winkel bilden, und von welcher die entsprechenden Puncte $A$ und $A'$, $B$ und $B'$, $C$ und $C'$, .. der Reihe nach entgegengesetzt gleiche Abstände haben. Ist nämlich die Gerade $s$ durch die Mitte von $AA'$ parallel mit der Halbirenden des Winkels $AB^{\wedge}A'B'$ gezogen, sind ferner $AF$, $BG$, $CH$, .., $A'F'$, $B'G'$, $C'H'$, .. normal zu $s$, so sind (2) $AFAF'$, $BGB'G'$, $CHC'H'$, .. Parallelogramme, woraus man schließt, daß die Mitten von $AA'$ $BB'$ $CC'$, .. auf der Geraden $s$ liegen. Dabei findet man $FF = GG' = HH'$ u. s. f. Wird die Figur $ABC$ .. $FGH$.. in ihrer Ebene der Geraden $s$ entlang fortbewegt, bis $F$ mit $F'$ zusammenfällt, so gelangt $A$ mit $A'$, $B$ mit $B'$, $C$ mit $C'$, .. in symmetrische Lage zu $s$.

Wenn insbesondere die gegebenen Polygone so liegen, daß $AA'$ zur Halbirenden des Winkels $AB^{\wedge}A'B'$ normal ist, so haben dieselben bereits symmetrische Lage zu der Geraden, welche $AA'$ normal halbirt und deren Puncte sich selbst entsprechen.*)

5. Die Construction eines regulären $n$Ecks (§. 1, 8) kann auf die Theilung der Ebene in $n$ gleiche Winkel oder auf die Theilung des Kreises in $n$ gleiche Bogen gegründet werden. Denn $n$ gleiche und ähnliche gleichschenkelige Dreiecke, deren Spitzen in dem gemeinschaftlichen Scheitel jener Winkel liegen, bilden zusammen ein reguläres $n$Eck; ebenso bilden die Sehnen dieser Bogen den Perimeter eines regulären $n$Ecks (§. 6, 10).

Es giebt aber verschiedene Arten von regulären $n$Ecken, und zwar halb so viel, als Zahlen vorhanden sind kleiner als $n$ und prim zu $n$ (Allg. Arithm. §. 13, 15). Um nämlich ein reguläres Polygon zu erhalten, kann man bei einem in $n$ gleiche Bogen getheilten Kreise nicht nur die Sehnen vom 1ten nach dem 2ten Theilpunct, vom 2ten nach dem 3ten, .. ziehn, sondern auch vom 1ten nach dem 3ten, vom 3ten nach dem 5ten, .., oder überhaupt vom 1ten nach dem $(1+k)$ten, vom $(1+k)$ten nach dem $(1+2k)$ten, .., wobei diejenigen Theilpuncte sich

---

Verrückung einer Planfigur in ihrer Ebene als Drehung um einen bestimmten Punct $S$ angesehn werden kann, gründet sich eine Methode, Normalen zu Curven zu ziehn, von der zuerst Descartes Gebrauch gemacht hat. Vergl. Chasles ap. hist. p. 649 d. Uebers.

*) Die Gerade $s$ ist einerlei mit der von Magnus (l. c.) sogenannten „Situationsaxe".

nicht unterscheiden, deren Nummern nach dem Modul $n$ dieselben Reste haben. Wenn nun $k$ prim zu $n$ ist, so haben die $n$ Zahlen $1$, $1+k$, $1+2k, \ldots, 1+(n-1)k$ nach dem Modul $n$ verschiedene Reste (Allg. Arithm. §. 13, 19), mithin fällt erst die $(n+1)$te unter den gezogenen, Sehnen mit der ersten zusammen. Vertauscht man $k$ mit $n-k$, so wird das construirte Polygon nicht verändert, weil zu zwei Bogen, die zur Peripherie sich ergänzen, gleiche Sehnen gehören. Es giebt also nicht mehr verschiedene reguläre $n$Ecke, als Zahlen, die prim zu $n$ sind, in der Reihe von 1 bis $\frac{1}{2}(n-2)$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$, je nachdem $n$ gerade oder ungerade.*) Wird diese Anzahl durch $z$ bezeichnet, so hat man

| $n$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 5 | 2 | ... |

Durch die Theilung des Kreises in $n$ gleiche Theile ist die Theilung desselben in $m$ gleiche Theile gegeben, wenn $n$ durch $m$ theilbar ist; ferner ist aber auch die Theilung des Kreises in $2n$, $4n$, $8n, \ldots$ gleiche Theile ausführbar, indem man jeden der gegebenen Theile halbirt (§. 6, 5). Durch die Theilungen des Kreises in $n$ gleiche Theile und in $m$ gleiche Theile ist die Theilung desselben in $mn$ gleiche Theile gegeben, wenn $m$ prim zu $n$ ist, weil $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{n-m}{mn}$ irreducibel.

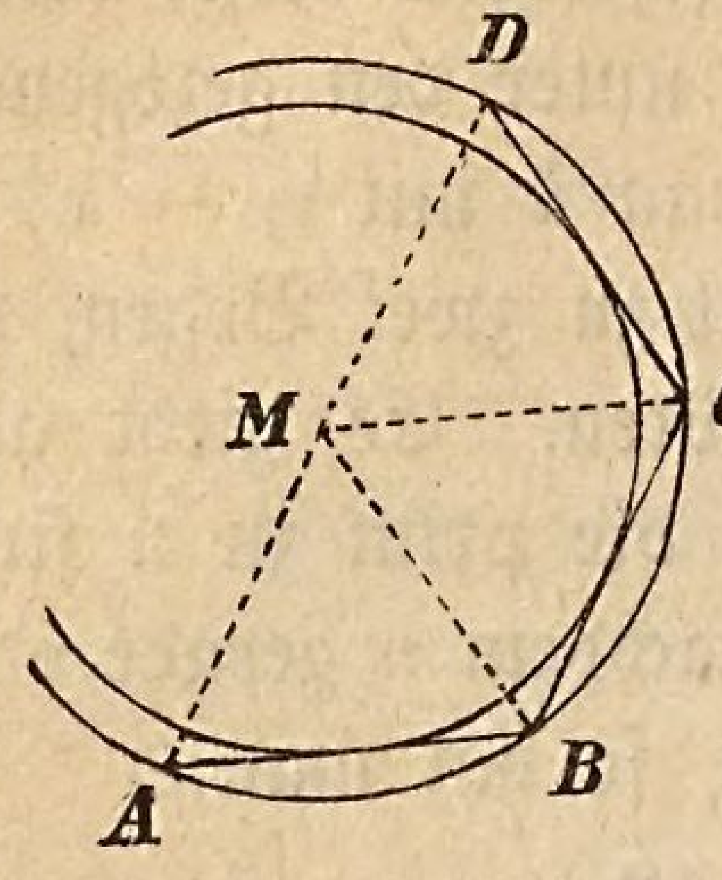
Die Theilung des Kreises in 6 gleiche Theile geschieht durch Abtheilung von Bogen, deren Sehnen dem Radius gleich sind. Eine solche Sehne bildet mit den Radien ihrer Endpuncte ein gleichseitiges Dreieck, welches gleichwinkelig ist (§. 3, 1), und dessen Centriwinkel folglich der 3te Theil von $180^0$ oder der 6te Theil von $360^0$ ist. Die Theilung des Kreises in 10 gleiche Theile geschieht durch Abtheilung von Bogen, deren Sehnen dem sogenannten goldnen Abschnitt des Radius gleich sind (§. 11, 6). Aus dem 3ten und 5ten Theile eines Kreises findet man den 15ten Theil desselben.

Die Theilung des Kreises in $n$ gleiche Theile, wenn $n$ eine Primzahl ist, läßt sich durch elementare Construction (d. h. mit Hülfe einer endlichen Anzahl von Geraden und Kreisen) im Allgemeinen nicht ausführen, sondern nur in dem Falle, daß zugleich $n-1$ eine Potenz

---

*) Die regulären Polygone der ersten Art und das zweite Fünfeck (Pentagramm) sind in der Pythagoreischen Schule untersucht worden (vergl. Eucl. IV), die übrigen (sternförmigen) im 13ten Jahrh. von Campanus, im 14ten Jahrh. von Bradwardine, im 16ten Jahrh. von Ramus, dann von Keppler (harmonice mundi 1619), genauer von Meister Comm. Gott. 1769 p. 148 und Poinsot 1809 J. de l'éc. polyt. Cah. 10 p. 16. Vergl. Chasles ap. hist. p. 545 d. Uebers. Bretschneider Geometrie vor Euclides p. 85.

von 2 ist, z. B. für die Primzahlen 3, 5, 17, 257, 65537, . ., weil $4 = 2^2$, $16 = 2^4$, $256 = 2^8$, $65536 = 2^{16}$.*)




Jedem regulären Polygon kann ein Kreis umgeschrieben und ein concentrischer Kreis eingeschrieben werden. Ist die Seite $AB = BC = CD = . .$, der Winkel $CBA = DCB = . .$, und $M$ das Centrum des Kreises $ABC$, so ist das Dreieck $ABM \cong BCM$ (§. 5, 2) d. h. der Winkel $MBA = MCB$. Nun ist der Winkel $CBA = DCB$, folglich $CBM = DCM$, und das Dreieck $BCM \cong CDM$ (§. 5, 1) d. h. $CM = DM$. Also geht der Kreis $ABC$ durch $D$, u. s. w. Die gleichen Sehnen $AB$, $BC$, $CD$, . . dieses Kreises haben von dem Centrum $M$ gleiche Abstände (§. 6, 10) und berühren einen concentrischen Kreis, der dem Polygon $ABCD$ . . eingeschrieben ist.

6. Wenn in einem $2n$Eck $ABC \ldots A_1 B_1 C_1 \ldots$ die Theile $ABC \ldots A_1$ und $A_1 B_1 C_1 \ldots A$ gleich und ähnlich und von einerlei Sinn sind, so hat das Polygon ein Centrum von der Art, daß jede durch das Centrum gezogene Gerade den Perimeter des Polygons in Gegenpuncten und das Polygon in zwei gleiche und ähnliche Theile von einerlei Sinn theilt. Die zwischen Gegenpuncten enthaltene Strecke ist ein Diameter. Die Mitten aller Diameter sind im Centrum vereint. Denn die Seiten $AB$ und $A_1 B_1$ sind nach der Voraussetzung nicht nur gleich, sondern auch parallel, weil die Winkel $BAA_1$ und $B_1 A_1 A$ gleich sind, also ist $ABA_1 B_1$ ein Parallelogramm (§. 6, 3), dessen Centrum zugleich das Centrum des Polygons ist. Vergl. §. 6, 1.

Wenn in einem $3n$Eck $ABC \ldots A_1 B_1 C_1 \ldots A_2 B_2 C_2 \ldots$ die Theile $ABC \ldots A_1$, $A_1 B_1 C_1 \ldots A_2$, $A_2 B_2 C_2 \ldots A$ gleich und ähnlich und von einerlei Sinn sind, so hat das Polygon ein Centrum von der Art, daß je 3 aus dem Centrum nach der Peripherie gezogene Radien, die die Ebene in 3 gleiche Winkel theilen, einander gleich sind und das Polygon in 3 gleiche und ähnliche Theile von einerlei Sinn zerschneiden. Weil nach Voraussetzung $AA_1 = A_1 A_2 = A_2 A$, so ist $AA_1 A_2$ ein reguläres Dreieck. Ist $M$ das Centrum des dem Dreieck $AA_1 A_2$ umgeschriebenen

*) Dieser Zusatz zur alten Geometrie ist von Gauß 1796 entdeckt worden (Disq. arithm. 365). Von der Construction des regulären 17Ecks handeln Legendre (Elém. de trigon. 110), Grunert in Klügel's math. W. V p. 811, Staudt Crelle J. 24 p. 251. Die Theilung des Kreises in 257 gleiche Theile hat Richelot Crelle J. 9 untersucht. Fermat's Vermuthung (nicht Behauptung), daß $2^m + 1$ eine Primzahl sei, wenn $m$ wiederum eine Potenz von 2 ist, hat sich nicht bestätigt; Euler Comm. Petrop. VI p. 104) hat bemerkt, daß $2^{32} + 1$ durch 641 theilbar ist.

Kreises, und werden $MF$, $MF_1$, $MF_2$ nach der Peripherie des Polygons so gezogen, daß die Winkel $FMF_1$, $F_1MF_2$, $F_2MF$ einander gleich sind, so sind nicht nur $MA = MA_1 = MA_2$, $MABC\,..\,A_1$, $MA_1B_1C_1\,..\,A_2$, $MA_2B_2C_2\,..\,A$ gleich und ähnlich und von einerlei Sinn, sondern es sind auch die Winkel $AMF$, $A_1MF_1$, $A_2MF_2$ einander gleich, die Dreiecke $MAF$, $MA_1F_1$, $MA_2F_2$, so wie die Polygone $MF\,..\,F_1$, $MF_1\,..\,F_2$, $MF_2\,..\,F$ gleich und ähnlich und von einerlei Sinn, wobei $MF = MF_1 = MF_2$.

Wenn überhaupt in einem $mn$Ecke $AB\,..\,A_1B_1\,..\,A_2B_2\,....\,A_{m-1}B_{m-1}\,..$ die Theile $AB\,..$, $A_1B_1\,..$, $..$, $A_{m-1}B_{m-1}\,..$ gleich und ähnlich und von einerlei Sinn, und $A, A_1, A_2\,..\,A_{m-1}$ die Eckpuncte eines regulären $m$Ecks sind, so hat das Polygon ein Centrum von der Art, daß es $m$Radien, die die Ebene in $m$ gleiche Winkel theilen, einander gleich sind und das Polygon in $m$ gleiche und ähnliche Theile von einerlei Sinn zerschneiden.*)

7. Eine Figur, welche von einer Geraden in zwei entgegengesetzt gleiche und ähnliche Theile getheilt wird, die zu der Geraden symmetrisch liegen (§. 6, 12), heißt **symmetrisch**, und die Gerade eine Axe der Figur.**) Das gleichschenkelige Dreieck ist symmetrisch, die den Winkel an der Spitze Halbirende ist seine Axe. Ein Viereck, in dem zweimal zwei folgende Seiten gleich sind, oder in dem zwei gegenüberliegende Seiten parallel und ungleich, die beiden andern gleich und nicht parallel sind (§. 6, 4), ist symmetrisch; die Gerade, welche einen von gleichen Seiten gebildeten Winkel halbirt, ist die Axe des Vierecks. Alle symmetrischen Figuren können durch Zusammenfügung von gleichschenkeligen Dreiecken mit einer gemeinschaftlichen Axe zu Stande gebracht werden.

Es giebt Figuren, die mehr als eine Axe besitzen. Ein Rhombus hat 2 Axen, die seine gegenüberliegenden Winkel halbiren; ein Rectangel hat 2 Axen, die seine gegenüberliegenden Seiten normal halbiren; ein Quadrat hat 4, ein reguläres $n$Eck hat $n$ Axen; ein Kreis hat unendlich viel Axen, denn jeder Diameter desselben ist eine Axe.

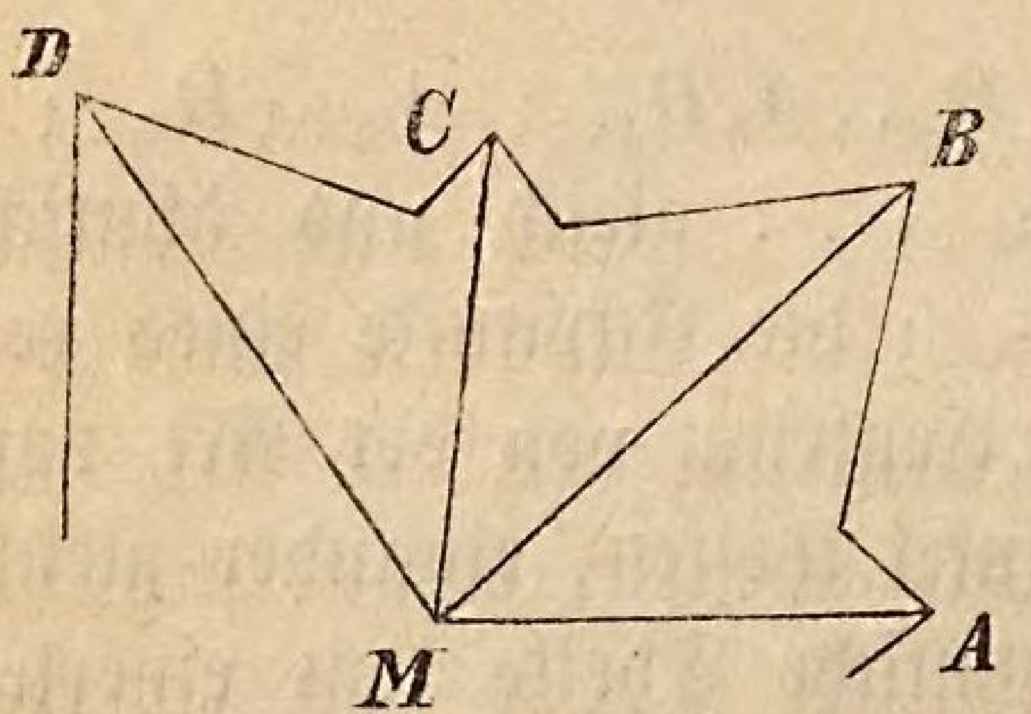
Wenn eine Figur 2 Axen besitzt, deren Winkel zu $180^0$ das ratio-

---

*) Der allgemeine Begriff von Centrum und Diameter findet sich bei Apollonius Conica I, unter den Neuern hat ihn Newton aufgestellt im Anfang der Enumeratio linearum etc. Curven der obigen Arten hat Euler (Introd. II cap. 15) zuerst betrachtet.

**) Im weitern Sinne werden auch die in (6) betrachteten Figuren symmetrische genannt. Axe und Diameter sind von Apollonius und Newton (l. c.) unterschieden worden; bei Euler wird die Axe diameter orthogonalis genannt.

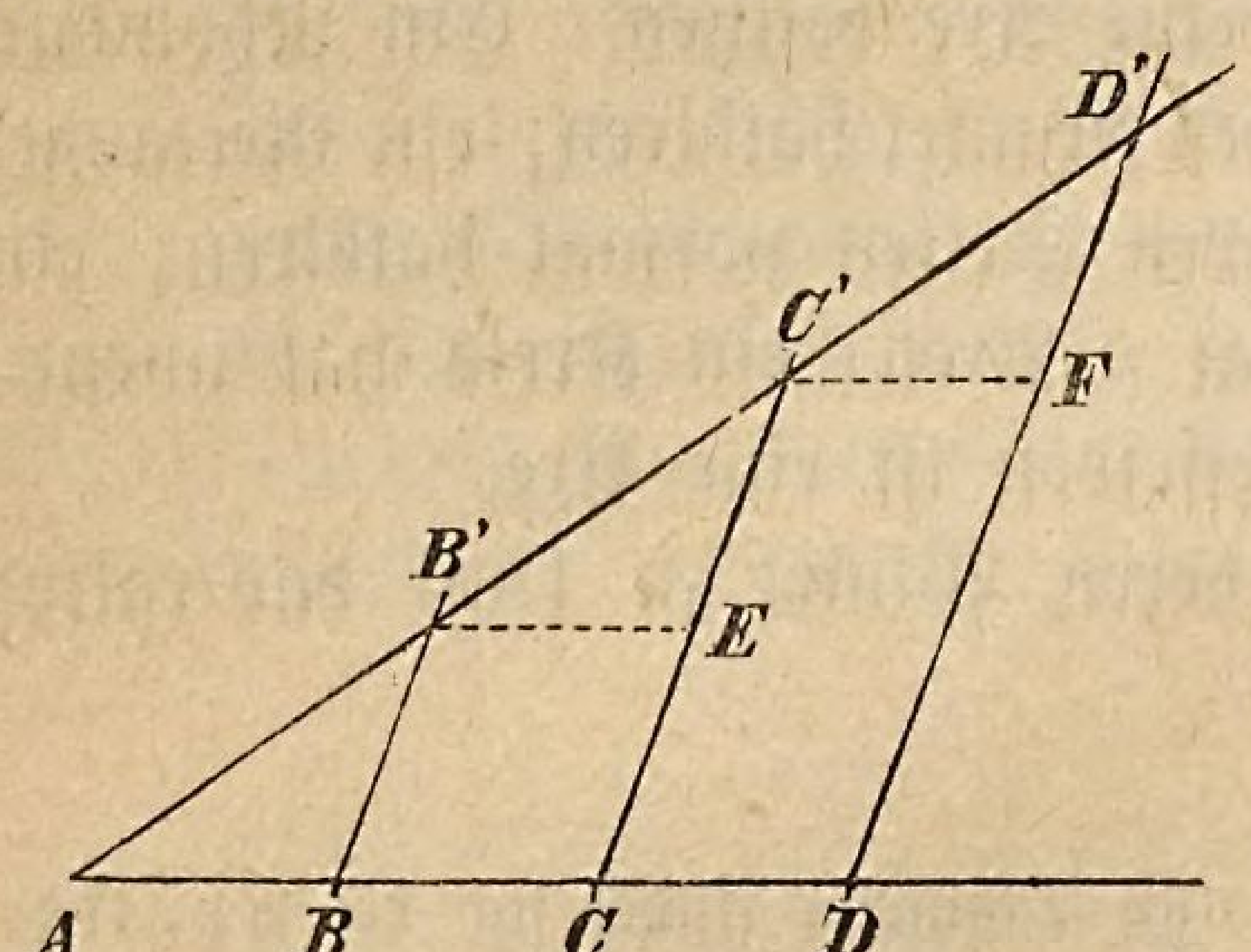
nale Verhältniß $l : m$ hat, wobei $l$ prim zu $m$, so besitzt die Figur überhaupt $m$ Axen, die sich in einem Puncte, die Ebene in $2m$ gleiche Winkel und die Figur in $2m$ gleiche und ähnliche Theile schneiden, von denen je zwei folgende entgegengesetzten Sinnes sind. Der gemeinschaftliche Punct der Axen ist ein Centrum von der Art, daß je $m$ Radien, die die Ebene in $m$ gleiche Winkel theilen, einander gleich sind und die Figur in $m$ gleiche und ähnliche Figuren von einerlei Sinn zerschneiden.




Sind nämlich, $MA$ und $MB$ Axen der Figur, $MB\,..\,C$ und $MB\,..\,A$ entgegengesetzt gleich und ähnlich, so ist $MB\,..\,C$ ein Bestandtheil der Figur, weil $MB$ eine Axe ist, und $MC$ eine Axe derselben, weil $MC$ mit $MA$ symmetrisch zu $MB$ liegt und $MA$ eine Axe der Figur ist. Ebenso schließt man, daß $MD$ eine Axe ist, wenn $MC\,..\,D$ und $MC\,..\,B$ entgegengesetzt gleich und ähnlich sind, u. s. w. Nach der Voraussetzung fällt aber unter den Radien $MA$, $MB$, $MC$, .. der $(2m+1)$te mit dem ersten zusammen; daher theilen diese Radien die Ebene in $2m$ gleiche Winkel, der $(m+1)$te Radius bildet mit dem ersten die erste Axe, u. s. f.*)

## §. 8. Durchschnitt eines Winkels mit Parallelen.

**1.** Wenn man auf einem Schenkel eines Winkels vom Scheitel aus Strecken abtheilt, die einander gleich sind, und durch die Theilpuncte parallele Gerade zieht, die den andern Schenkel schneiden, so erhält man auf dem andern Schenkel eben so viel Strecken, die einander gleich sind, und die parallelen Strecken vom Scheitel aus gezählt, verhalten sich der Reihe nach wie die natürlichen Zahlen. Sind $AB$, $BC$, $CD$ einander gleich, und $BB'$, $CC'$, $DD'$ parallel, so sind $AB'$, $B'C'$, $C'D'$ einander gleich und



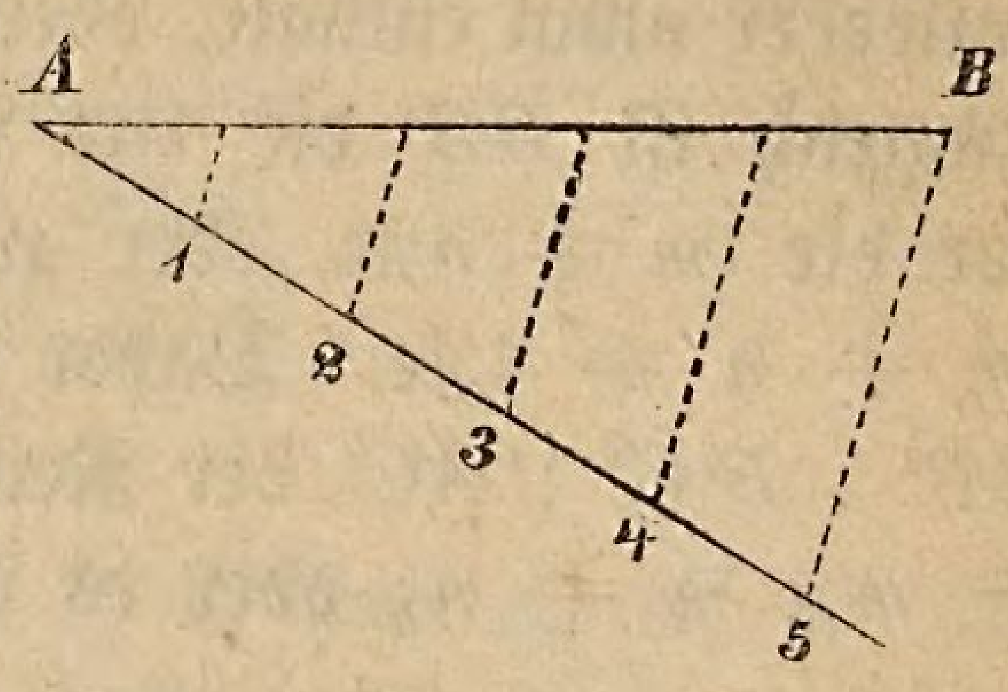

$$BB' : CC' : DD' = 1 : 2 : 3$$

Beweis. Zieht man $B'E$, $C'F$ parallel mit $AB$, so ist $B'E = BC$, $C'F = CD$, als gegenüberliegende Seiten von Parallelogrammen (§. 6, 1), also sind $AB$, $B'E$, $C'F$ einander gleich. Ferner sind die Winkel $BAB' = EB'C' = FC'D'$, und $AB'B = B'C'E = C'D'F$, weil ihre Schenkel der Reihe nach parallel sind

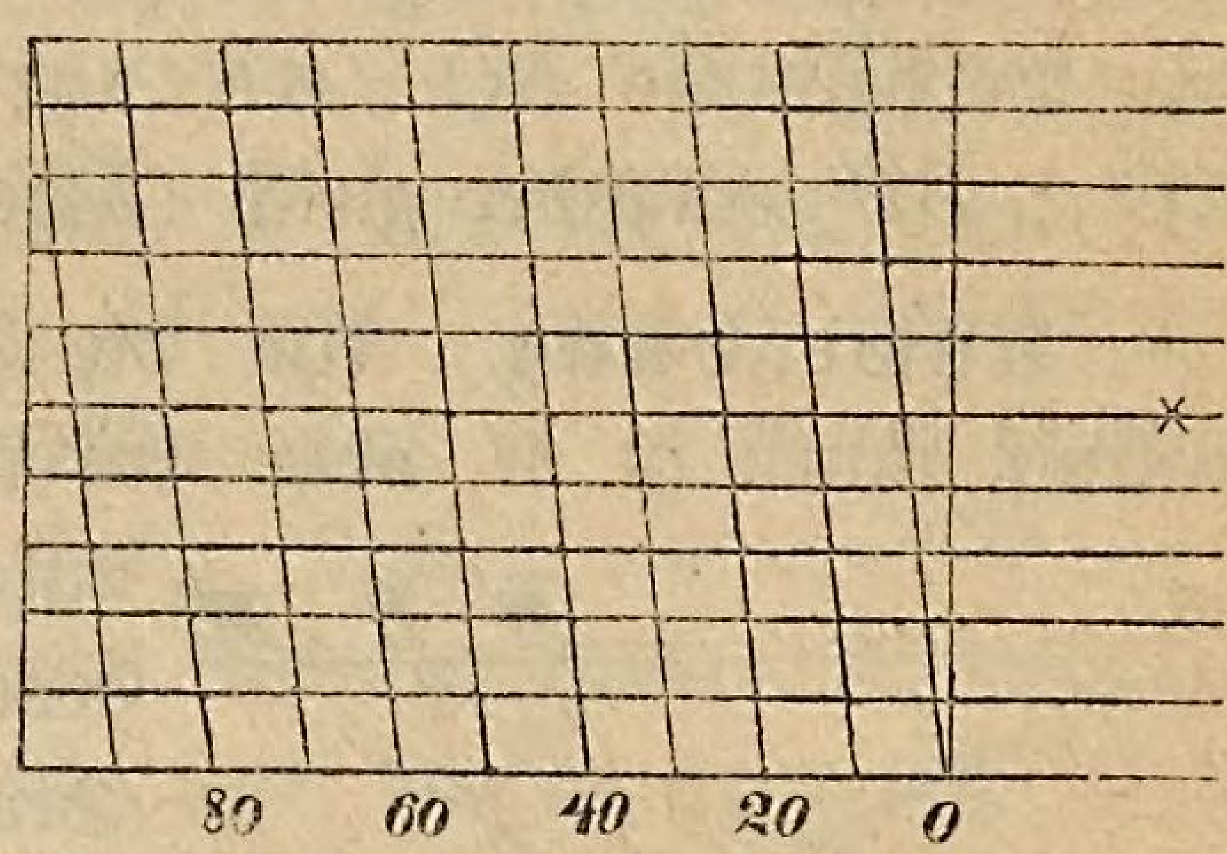
*) Euler Introd. II, 344.

(§. 2, 10). Nach §. 5, 3 schließt man, daß die Dreiecke $ABB'$, $B'EC'$, $C'FD'$ gleich und ähnlich sind, d. h. $AB' = B'C' = C'D'$, $BB' = EC' = FD'$. Dabei sind $CE = BB'$, $DF = CC'$, als gegenüberliegende Seiten von Parallelogrammen, folglich $CC' = 2BB'$, $DD' = 3BB'$, u. s. w.

Anwendung. Um die Strecke $AB$ in $n$ gleiche Theile zu theilen (Eucl. VI, 9), zieht man durch $A$ eine beliebige Gerade, schneidet auf derselben von $A$ aus $n$ gleiche Strecken ab, und zieht durch die Theilpuncte Gerade, welche mit der den letzten Theilpunct und $B$ verbindenden Geraden parallel sind. Die Parallelen theilen die Strecke $AB$ in $n$ gleiche Theile.

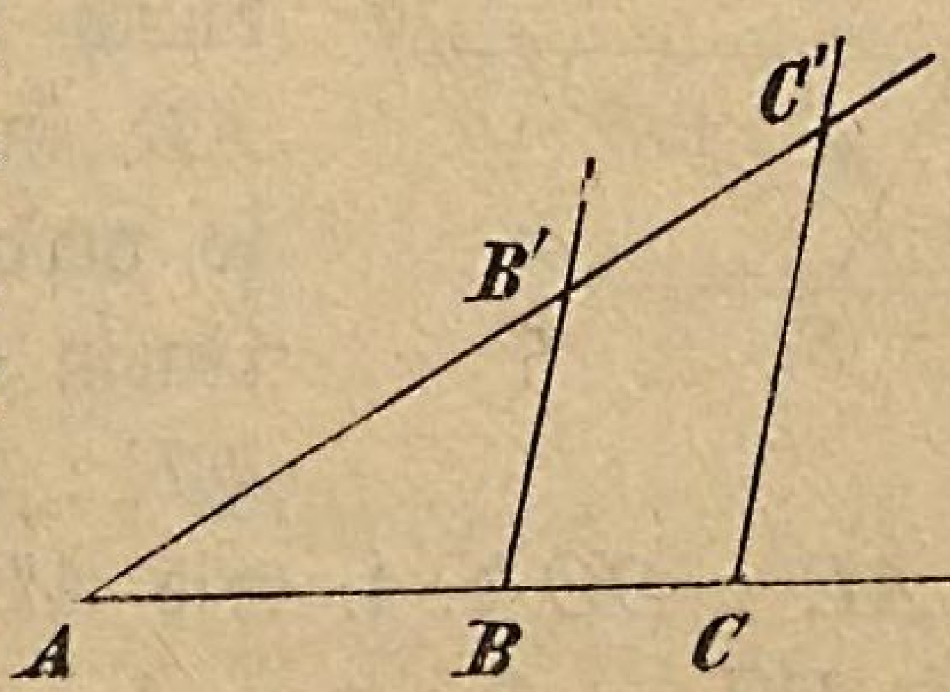



Um einen verjüngten Maßstab*) zu construiren, theilt man auf dem aufrechten Schenkel eines kleinen Winkels vom Scheitel (Nullpunct) aus 10 gleiche Strecken ab, und zieht durch den Nullpunct, sowie durch die Theilpuncte (normale) Parallelen, deren erste innerhalb des Winkels 1 Längeneinheit ist, deren letzte 10 Längeneinheiten beträgt. Auf jeder Parallele sind zur Linken 9 Abschnitte von je 10 Längeneinheiten, zur Rechten mehrere Abschnitte von je 100 Längeneinheiten hinzugefügt, so daß man z. B. Strecken von 3, 13, 23, . ., 103, . ., 253 Längeneinheiten auf der 3ten Parallele vorfindet, u. s. w.




2. Die Schenkel eines Winkels werden von 2 Parallelen so geschnitten, daß die Abschnitte des einen Schenkels zu einander der Reihe nach sich verhalten wie die zwischen denselben Parallelen enthaltenen Abschnitte des andern Schenkels. Die Parallelen verhalten sich zu einander der Reihe nach, wie die auf einem Schenkel vom Scheitel bis zu den Parallelen sich erstreckenden Abschnitte (Eucl. VI, 2). Sind $BB'$, $CC'$ parallel, so ist

$$AB : BC : AC = AB' : B'C' : AC',$$
$$BB' : CC' = AB : AC.$$




*) Den Gebrauch dieses nützlichen Instruments hat Hommel zu Leipzig um die Mitte des 16ten Jahrhunderts gelehrt nach Tycho de Brahe epist. astron. p. 62.

Beweis. Der $m$te Theil von $AB$ ist in $BC$ entweder $n$mal enthalten, oder mehr als $n$mal und weniger als $(n+1)$mal. Wenn man den $m$ten Theil von $AB$ auf $AC$ von $A$ aus $(m+n+1)$mal abtheilt und durch die Theilpuncte Gerade zieht, die mit $BB'$, $CC'$ parallel sind, so schließt man (1), daß $B'C'$ den $m$ten Theil von $AB'$ ebenfalls entweder $n$mal enthält, oder mehr als $n$mal und weniger als $(n+1)$mal. Zugleich ist $BB'$ die $m$te Parallele im Winkel $CAC'$, und $CC'$ entweder die $(m+n)$te, oder größer als die $(m+n)$te und kleiner als die $(m+n+1)$te. Daher verhalten sich entweder $AB : BC : AC$ und $AB' : B'C' : AC'$ der Reihe nach wie $m : n : m+n$, und $BB' : CC' = m : m+n$; oder es ist zugleich

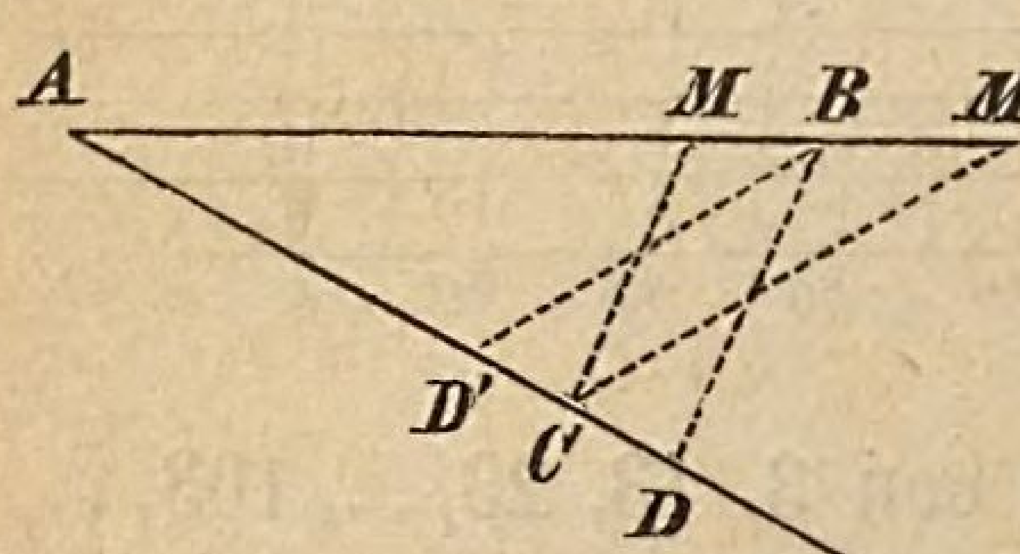
$$n : m < BC : AB < n+1 : m$$
$$n : m < B'C' : AB' < n+1 : m$$

und

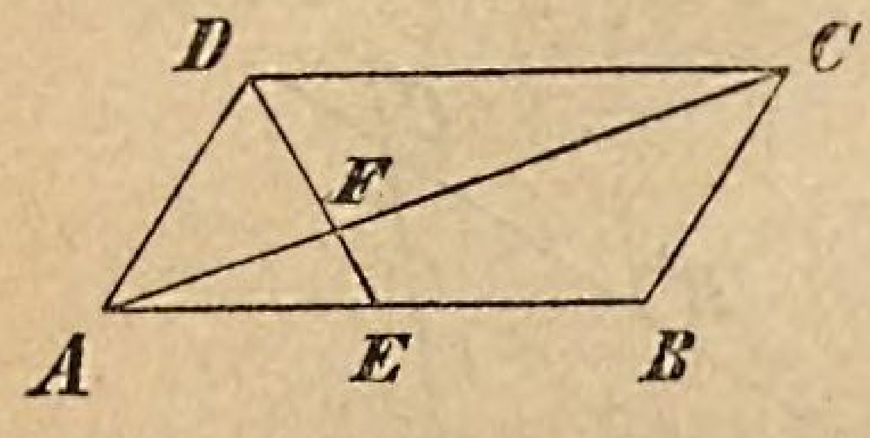
$$m+n : m < AC : AB < m+n+1 : m$$
$$m+n : m < CC' : BB' < m+n+1 : m$$

Diese Begrenzungen gelten für ein beliebig großes $m$, also sind sowohl die Verhältnisse $BC : AB$ und $B'C' : AB'$, als auch $AC : AB$ und $CC' : BB'$ einander gleich (Algebra §. 1, 2).

Anwendung. Um die Strecke $AB$ nach einem gegebenen Verhältniß innen in $M$, oder außen in $M'$ zu theilen, so daß die Verhältnisse $AM : MB$ und $AM' : BM'$ den gegebenen Werth haben, nehme man irgend zwei Strecken, deren Verhältniß den gegebenen Werth hat, ziehe in beliebiger Richtung $AC$ gleich der ersten Strecke, und in derselben Richtung $CD$ oder in der entgegengesetzten Richtung $CD'$ gleich der zweiten Strecke. Macht man $CM$ parallel mit $DB$, $CM'$ parallel mit $D'B$, so erhalten die Verhältnisse $AM : MB$ und $AM' : BM'$ den gegebenen Werth.

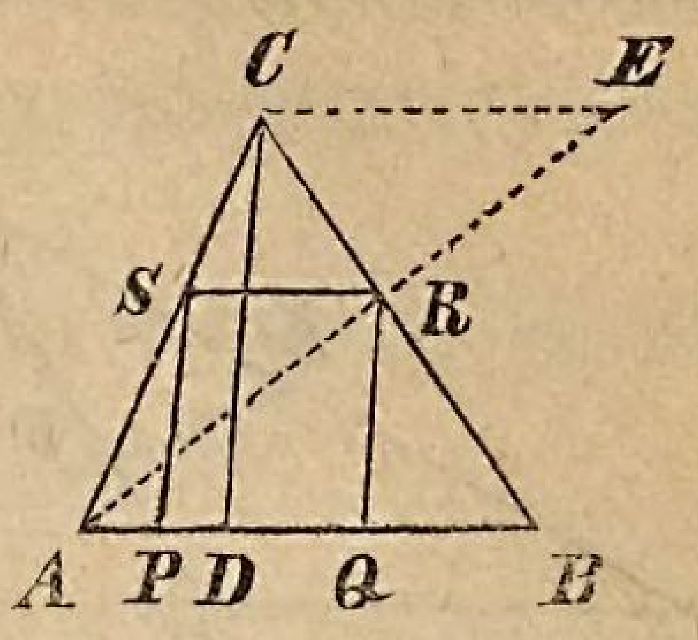



Wenn man in dem Parallelogramm $ABCD$ durch $D$ eine Gerade zieht, welche die Seite $AB$ in $E$, die Diagonale $AC$ in $F$ schneidet, so verhalten sich die Theile $AF : FC$ auf dem einem Schenkel des Winkels $F$, wie die Theile $EF : FD$ auf dem andern, und wie die Parallelen $AE : DC$ d. i. wie $AE : AB$. Wenn $AE : EB = 1 : n$, so ist $AF : FC = 1 : n+1$.




Wenn dem Dreieck $ABC$ das Parallelogramm $PQRS$ eingeschrieben werden soll, dessen Seite $PQ$ auf $AB$ liegt, zu $QR$ ein gegebenes

Verhältniß hat, und mit ihr einen gegebenen Winkel einschließt, so ziehe man $CD$, welche mit $AB$ den gegebenen Winkel bildet, $EC$ parallel entgegengesetzt mit $AB$ und so lang, daß $EC : CD$ den gegebenen Werth hat. Die Gerade $AE$ schneidet $BC$ in $R$ so, daß $RS : EC$ und $SP : CD$ den Werth $AS : AC$ haben. Folglich ist $RS : EC = SP : CD$ und $RS : SP = EC : CD$. Zieht man $EC$ parallel mit $AB$ in derselben Richtung, u. s. w., so erhält man ein zweites Parallelogramm, das den Forderungen der Aufgabe genügt.

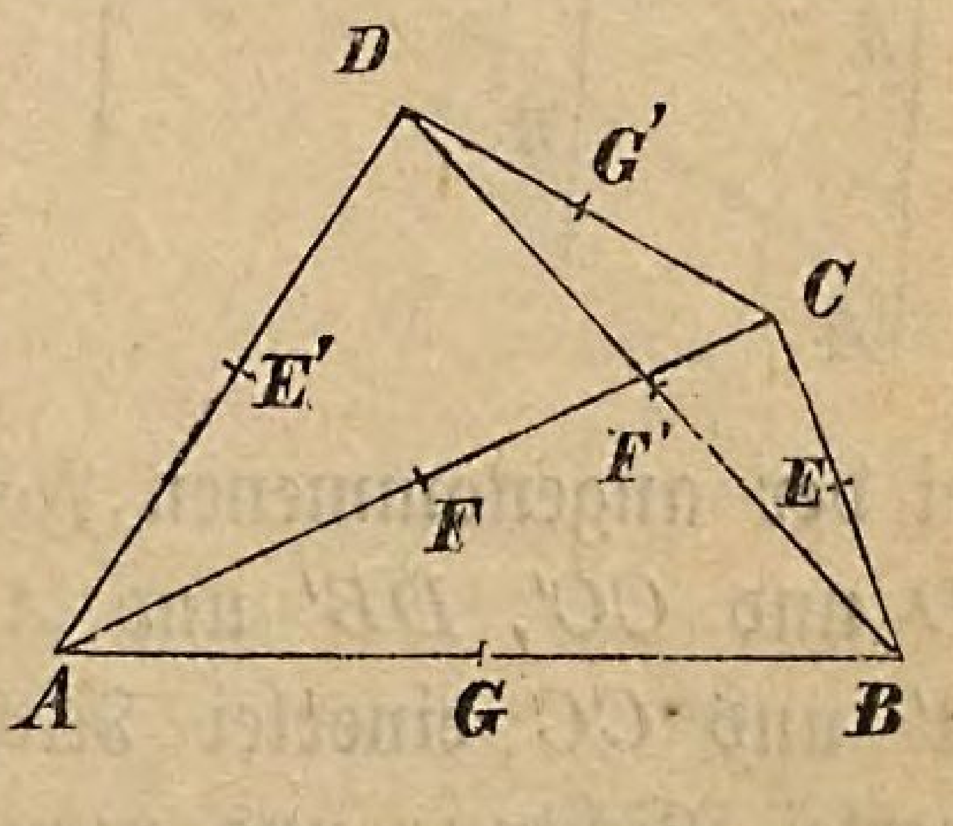



3. Umgekehrt schließt man: Wenn $A$, $B$, $C$ und $A$, $B'$, $C'$ auf je einem Schenkel so liegen, daß $AB : BC = AB' : B'C'$, so sind die Geraden $BB'$, $CC'$ parallel. Würde $AB'$ von der Geraden, welche mit $BB'$ parallel ist und durch $C$ geht, in $D'$ geschnitten, so wäre $AB : BC = AB' : B'D'$, folglich $AB : BC$ von $AB' : B'C'$ verschieden, gegen die Voraussetzung.

Wenn $A$, $B$, $C$ auf einer Geraden liegen, $BB'$ und $CC'$ parallel sind und von solcher Länge, daß $BB' : CC' = AB : AC$, so liegen auch $A$, $B'$, $C'$ auf einer Geraden. Würde $CC'$ von der Geraden $AB'$ in $E'$ geschnitten, so wäre $BB' : CE' = AB : AC$, folglich $BB' : CC'$ von $AB : AC$ verschieden, gegen die Voraussetzung.

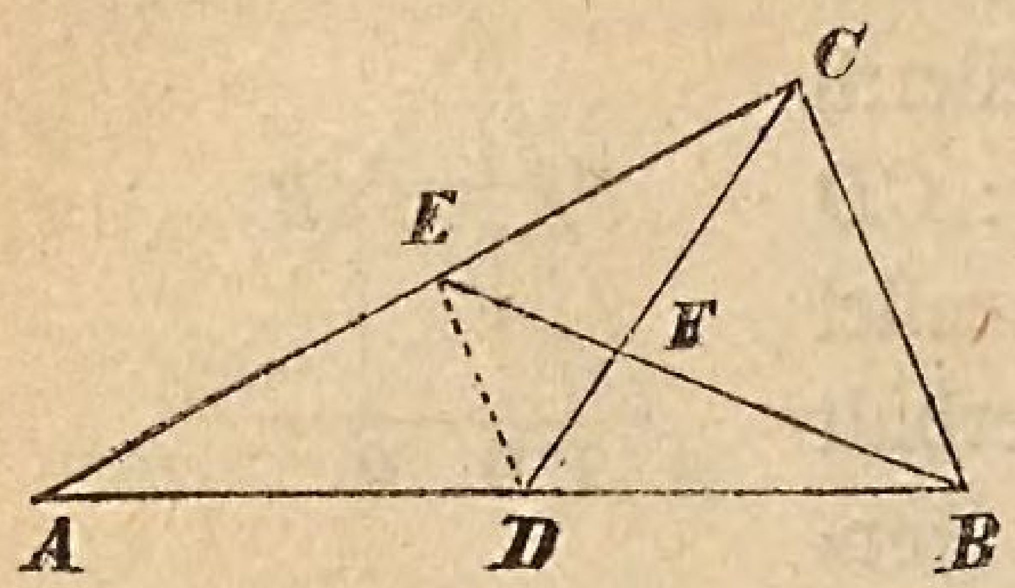
Anwendung. Die Gerade, welche die Mitten von zwei Seiten eines Dreiecks verbindet, ist mit der dritten Seite parallel und halb so groß. Wenn $E$, $F$ die Mitten von $BC$, $CA$ sind, so hat man $CE : EB = CF : FA$, also sind $EF$ und $AB$ parallel, und zwar $EF : BA = CF : CA = 1 : 2$.

Die Mitten der Seiten eines Vierecks sind die Eckpuncte eines Parallelogramms. Wenn $E$, $E'$, $F$, $F'$, $G$, $G'$, die Mitten von $BC$, $AD$, $CA$, $BD$, $AB$, $CD$ sind, so sind $GE$ und $E'G'$ parallel mit $AC$ und halb so groß, folglich ist $GEG'E'$ ein Parallelogramm. Ebenso bilden die Mitten der Seiten im Viereck $BCAD$ das Parallelogramm $EFE'F'$, im Viereck $CABD$ das Parallelogramm $FGF'G'$. Die Parallelogramme, deren Eckpuncte die Mitten der Seiten von den Vierecken sind, welche zu demselben System von 4 Puncten gehören (§. 1, 8), sind concentrisch.*) Denn die Mitte von $GG'$ ist zugleich die Mitte von $EE'$ und von $FF'$.



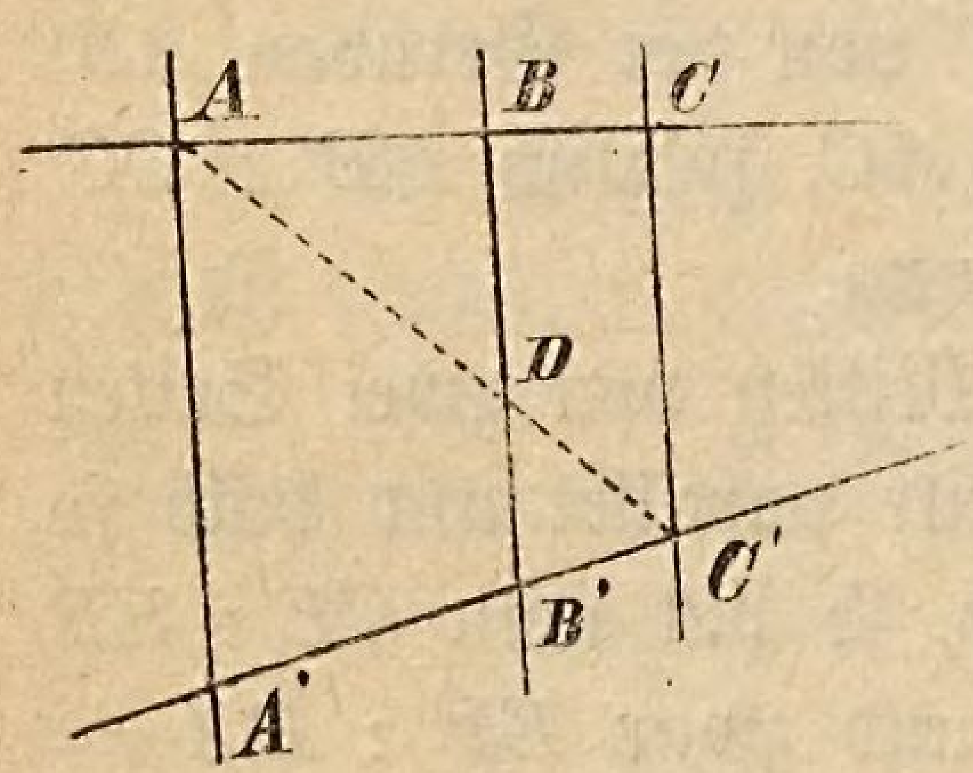

*) Gergonne Ann. de Math. 1 p. 313.

Wenn die Strecken $AB$ und $AC$, welche einen gemeinschaftlichen Anfang haben, nach dem Verhältniß $m : n$ getheilt sind, so theilen die Strecken von den Theilpuncten nach den gegenüberliegenden Endpuncten einander nach dem Verhältniß $m : m + n$. Denn unter der Voraussetzung $AD : DB = AE : EC = m : n$ sind $DE$ und $BC$ parallel und $DE : BC = m : m + n$ (2). Nun ist $DE : BC = DF : FC = EF : FB$, also haben auch diese letzteren Verhältnisse den Werth $m : m + n$.



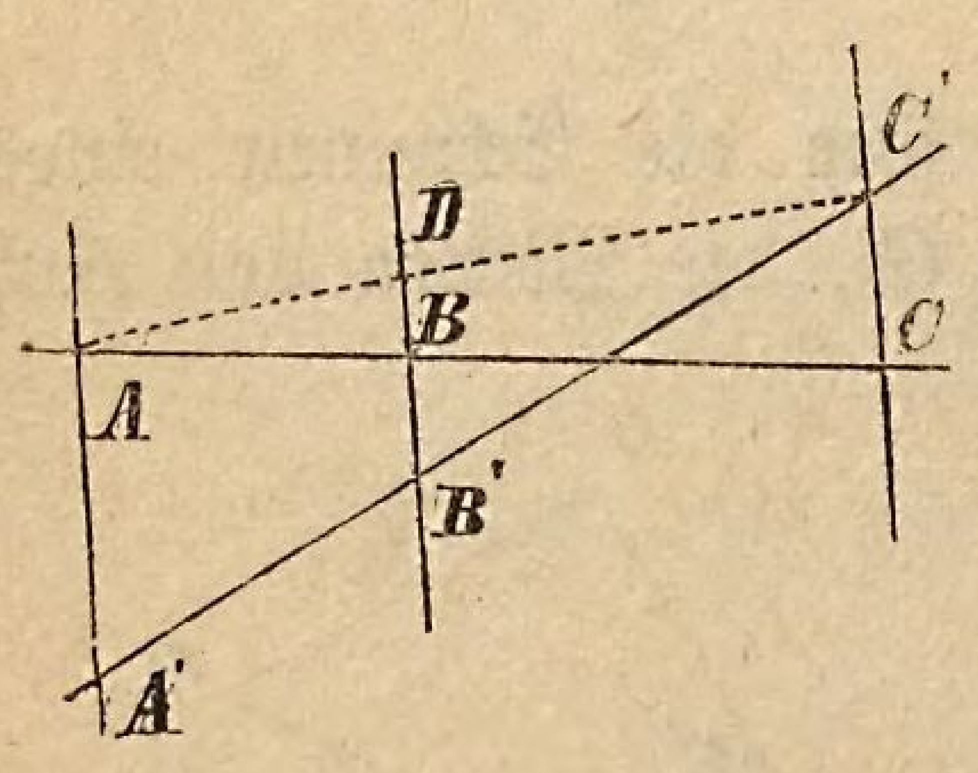

Insbesondere theilen die Geraden aus den Mitten der Seiten eines Dreiecks nach den gegenüberliegenden Eckpuncten einander nach dem Verhältniß 1 : 2, und gehen deshalb durch einen Punct, den Schwerpunct gleicher Massen, die in den Eckpuncten sich befinden, und der Dreiecksfläche.*)

4. Wenn zwei Gerade von 3 Parallelen geschnitten werden, so verhalten sich die Abschnitte der einen Geraden zu einander der Reihe nach, wie die zwischen denselben Parallelen enthaltenen Abschnitte der andern Geraden. Werden die Geraden von den Parallelen in $A$ und $A'$, $B$ und $B'$, $C$ und $C'$ geschnitten, und ist $D$ der Durchschnitt von $AC'$ mit $BB'$, so verhalten sich sowohl $AB : BC : AC$, als auch $A'B' : B'C' : A'C'$, wie $AD : DC' : AC'$ (2), also




$$AB : BC : AC = A'B' : B'C' : A'C'$$

Eine Gleichung zwischen den Parallelen erhält man aus den Gleichungen




$$BD = \frac{AB}{AC} CC'$$

$$DB' = \frac{B'C'}{A'C'} AA' = \frac{BC}{AC} AA'$$

Bei der angenommenen Folge der Puncte $A$, $B$, $C$ haben die Strecken $BD$ und $CC'$, $DB'$ und $AA'$ paarweise einerlei Richtung. Wenn nun $AA'$ und $CC'$ einerlei Richtung haben, so haben auch $BD$ und $DB'$ einerlei Richtung und man findet durch Addition

$$BB' = \frac{BC}{AC} AA' + \frac{AB}{AC} CC'$$

*) Archimedes Ἰσοῤῥοπικὰ ἢ κέντρα βαρῶν.

$$AC \,.\, BB' = BC \,.\, AA' + AB \,.\, CC' \text{*)}$$

Wenn die Parallelen $AA'$, $BB'$, $CC'$ nicht einerlei Richtung haben, so erhält man durch Subtraction die zwischen denselben bestehende Gleichung, worin die Parallele negativ ist, deren Richtung der gemeinschaftlichen Richtung der beiden anderen entgegengesetzt ist.

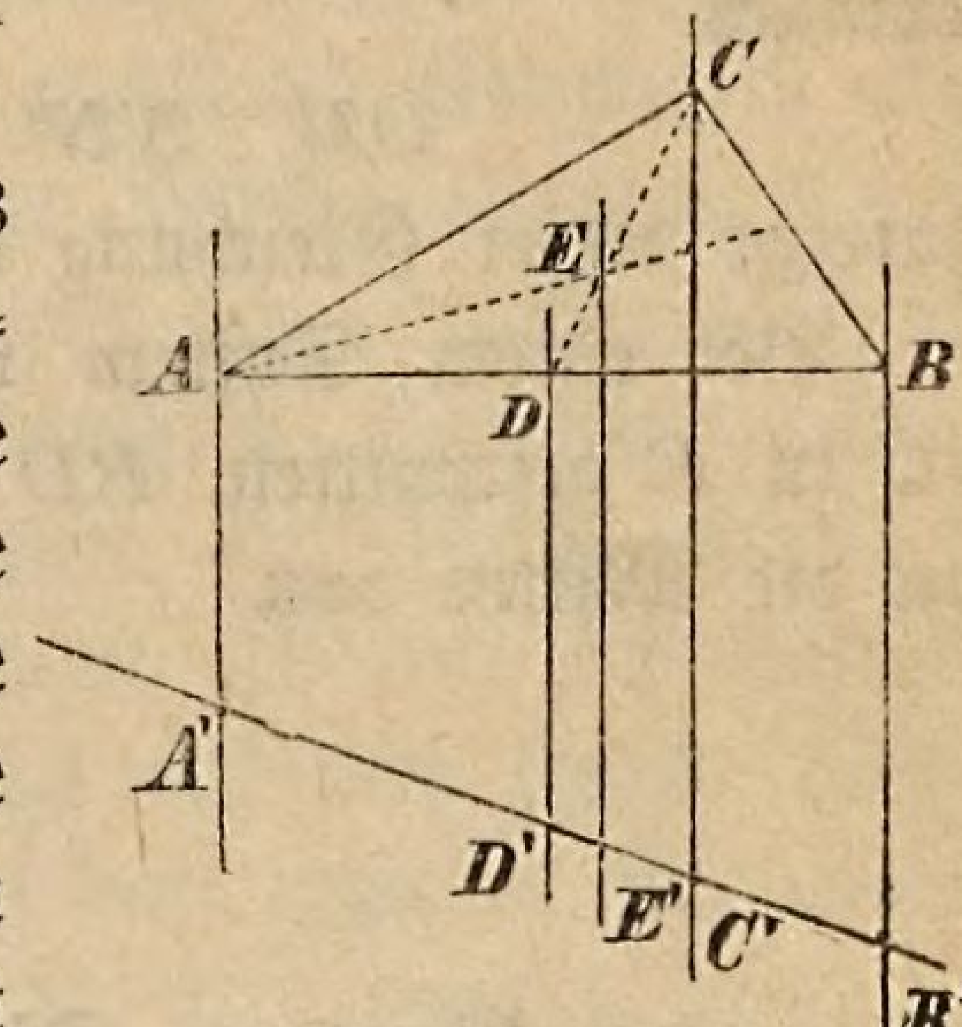
Wenn z. B. $D$ die Mitte von $AB$, und Parallelen durch $A$, $B$, $D$, von einer Geraden in $A'$, $B'$, $D'$ geschnitten werden, so ist

$$DD' = \frac{AA' + BB'}{2}$$

das arithmetische Mittel von $AA'$ und $BB'$.

Wenn $E$ der Schwerpunct des Dreiecks $ABC$ ist, so hat man bei analoger Construction

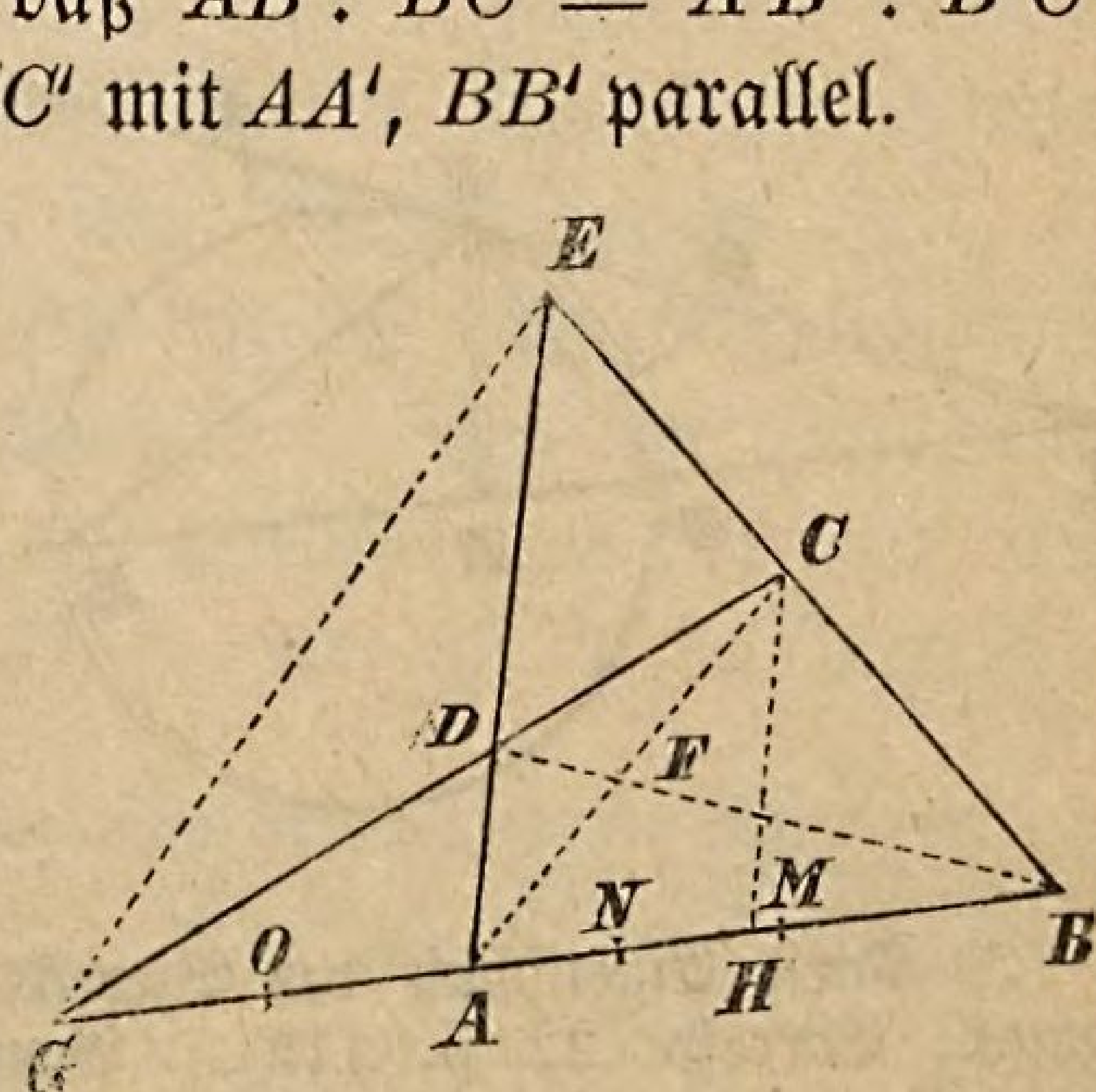
$$EE' = \frac{2DD' + CC'}{3} = \frac{AA' + BB' + CC'}{3}$$




d. h. der Abstand des Schwerpuncts eines Dreiecks von einer Geraden ist das arithmetische Mittel zwischen den Abständen der Eckpuncte von derselben Geraden.**) Wenn die Gerade $A'B'C'$ den Schwerpunct enthält, so ist die Summe der Parallelen null, eine der Summe der beiden andern entgegengesetzt gleich. Wenn man die Parallelen der $A'B'C'$ zieht und mit der Geraden $EE'$ schneidet, so findet man

$$E'A' + E'B' + E'C' = 0$$

5. Umgekehrt schließt man wie oben (3): Wenn $A$, $B$, $C$ und $A'$, $B'$, $C'$ auf je einer Geraden so liegen, daß $AB : BC = A'B' : B'C'$, und $AA'$, $BB'$ parallel sind, so ist auch $CC'$ mit $AA'$, $BB'$ parallel.




Wenn $A$, $B$, $C$ auf einer Geraden in der angegebenen Ordnung liegen, und $AA'$, $BB'$, $CC'$ parallel und so groß sind, daß sie der Gleichung

$$AC \,.\, BB' = BC \,.\, AA' + AB \,.\, CC'$$

genügen, so liegen $A'$, $B'$, $C'$ auf einer Geraden.

Anwendung. Die Mitten der 3 Diagonalen, welche zu einem System

---

*) L'Huilier polygon. p. 44.

**) Deshalb hat Carnot (géom. de pos. 269) den Schwerpunct von Puncten ihr Centrum der mittlern Abstände genannt.

von 4 Geraden gehören, liegen auf einer Geraden.*) Sind $AC$, $BD$, $EG$ die Diagonalen der von den Geraden $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ gebildeten Vierecke, und zieht man $CH$ mit $DA$ parallel, so ist (2)

$$GA = GH\frac{AD}{HC} \quad AB = HB\frac{AE}{HC}$$

folglich durch Addition

$$GB \,.\, HC = GH \,.\, AD + HB \,.\, AE$$

Bezeichnet man durch $M$, $N$, $O$ die Mitten von $AB$, $AH$, $AG$, und zieht durch $M$, $N$, $O$ Parallelen mit $HC$, welche $BD$, $AC$, $GE$ in $M'$, $N'$, $O'$ schneiden, so sind $M'$, $N'$, $O'$ die Mitten von $BD$, $AC$, $GE$ (2), und man hat

$$GB = 2OM, \quad GH = 2ON, \quad HB = 2NM$$
$$HC = 2NN', \quad AD = 2MM', \quad AE = 2OO'$$

demnach

$$OM \,.\, NN' = ON \,.\, MM' + NM \,.\, OO'$$

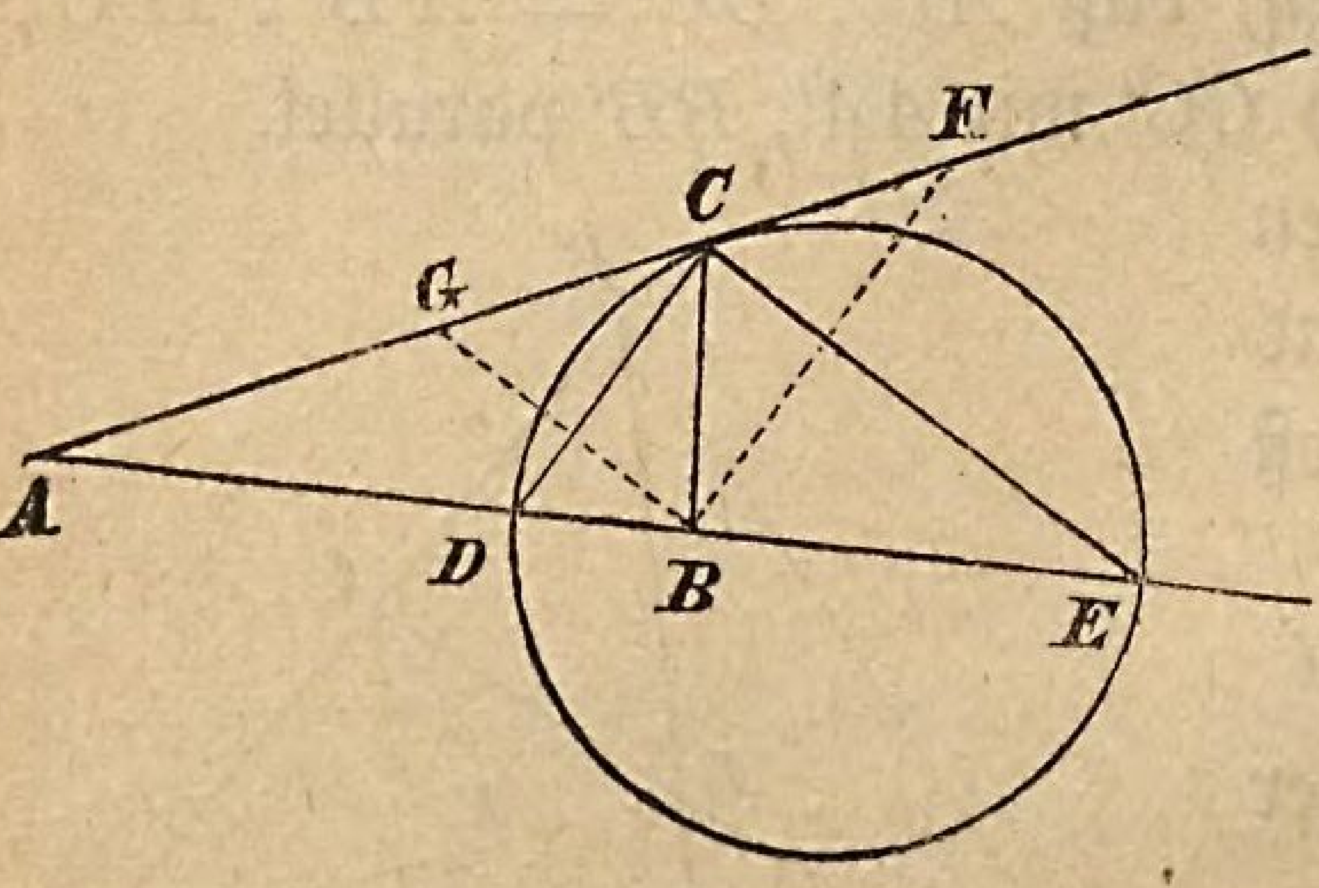
Zufolge dieser Gleichung liegen $M'$, $N'$, $O'$ auf einer Geraden.

Bei einem System von 4 Puncten $A$, $B$, $C$, $D$, werde $AD$ von $BC$ in $E$ geschnitten, $BD$ von $CA$ in $F$, $CD$ von $AB$ in $G$; dann liegen die Mitten von

$AB$, $CD$, $EF$
$BC$, $AD$, $FG$
$CA$, $BD$, $GE$

auf je einer Geraden. Diese 3 Geraden aber gehen durch einen Punct (3).

**6.** I. Die Geraden, welche in einem Dreieck einen Winkel und dessen Nebenwinkel halbiren, theilen die gegenüberliegende Seite innen und außen nach dem Verhältniß der den Winkel einschließenden Seiten.**)




Beweis. Die Halbirenden des Winkels $C$ und seines Nebenwinkels schneiden $AB$ innen in $D$ außen in $E$. Zieht man $BF$ und $BG$ parallel mit $CD$ und $CE$, so sind sowohl die Winkel $CFB$ und $FBC$ gleich, weil sie den gleichen Winkeln $ACD$ und $DCB$ gleich

*) Diese Eigenschaft des Vierecks ist von Gauß 1810 bemerkt worden (v. Zach monatl. Corresp. 22 p. 115). Beweise davon findet man Gerg. Ann. I p. 314, Poncelet propr. proj. 164, Kunze Geom. p. 200, und anderwärts. Eine wesentliche Vervollständigung des obigen Satzes hat Bodenmiller gegeben. Vergl. unten Trigon. §. 7, 11.

**) Eucl. VI, 3, ergänzt von Pfleiderer (Apollonius ebene Oerter von R. Simson, übers. von Camerer 1796 p. 217). Die Theilung einer Strecke innen und außen nach demselben Verhältniß heißt eine Theilung derselben in proportionale Seg-

sind, als auch $BGC$ und $CBG$, weil sie den gleichen Winkeln $ECF$ und $BCE$ gleich sind. Daher sind $CF$ und $GC$ der Seite $BC$ gleich. Nun ist (2)

$$AD : DB = AC : CF$$
$$AE : BE = AC : GC$$

folglich

$$AD : DB = AE : BE = AC : BC$$

Umgekehrt schließt man: Wenn $D$ die Seite $AB$ so theilt, daß $AD : DB = AC : BC$, so halbirt $CD$ den Winkel $ACB$ oder dessen Nebenwinkel, je nachdem $D$ von $AB$ eingeschlossen ist oder nicht. Gesetzt, $CH$ halbirte den Winkel, so wäre $AH : HB = AC : BC$, folglich $AD : DB$ von $AC : BC$ verschieden, gegen die Voraussetzung.

II. Jeder Punct, dessen Abstände von zwei gegebenen Puncten ein gegebenes Verhältniß haben, liegt auf dem Kreis, der die Strecke der gegebenen Puncte innen und außen nach dem gegebenen Verhältniß normal schneidet.*) Sind $A$ und $B$ die gegebenen Puncte, $D$ und $E$ diejenigen unter den gesuchten Puncten, welche auf der Geraden $AB$ liegen, und ist $C$ einer unter den übrigen gesuchten Puncten, mithin $AD : DB$, $AE : BE$, $AC : BC$ dem gegebenen Verhältniß gleich, so wird der Winkel $ACB$ und sein Nebenwinkel von $CD$ und $CE$ halbirt. Folglich ist der Winkel $DCE$ recht, und $C$ liegt auf dem Kreis, dessen Gegenpuncte $D$ und $E$ sind (§. 4, 3). Wenn das gegebene Verhältniß den Werth 1 hat, so ist $D$ die Mitte von $AB$, $E$ unendlich fern, der unendlich große Kreis eine Gerade (§. 6, 7).

Umgekehrt schließt man: Wenn $AD : DB = AE : BE$ und $C$ auf dem Kreis liegt, dessen Gegenpuncte $D$ und $E$ sind, so ist $GC = CF = BC$, weil $FBG$ recht, folglich $AC : BC = AD : DB$. Es giebt zwei Puncte von solcher Lage, daß ihre Abstände von 3 gegebenen Puncten gegebene Verhältnisse haben. Diese Puncte sind 3 bestimmten Kreisen gemein; sie können nicht real oder vereint sein. S. Trigonom. §. 7, 11.

III. Der kleinere Winkel eines Dreiecks hat die längere Halbirende. Wenn $CD$ die Halbirende des kleinern Winkels $C$, $BG$ die Halbirende des größern Winkels $B$, wenn $FB$ und $EC$ parallel mit $CD$ und $BG$, so ist $AB < AC$, $CF = BC = BE$, $FB > EC$ (§. 5, 5), folglich**)

---

mente (Carnot géom. de pos. 225), oder besser eine harmonische Theilung derselben, weil $AE - AB : AB - AD = AE : AD$, d. h. $AB$ das harmonische Mittel zwischen $AD$ und $AE$ ist (Algebra §. 1, 9). Die Paare $A$, $B$ und $D$, $E$ heißen harmonische Puncte nach Brianchon lignes du 2. ordre 1817. V.

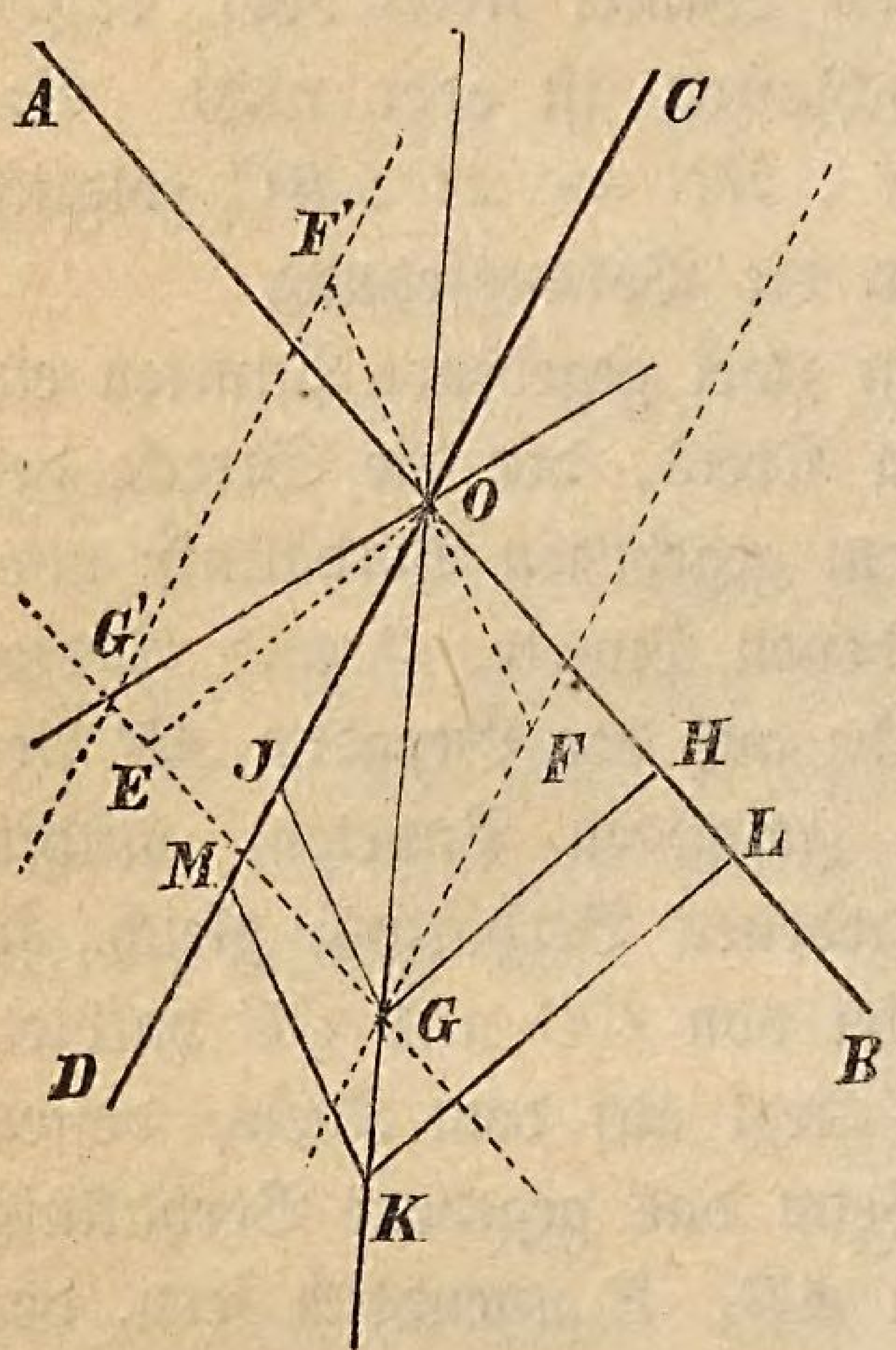
*) Dieser Kreis ist zuerst von Apollonius im 2ten Buch der „ebenen Oerter" betrachtet worden, wie Pappus in der Einleitung zum 7ten Buch seiner Sammlung p. 247 berichtet. Vergl. Apollonius ebene Oerter von Simson, übers. von Camerer 1796 p. 211 und Chasles aperçu hist. p. 620 d. Uebers.

**) Wertheim Brief Frankfurt a. M. 1871. Vergl. Grunert Archiv 13 p. 341, 16 p. 201.

$$CD : FB = AC : AF, \quad BG : EC = AB : AE$$

$$\frac{CD}{BG} = \frac{AC}{AB} \frac{FB}{EC} \frac{AE}{AF} > 1$$

7. Jeder Punct, aus dem an zwei gegebene Gerade in gegebenen Richtungen Strecken von gegebenem Verhältniß gezogen werden können, liegt auf einer von zwei bestimmten Geraden, die durch den gemeinschaftlichen Punct der gegebenen Geraden gehen.*)



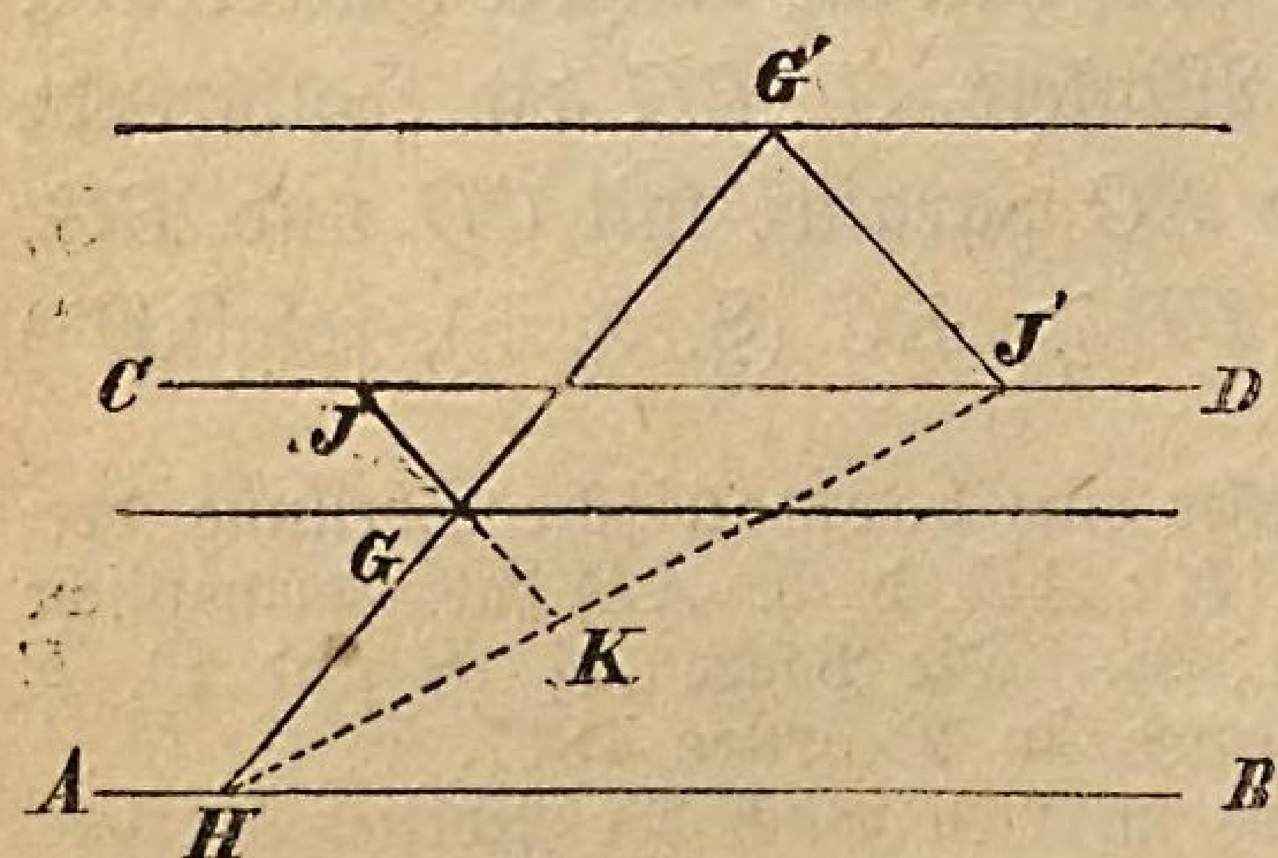

Beweis. Zieht man durch den gemeinschaftlichen Punct $O$ der gegebenen Geraden $AB$ und $CD$ die Strecken $OE$ und $OF$, welche die gegebenen Richtungen und das gegebene Verhältniß haben, zieht man ferner durch $E$ und $F$ die Parallelen der gegebenen Geraden, die sich in $G$ schneiden, zieht man dann die Strecken $GH$ und $GJ$ an die Geraden $AB$ und $CD$ parallel mit $OE$ und $OF$, so ist $GH : GJ$ das gegebene Verhältniß, weil $GH = EO$, $GJ = FO$ als gegenüberliegende Seiten von Parallelogrammen. Ist nun $K$ irgend ein Punct der Geraden $OG$, und sind $KL$, $KM$ parallel mit $OE$, $OF$ so hat man

$$KL : GH = OK : OG = KM : GJ \quad (2)$$

folglich $KL : KM = GH : GJ$.

Die andere Gerade $OG'$, deren Puncte dieselbe Eigenschaft haben, wie die Puncte der Geraden $OG$, wird gefunden, wenn man $OF'$ entgegengesetzt so groß macht, als $OF$, u. s. w.

Wenn die Geraden $AB$, $CD$ parallel, und aus dem Punct $G$ die Strecken $GH$, $GJ$ gezogen sind, so können aus allen Puncten der Geraden, welche mit $AB$ parallel durch $G$ geht, Strecken von derselben Richtung und von demselben Verhältniß gezogen werden. Es giebt aber noch eine andere Gerade, deren Puncte die angezeigte Eigenschaft besitzen. Macht man $GK$ entgegengesetzt gleich $GJ$, und zieht die Gerade $HK$, welche $CD$




*) Apollonius im 1ten Buch der ebenen Oerter. Vergl. Camerer's Uebersetzung der Simson'schen Bearbeitung p. 77. Die Theilung des Winkels $DOB$ durch die Geraden $OG$, $OG'$ wird eine harmonische genannt. Die Paare $AB$, $CD$ und

in $J'$ schneidet, und durch $J'$ die Gerade, welche mit $GK$ parallel ist und $GH$ in $G'$ schneidet, so hat man

$$G'H : GH = G'J' : GK = G'J' : JG$$

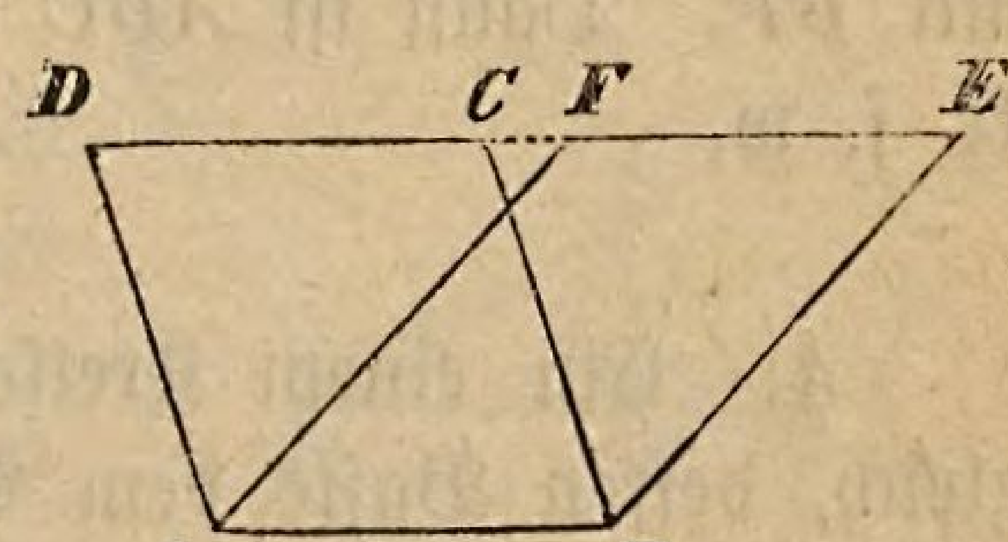
folglich $G'H : G'J' = GH : JG$, und es können auch aus allen Puncten der Geraden, die mit $AB$ parallel durch $G'$ geht, Strecken von derselben Richtung und von demselben Verhältniß gezogen werden.

Es giebt überhaupt 4 Puncte von solcher Lage, daß ihre Abstände von 3 gegebenen Geraden gegebene Verhältnisse haben. Jeder von diesen Puncten ist 3 bestimmten Geraden gemein, welche die Winkel der gegebenen Geraden theilen. Vergl. §. 6, 8.

## §. 9. Gleichheit der Flächen von Parallelogrammen und Dreiecken.

**1.** Die Puncte, welche von einer gegebenen Geraden gleiche Abstände haben, liegen auf einer Geraden, die mit der gegebenen Geraden parallel ist, weil die Normalen einer Geraden parallel sind (§. 2, 7. 6, 1). Unter dem Abstand paralleler Geraden (Breite des Streifens) versteht man den Abstand eines beliebigen Punctes der einen Geraden von der andern. Höhe eines Parallelogramms heißt der Abstand einer Seite von der parallelen Seite, die man als Basis betrachtet. Höhe eines Dreiecks heißt der Abstand der Spitze von der als Basis betrachteten Seite. Wenn Parallelogramme oder Dreiecke von gleicher Höhe sind, und ihre Basen auf einer Geraden liegen, so liegen die gegenüberliegenden Seiten oder die Spitzen auf einer Geraden, die mit der ersten Geraden parallel ist.

**2.** Wenn zwei Parallelogramme (Dreiecke) gleiche Basen und gleiche Höhen haben, so sind sie gleich d. h. sie haben gleiche Flächen, z. B. $ABCD$ und $ABEF$, $ABC$ und $ABE$.*)




Beweis. Die Dreiecke $CBE$ und $DAF$ sind gleich und ähnlich, weil $CB = DA$, $BE = AF$ und der Winkel $CBE = DAF$ (§. 5, 1). Durch Subtraction der gleichen Flächen $CBE$ und $DAF$ von der Fläche $ABED$ erhält man die gleichen Flächen

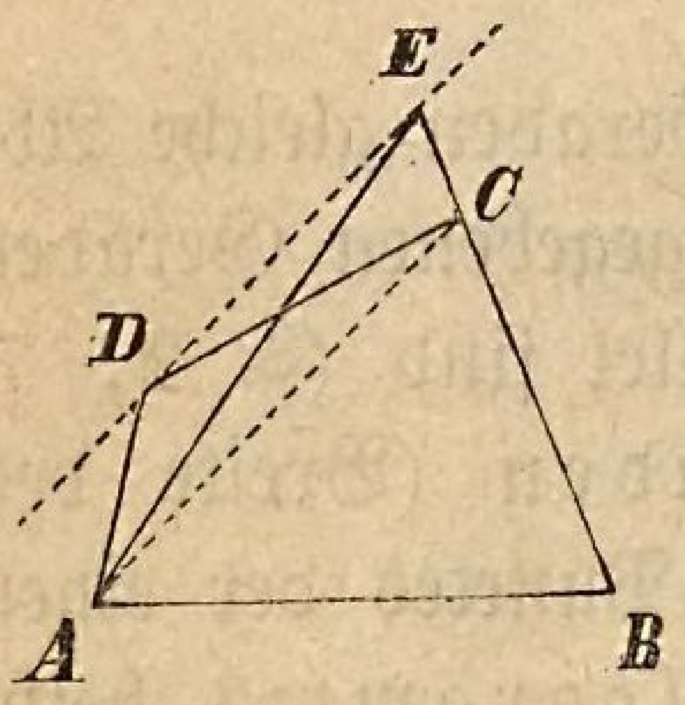
$OG$, $OG'$ heißen Harmonicalen (Lahire sect. coniques I p. 5) oder harmonisch, faisceau harmonique (Brianchon a. a. O.).

*) Eucl. I, 35—42. Man kann zwei Polygone von gleichen Flächen durch Gerade so zerschneiden, daß die Stücke beider der Reihe nach gleich und ähnlich sind, wie Gerwien 1833 Crelle J. 10 p. 228 nachgewiesen hat. Vergl. Göpel Grun. Archiv 4 p. 237.

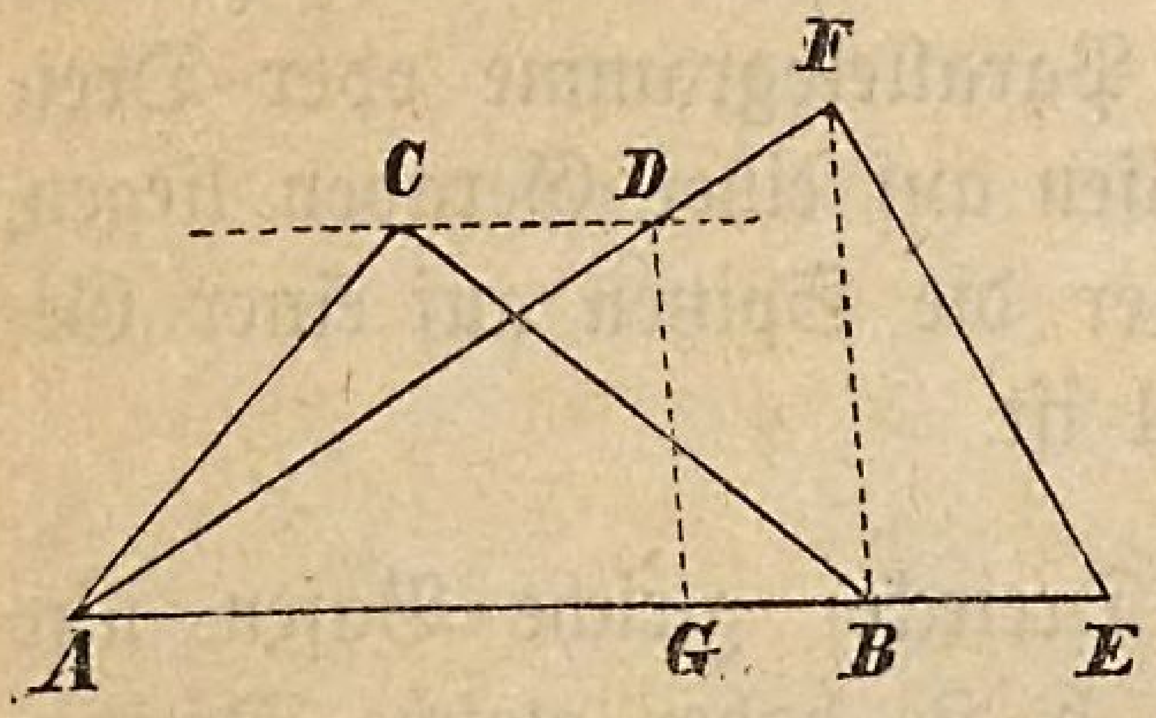
*ABCD* und *ABEF*. Die Dreiecke *ABC* und *ABE* haben gleiche Flächen als Hälften der gleichen Parallelogramme *ABCD* und *ABEF* (§. 6, 1).

Wenn zwei Parallelogramme oder Dreiecke gleiche Basen und ungleiche Höhen haben, so haben sie ungleiche Flächen. Unter den Dreiecken, welche zwei Seiten von gegebenen Längen haben, ist dasjenige das größte, in welchem diese Seiten einen rechten Winkel einschließen. Wenn zwei Parallelogramme oder Dreiecke gleiche Flächen und gleiche Basen haben, so haben sie gleiche Höhen, u. s. w.

Die Gleichheit der Dreiecke *ABC* und *ABE* kann auch unmittelbar nachgewiesen werden, indem man durch *A*, *B*, *C*, *E* die Normalen zu der Halbirenden des Streifens *BACE* zieht. Diese Bemerkung ist im Alterthum gemacht worden. Vgl. Chasles ap. hist. p. 503 d. Uebers.




3. Ein Viereck kann auf verschiedene Weise in ein Dreieck von gleicher Fläche verwandelt werden, z. B. *ABCD* = *ABE*, wenn *BC* von der Parallelen mit *AC*, welche durch *D* geht, in *E* geschnitten wird. Denn die Dreiecke *ACD* und *ACE* haben gleiche Basen und gleiche Höhen, folglich gleiche Flächen. Ein Fünfeck kann in ein Viereck von gleicher Fläche, ein Polygon in ein Dreieck von gleicher Fläche verwandelt werden.




Wenn der Winkel *EAF* von den Parallelen *BF* und *GD* durchschnitten wird, so ist das Dreieck *ABD* = *AGF*, weil *DGB* = *DGF*. Um ein Dreieck zu construiren, dessen Fläche die Differenz der Dreiecke *ABC* und *AEF* ist, ziehe man *CD* parallel mit *AB*, und *DG* parallel mit *BF*. Dann ist *ABC* = *ABD* = *AGF*, *AEF* — *ABC* = *GEF*. U. s. w.

4. Ein einem Kreise umgeschriebenes Polygon ist einem Dreieck gleich, dessen Basis dem Perimeter des Polygons und dessen Höhe dem Radius des eingeschriebenen Kreises gleich ist. Denn ein solches Polygon erscheint als Summe der Dreiecke, welche die Seiten (Basen) mit dem Centrum des Kreises (Spitze) bilden; diese Dreiecke sind von gleicher Höhe und werden addirt, indem man ihre Basen addirt. Dabei sind Dreiecke von entgegengesetztem Sinn (§. 7, 1) und ihre Basen mit den entgegengesetzten Zeichen zu nehmen.

Die Kreisfläche ist einem Dreieck gleich, dessen Basis der Peripherie

und dessen Höhe dem Radius gleich ist.*) Denn die Fläche eines dem Kreise umgeschriebenen Polygons unterscheidet sich von der Kreisfläche um so weniger, in je mehr Puncten sein Perimeter den Kreis berührt. Die Fläche des Polygons ist von der Fläche des Kreises nicht verschieden, wenn sein Perimeter den Kreis in allen Puncten berührt und mit dem Kreise zusammenfällt. In der That ist das angegebene Dreieck größer als ein dem Kreise eingeschriebenes reguläres Polygon; also ist die Differenz zwischen der Kreisfläche und dem angegebenen Dreieck geringer als die Differenz zwischen der Kreisfläche und dem Polygon, und geringer als ein Rectangel, dessen Länge der Perimeter des Polygons oder des Kreises, und dessen Breite die beliebig kleine Differenz zwischen dem Radius und dem Abstand einer Seite des Polygons vom Centrum ist. Eine Größe aber, die kleiner ist, als eine beliebig kleine Größe, kann von Null nicht verschieden sein.

Durch dieselbe Betrachtung findet man, daß ein Kreissector einem Dreieck gleich ist, dessen Basis dem Bogen und dessen Höhe dem Radius gleich ist.

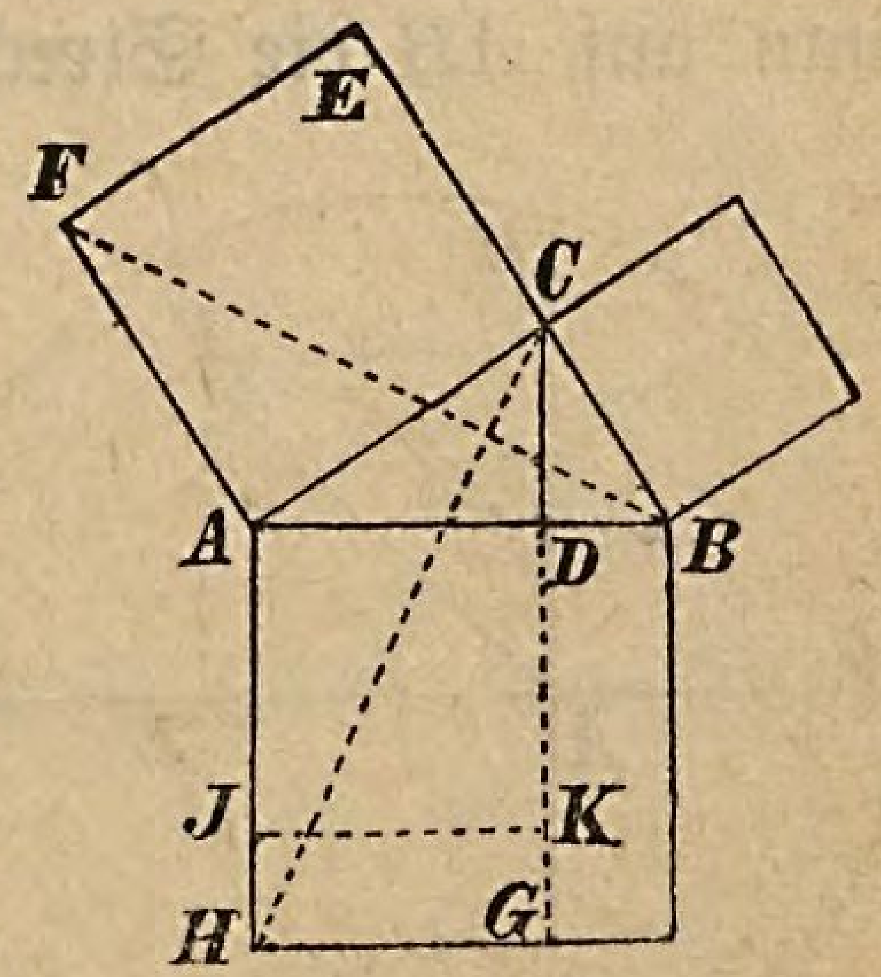
5. Unter dem Quadrat einer Strecke versteht man ein Quadrat, dessen Seite der Strecke gleich ist. Unter dem Rectangel aus zwei Strecken versteht man ein Rectangel, in welchem zwei folgende Seiten den gegebenen Strecken gleich sind.

Wenn man ein rechtwinkeliges Dreieck durch die Normale aus der Spitze des rechten Winkels zur Hypotenuse theilt, so ist

das Quadrat einer Cathete gleich dem Rectangel aus der Hypotenuse und dem der Cathete anliegenden Abschnitt derselben;

das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der Catheten;

das Quadrat der Normale gleich dem Rectangel aus den Abschnitten der Hypotenuse.**)




Beweis. Das Quadrat der Cathete $AC$ ist an Fläche 2mal so groß als das Dreieck $FAB$, das mit ihm gleiche Basis und Höhe hat. Das Rectangel $AHGD$ aus der Hypotenuse $AB$ und dem an $AC$ liegenden Stück $AD$ der Hypotenuse ist 2mal so groß als das Dreieck $AHC$, das mit ihm gleiche Basis und Höhe hat. Nun sind die Dreiecke $FAB$, $AHC$ an

*) Archimides Cyclom. 1.

**) Eucl. I, 47. II, 14 und X, 33 lemma 1. Dieser Satz wird von Alters her der Pythagoreische Lehrsatz genannt.

Fläche gleich, weil sie gleich und ähnlich sind (§. 5, 1), also haben das Quadrat von $AC$ und das Rectangel aus $AB$ und $AD$ gleiche Fläche.

Das Quadrat von $AB$ ist die Summe von zwei Rectangeln, deren erstes aus $AB$ und $AD$, deren zweites aus $AB$ und $DB$ gebildet ist. Jenes ist dem Quadrat von $AC$, dieses dem Quadrat von $CB$ gleich.

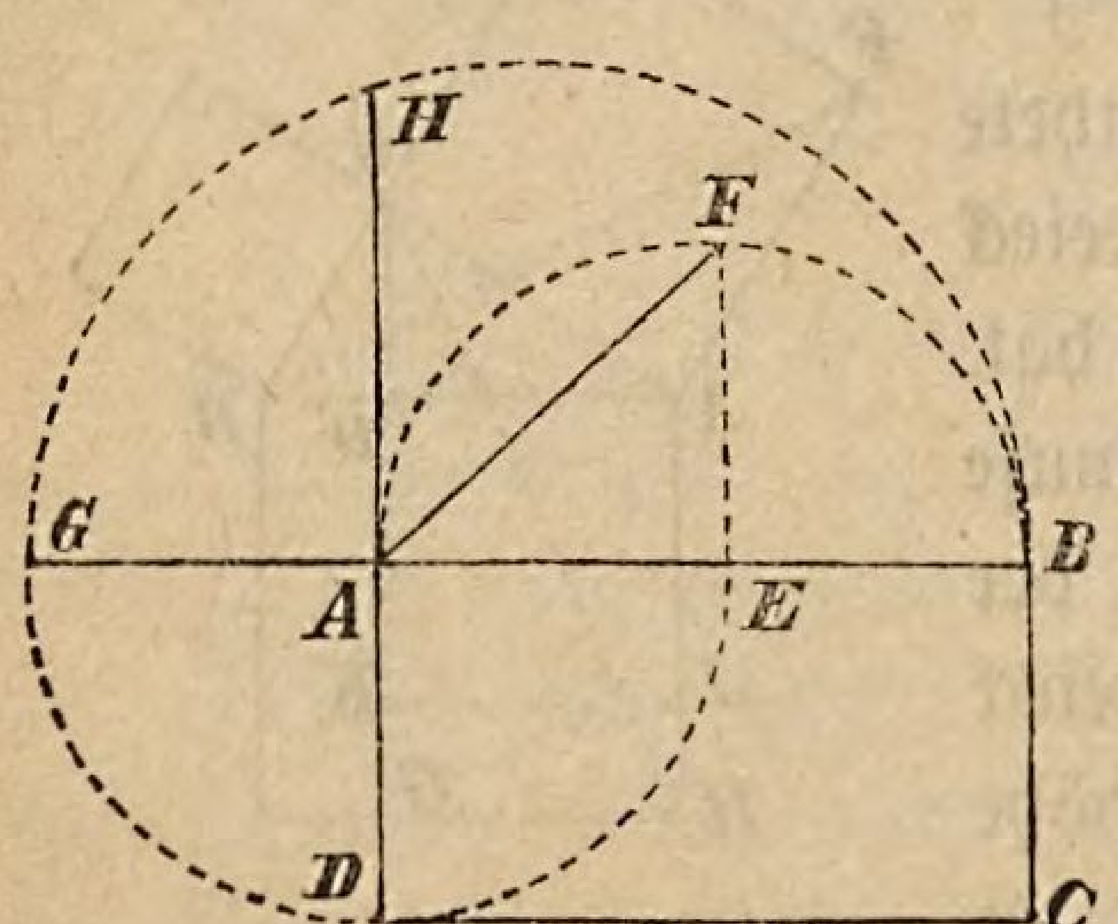
Das Quadrat von $CD$ wird gefunden, wenn man das Quadrat von $AC$ um das Quadrat von $AD$ vermindert, weil das Dreieck $ACD$ rechtwinkelig ist. Nun ist das Quadrat von $AC$ dem Rectangel $AHGD$ gleich, und wenn man davon das Quadrat von $AD$ subtrahirt, so bleibt das Rectangel $JHGK$, in welchem $JH = AH - AJ = AB - AD = DB$, $HG = AD$ ist. Also ist das Quadrat von $CD$ dem Rectangel aus $AD$ und $DB$ gleich.

6. Die Aufgaben, ein Quadrat zu construiren, dessen Fläche der Summe oder der Differenz gegebener Quadrate, oder einem gegebenen Rectangel, oder einem Vielfachen oder einem Theile eines gegebenen Quadrats gleich ist, finden zufolge des Pythagoreischen Lehrsatzes ihre Lösungen durch Construction bestimmter rechtwinkeliger Dreiecke.

Um die Summe von zwei Quadraten in ein Quadrat zu verwandeln, construirt man das rechtwinkelige Dreieck, dessen Catheten die Seiten der gegebenen Quadrate sind; die Hypotenuse ist die Seite des gesuchten Quadrats.

Um die Differenz von zwei Quadraten in ein Quadrat zu verwandeln, construirt man das rechtwinkelige Dreieck, dessen erste Cathete und Hypotenuse die Seiten der gegebenen Quadrate sind; die zweite Cathete ist die Seite des gesuchten Quadrats.

Um das Rectangel $ABCD$ in ein Quadrat zu verwandeln, macht man auf $AB$ die Strecke $AE = AD$, construirt den Halbkreis, dessen Gegenpuncte $A$ und $B$ sind, und die Normale zu $AB$ durch $E$, welche den Halbkreis in $F$ schneidet; dann ist $AF$ die Seite des gesuchten Quadrats. Denn der Winkel $AFB$ ist recht (§. 4, 2) und $EF$ normal zu $AB$, folglich das Quadrat von $AF$ dem Rectangel aus $AB$ und $AE$ oder $AD$ gleich.




Oder man macht auf der Verlängerung von $BA$ die Strecke $AG = AD$, construirt den Halbkreis, dessen Gegenpuncte $B$ und $G$ sind, und die Normale zu $GB$ durch $A$, welche den Halbkreis in $H$ schneidet; dann ist $AH$ die Seite des gesuchten Quadrats. Denn der Winkel $GHB$ ist recht und

*AH* normal zu *GB*, folglich das Quadrat von *AH* dem Rectangel aus *AB* und *AG* oder *AD* gleich.

Um das Quadrat zu construiren, welches *n*mal oder den *n*ten Theil so groß ist als ein gegebenes Quadrat, hat man das Rectangel, welches *n*mal oder den *n*ten Theil so groß ist als das gegebene Quadrat, in ein Quadrat zu verwandeln.

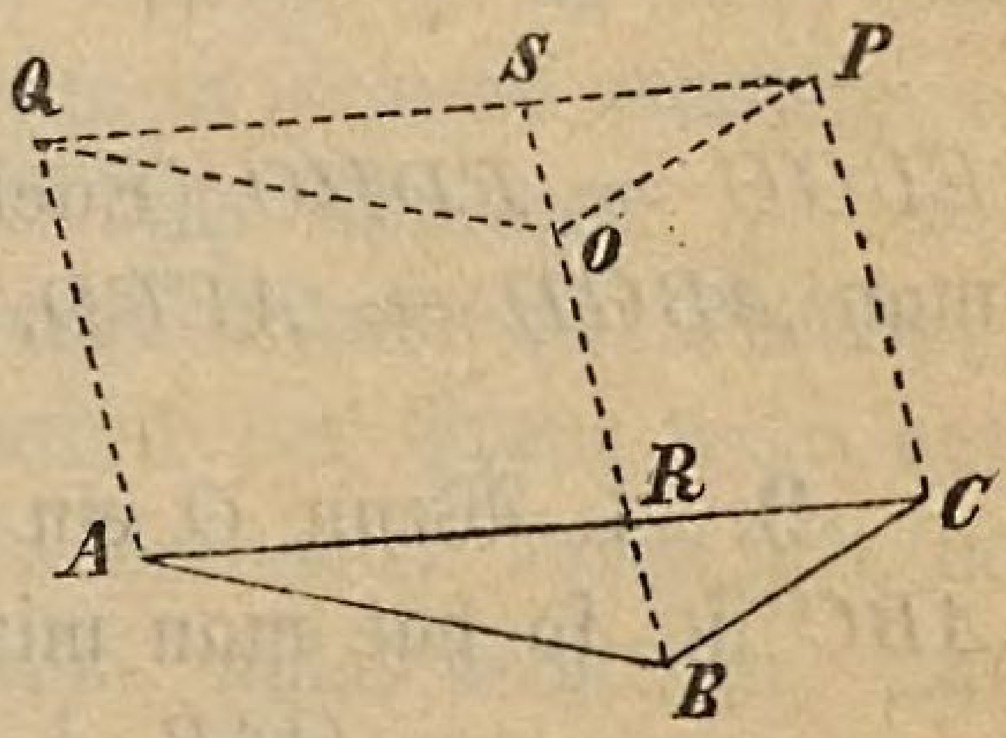
7. Der Perimeter einer geschlossenen Figur kann auf zwei verschiedene Arten durchlaufen werden. Der Ausdruck des Perimeters *ABCD* bedeutet den Weg von *A* über *B* bis *C*, *D*, *A*; der Ausdruck *ADCB* bedeutet den Weg von *A* über *D* bis *C*, *B*, *A*. Ein Punct, der zur Linken desjenigen liegt, der ein Stück des einen Weges zurücklegt, befindet sich zur Rechten desjenigen, der den entgegengesetzten Weg zurücklegt. Die Ausdrücke *ABCD*, *BCDA*, u. s. w. sind gleichbedeutend.

Die Fläche des Dreiecks *ABC* wird von der Geraden *AB* beschrieben, wenn diese um *A* sich so dreht, daß *B* den Weg von *B* nach *C* zurücklegt. Nimmt man die durch Drehungen in einem bestimmten Sinn (linksum) beschriebenen Flächen positiv, so hat man die in dem entgegengesetzten Sinn beschriebenen Flächen negativ zu nehmen. Hiernach sind die Ausdrücke einer Fläche *ABC*, *BCA*, *CAB* gleichbedeutend und von einerlei Zeichen, dagegen sind *ABC* und *ACB*, u. s. w. entgegengesetzt gleich.

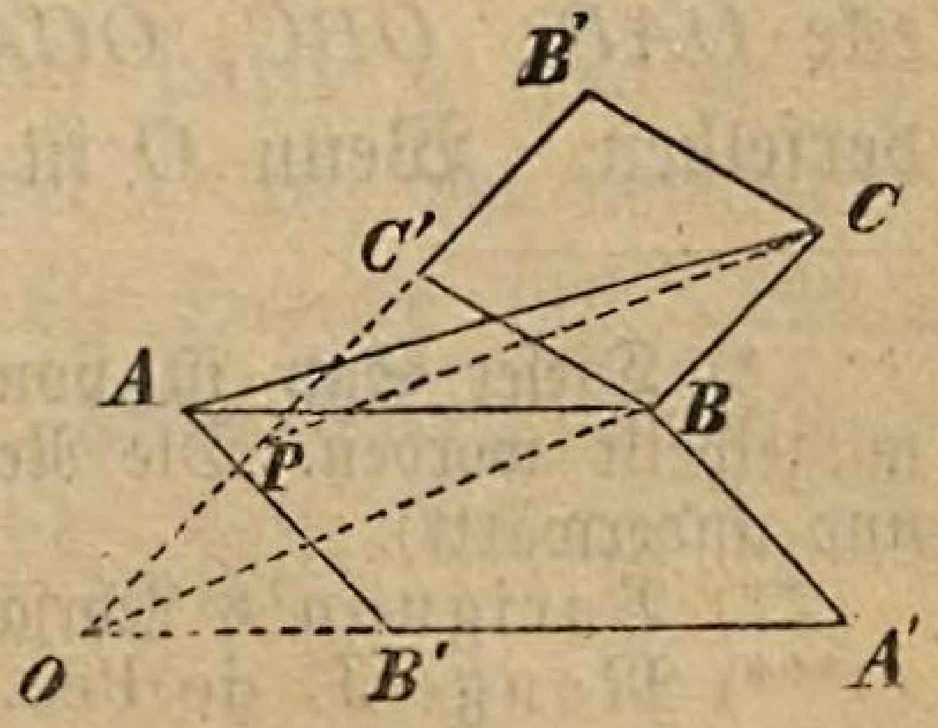
Wenn *O* ein beliebiger Punct auf der Ebene des Dreiecks *ABC* ist, und die Strecke *CP* mit *BO* einerlei Richtung und Länge hat, so ist

$$ABO + BCO = ACP$$

wobei die Dreiecke dieselben Zeichen oder die entgegengesetzten Zeichen haben, je nachdem sie von einerlei Sinn sind oder nicht (§. 7, 1).




B e w e i s. Vollendet man das Parallelogramm *ACPQ* und bezeichnet die Durchschnitte von *AC* und *PQ* durch *R* und *S*, so hat man *QABO* = *QARS*, *CPOB* = *CPSR* (2), folglich durch Addition *ABOQ* + *BCPO* = *ACPQ*, also auch *ABO* + *BCO* = *ACP*. Wenn *O* im Nebenwinkel des Winkels *CBA* liegt, so sind die Dreiecke *ABO* und *BCO* entgegengesetzten Sinnes und Zeichens; in der That ist *ACPQ* die Differenz von Parallelogrammen, die den Parallelogrammen *ABOQ* und *BCPO* gleich sind.



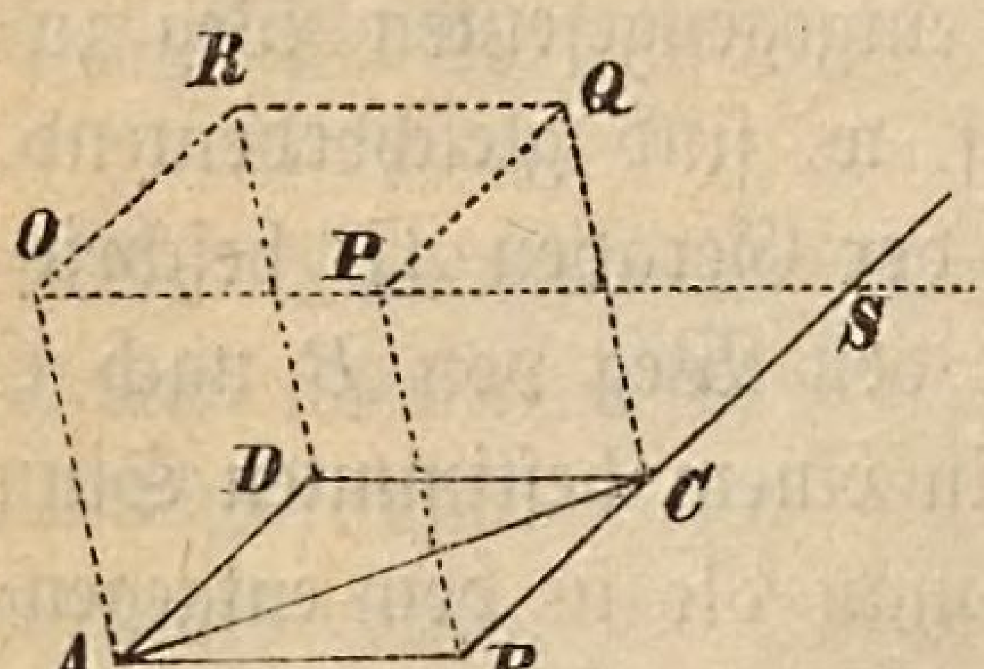

Wenn man auf zwei Seiten eines Dreiecks *AB*, *BC* Parallelogramme construirt, und den Durchschnitt der Seiten, die mit *AB* und *BC* parallel sind, durch *O* bezeichnet, so ist bei Be-

stimmung der Zeichen nach der obigen Regel die Summe der Parallelogramme einem Parallelogramme gleich, dessen auf einander folgende Seiten mit $AC$ und $BO$ einerlei Richtung und Länge haben. Denn die Parallelogramme sind 2mal so groß als die Dreiecke $ABO$ und $BCO$, u. s. w.*)

8. Wenn $O$ ein beliebiger Punct auf der Ebene des Parallelogramms $ABCD$ ist, so hat man mit Rücksicht auf die Regel der Zeichen (7)

$$ABO + ADO = ACO.^{**})$$

Beweis. Haben $BP$, $CQ$, $DR$ mit $AO$ einerlei Richtung und gleiche Länge, so sind $ABPO$, $BCQP$, $ACQO$ Parallelogramme und zwar (7)




$$ABPO + BCQP = ACQO.$$

Nun ist $BCQP$ von $ADRO$ an Größe und Sinn nicht verschieden, folglich

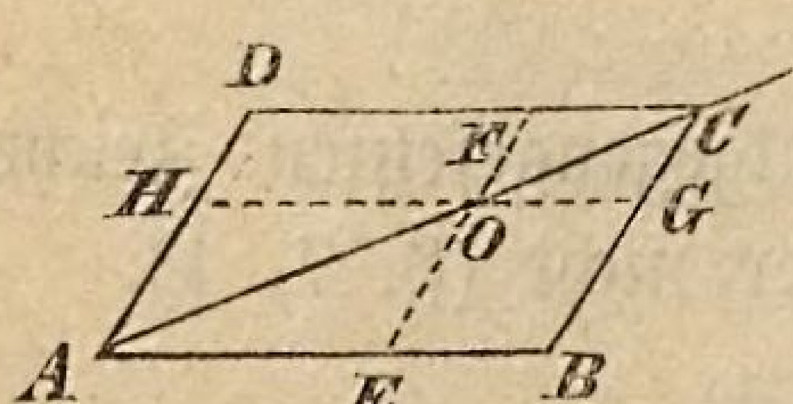
$$ABPO + ADRO = ACQO,$$

$$ABO + ADO = ACO.$$

Anmerkung. Für jeden Punct auf der Ebene des Parallelogramms $ABCD$ ist

$$ABO + CDO = \tfrac{1}{2}ABCD.$$

Wenn die parallel mit $AB$ durch $O$ gezogene Gerade die Seite $BC$ in $S$ schneidet, so ist $ABO + CDO = ABS + CDS = ABC$.




Wenn $O$ auf der Diagonale $AC$ liegt, so ist $ACO = 0$, $ABO = DAO$. Dies ergiebt sich unmittelbar, wenn man durch $O$ die Geraden $EF$ und $GH$ parallel mit $BC$ und $CD$ zieht. Dann ist $ABC = CDA$, $AEO = OHA$, $OGC = CFO$, folglich durch Subtraction $EBGO = FDHO$ (Eucl. I, 43). Durch Addition von $AEOH$ findet man $ABGH = AEFD$, $ABO = DAO$.

9. I. Wenn $O$ ein beliebiger Punct auf der Ebene des Dreiecks $ABC$ ist, so hat man mit Rücksicht auf die Regel der Zeichen

$$OAB + OBC + OCA = ABC.^{***})$$

Beweis. Wenn $O$ in dem Dreieck $ABC$ liegt, so sind die Dreiecke $OAB$, $OBC$, $OCA$ von einerlei Sinn, und $ABC$ ist die Summe derselben. Wenn $O$ in den Winkel $BAC$ jenseits $BC$ liegt, so ist $OBC$

---

*) Dieser Satz ist von Pappus (coll. math. IV, 1) in beschränkterer Weise mitgetheilt worden. Die Regel der Zeichen verdankt man Möbius (baryc. Calcul 17 und anderwärts).

**) Varignon's Lehrsatz. Mém. de Paris 1719 p. 66. Vgl. Möbius Statik 34.

***) Monge J. de l'éc. polyt. Cah. 15 p. 68. Möbius baryc. Calc. 18.

den Dreiecken $OAB$, $OCA$ entgegengesetzt, und man hat nach der Regel der Zeichen

$$OAB + OBC + OCA = OAB - OCB + OCA = ABC.$$

Wenn aber $O$ in dem Scheitelwinkel von $BAC$ liegt, so sind die Dreiecke $OAB$, $OCA$ dem Dreieck $OBC$ entgegengesetzt, und man hat nach der Regel der Zeichen

$$OAB + OBC + OCA = - OBA + OBC - OAC = ABC.$$

II. Wenn $ABC\,..\,MNA$ der Perimeter einer beliebigen geschlossenen Planfigur ist, so ist für jeden beliebigen Punct $O$ derselben Ebene die Summe der Dreiecksflächen

$$\Sigma = OAB + OBC + .. + OMN + ONA$$

von derselben Größe.

Beweis. Für einen andern Punct $P$ der Ebene hat man

$$\begin{aligned} PAB &= OAB + OBP + OPA \\ PBC &= OBC + OCP + OPB \\ &\ldots \\ PMN &= OMN + ONP + OPM \\ PNA &= ONA + OAP + OPN \end{aligned}$$

folglich durch Addition

$$PAB + PBC + .. + PMN + PNA = \Sigma$$

weil die Glieder der letzten Colonne den Gliedern der vorhergehenden Colonne entgegengesetzt gleich sind, $OBP + OPB = 0$ (7), u. s. w.

**10.** Der Verlauf eines Perimeters, besonders wenn dieser sich selbst schneidet, wird dadurch kenntlich gemacht, daß man den Perimeter auf einer Seite schattirt (sein „linkes Ufer" zur Linken dessen, welcher ihn dem gegebenen Ausdruck gemäß zurücklegt. Vergl. §. 2, 11). Ein sich selbst schneidender Perimeter theilt die Ebene in mehrere nebeneinander liegende Zellen, deren Perimeter sich selbst nicht schneiden, $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, .. und den von diesen Zellen ausgeschlossenen unendlichen Theil $\varphi_0$.

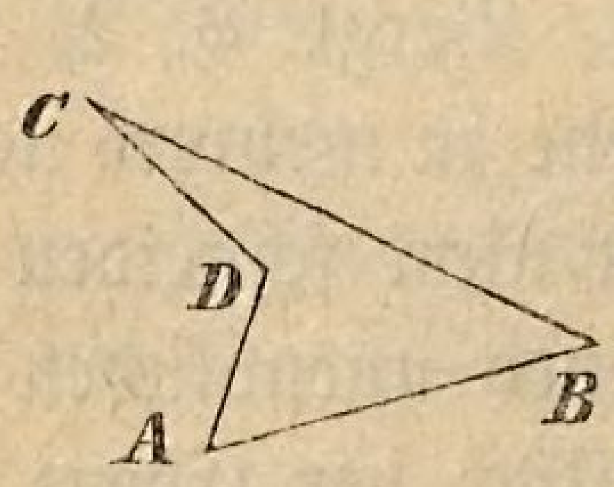
Ein bestimmtes unendlich kleines Flächenstück der Ebene wird von der Strecke $OA$ (9), während $A$ den gegebenen Perimeter durchläuft, im Allgemeinen mehrmal überstrichen, $m$mal linksum, $n$mal rechtsum, und hat demnach (7) in der Summe $\Sigma$ einen bestimmten Coefficienten $m - n$.

Wenn zwei unendlich kleine Flächenstücke derselben Zelle, zwischen denen der gegebene Perimeter nicht hindurchgeht, durch $\omega$ und $\omega'$ bezeichnet werden, und wenn der willkürliche Punct $O$ auf der verlängerten Geraden $\omega\omega'$ angenommen wird, so kann die Strecke $OA$ nicht $\omega$ überstreichen, ohne zugleich $\omega'$ zu überstreichen. Also haben $\omega$ und $\omega'$ in $\Sigma$ denselben Coefficienten, den Coefficienten der Zelle, in der $\omega$ und $\omega'$ liegen.

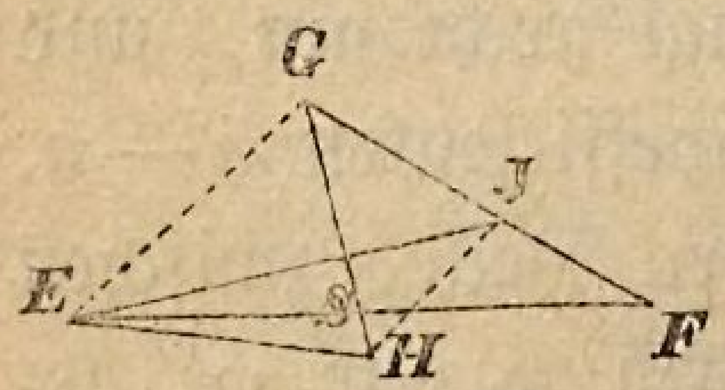
Wenn zwei unendlich kleine Flächenstücke benachbarter Zellen, zwischen denen der gegebene Perimeter einmal von $F$ nach $G$ hindurchgeht, durch $\omega$ und $\omega''$ bezeichnet werden, wenn $\omega''$ auf der schattirten, $\omega$ auf der hellen Seite des Perimeters $FG$ liegt und $O$ auf der verlängerten Geraden $\omega\omega''$ angenommen wird, so kann die Strecke $OA$ nicht $\omega$ überstreichen, ohne zugleich $\omega''$ zu überstreichen; dagegen wird $\omega''$ einmal allein ohne $\omega$ überstrichen, während $A$ das Stück $FG$ des Perimeters zurücklegt. Daher ist in $\Sigma$ der Coefficient von $\omega''$ auf der dunkeln Seite von $FG$ um 1 größer als der Coefficient von $\omega$ auf der hellen Seite, vorausgesetzt daß die positiven Flächen durch linksum gehende Drehungen beschrieben werden.

Indem man nun ausgehend von der unendlichen Fläche $\varphi_0$, deren Coefficient 0 ist, nach und nach in die einzelnen Zellen eintritt, bildet man aus dem Coefficienten der verlassenen Zelle den Coefficienten der betretenen Zelle durch Addition oder Subtraction von 1, je nachdem man den Perimeter von rechts nach links (von der hellen Seite nach der dunkeln) oder entgegengesetzt überschritten hatte. Bezeichnet man die Coefficienten der Zellen $\varphi_1$, $\varphi_2$, .. durch $c_1$, $c_2$, . . , so hat man endlich vollständig $\Sigma = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots$

Die von der Lage des Punctes $O$ unabhängige Summe $\Sigma$ der Flächen, welche die Strecke $OA$ überstreicht, während der Punct $A$ den gegebenen Perimeter durchläuft, ist der von dem Perimeter eingeschlossenen Fläche gleich, wenn der Perimeter sich selbst nicht schneidet und nicht mehr als eine Zelle bildet ($c_1 = 1$, $\Sigma = \varphi_1$). Dieselbe Summe $\Sigma$ dient daher auch zur Definition der Fläche einer mehrzelligen Figur, deren Perimeter sich selbst schneidet.*)



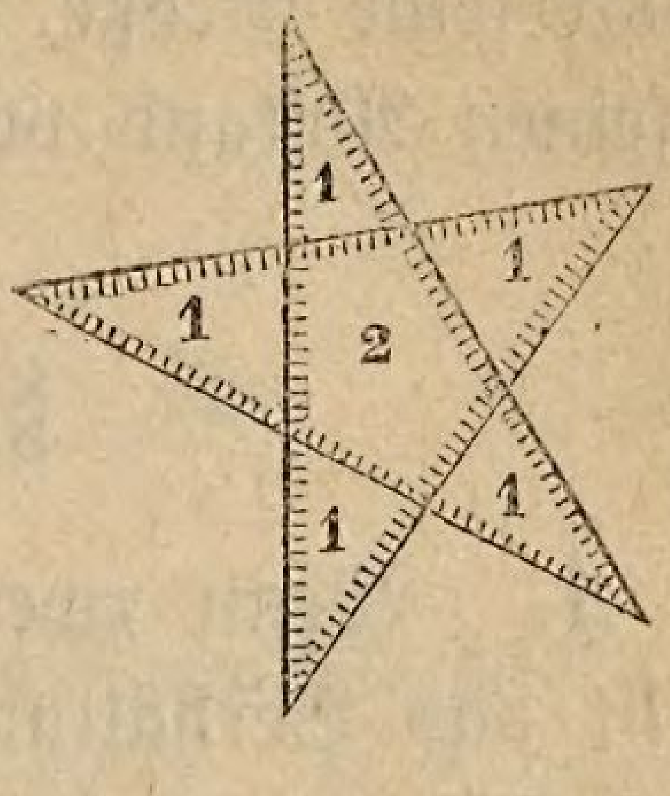

Als Fläche des Vierecks $ABCD$ ergiebt sich die Summe $ABC + ACD$ d. i. $ABC - ADC$, wenn man den willkürlichen Punct $O$ mit $A$ vereinigt. Als Fläche des Vierecks $EFGH$ ergiebt sich die Differenz der Zellen $SFG - SEH$, wenn man $O$ nach dem Durchschnitt $S$ von $EF$ und $GH$ verlegt. Diese Fläche ist Null, wenn $EG$ und $FH$ parallel sind (2). Zieht man $HI$ parallel mit $EG$, so ist $EHG = EIG$, also $EFGH = EFI$ (3). Auch ist das Viereck $EFGH$ einem Dreieck gleich, in

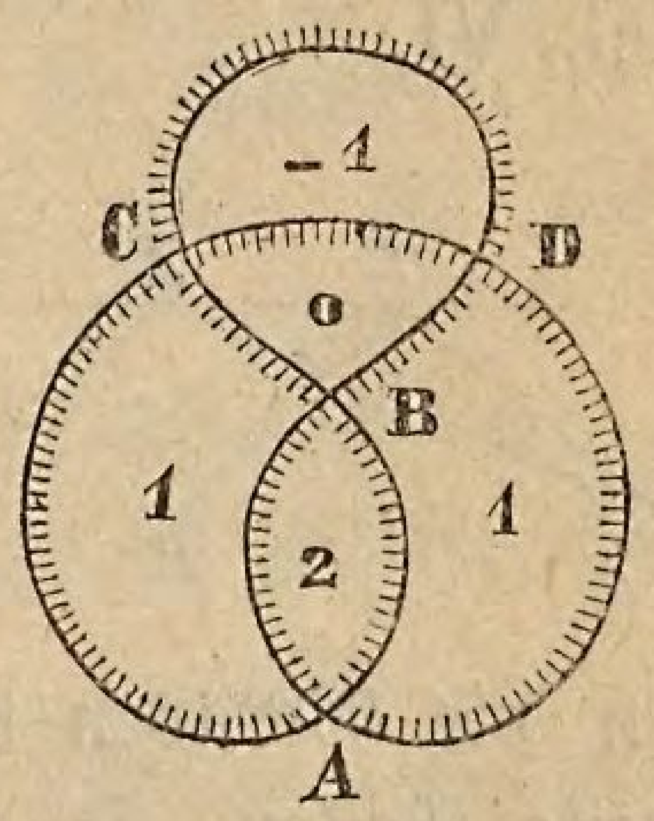



*) Ueber die Flächen von Figuren, deren Perimeter sich selbst schneiden, sind die ersten Aufschlüsse von Meister (Comm. Gott. 1769 p. 148) gegeben worden; gelegentliche Aeußerungen finden sich bei Lexell (Acta Petrop. 1781, I p. 125. 1782, I p. 91) und L'Huilier de relatione mutua p. 23. Alle Arten von Polygonen

welchem zwei Seiten mit den Diagonalen $EG$ und $FH$ einerlei Richtung und Länge haben (7).

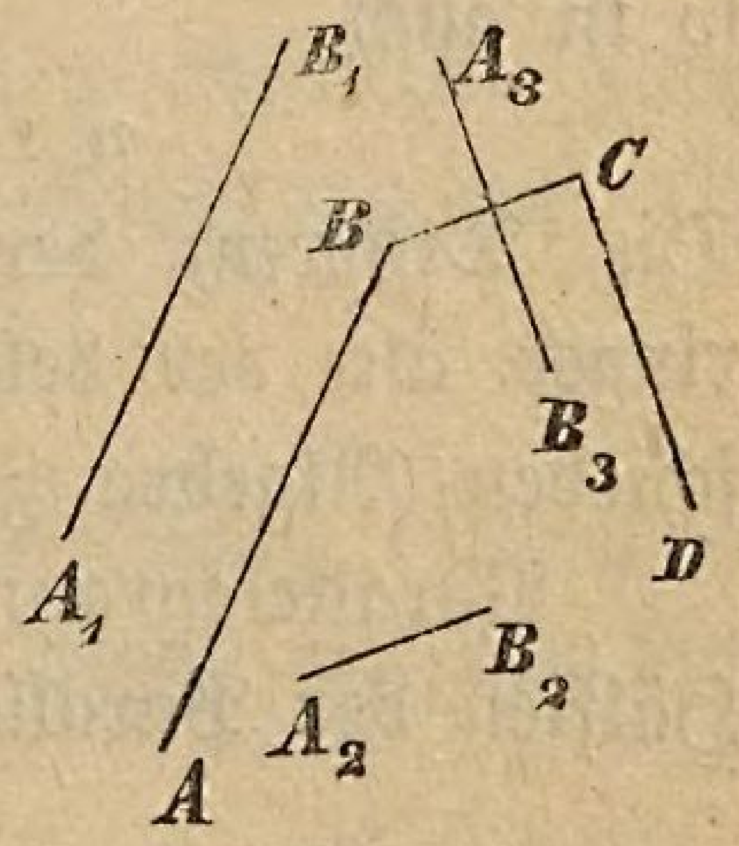
Eine Zelle, deren Coefficient 2 ist, wird von Zellen umgeben, deren jede den Coefficienten 1 hat, u. s. w. Daher kann die Fläche einer Figur auf eine bestimmte Art durch einfache Zellen (mit dem Coefficienten 1 oder —1) ausgedrückt werden.*) Die Perimeter dieser Zellen umfassen einfach alle Theile des gegebenen Perimeters; die schattirte Seite des Perimeters einer solchen Zelle ist zugleich die schattirte Seite von den Theilen des ganzen Perimeters, welche den Perimeter der Zelle ausmachen. Das Sternfünfeck (Pentagramm, Drudenfuß) besteht aus zwei Zellen, dem innern Fünfeck und dem äußern Zehneck. Die runde Figur hat die Zellen $ABA$, $ADBCA$, $CDC$; die dritte Zelle, bei der die schattirte Seite des Perimeters außen liegt, ist negativ.




**11.** Wenn die gegebenen Strecken $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$, .. der Reihe nach mit den Seiten eines Polygons von gleicher Länge und Richtung sind, so ist für jeden beliebigen Punct $O$ die Summe der Flächen $A_1B_1O + A_2B_2O + A_3B_3O +$ .. von derselben Größe Wenn aber jene Bedingung nicht erfüllt wird, so ist dieselbe Summe für alle Puncte $O$, welche von einer bestimmten Geraden gleiche Abstände haben, von derselben Größe.**)

Beweis. Aus einem willkürlich angenommenen Punct $A$ ziehe man $AB$, $BC$, $CD$, .., $FG$ der Reihe nach von gleicher Länge und Richtung mit den gegebenen Strecken $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$, .., so daß $A_1B_1BA$, $A_2B_2CB$, .. Parallelogramme sind (§. 6, 3). Dann ist (8)




$$A_1B_1O = \tfrac{1}{2}A_1B_1BA + ABO$$
$$A_2B_2O = \tfrac{1}{2}A_2B_2CB + BCO$$
$$A_3B_3O = \tfrac{1}{2}A_3B_3DC + CDO$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

umfaßt die von Gauß in Schumachers Uebersetzung von Carnot's Géom. de pos. II p. 362 gegebene Formel zur Berechnung ihrer Flächen. Eingehende Behandlung von Grund aus hat dieser Gegenstand durch Möbius erhalten (Baryc. Calc. 165 Anm. Statik 45. Berichte der Leipz. Ges. d. W. 1865 p. 42).

*) Vergl. die aus Jacobi's Nachlaß von Hermes mitgetheilten Bemerkungen. Crelle's J. 65 p. 173.

**) Apollonius im 1ten Buch der ebenen Oerter. Vergl. Simsons Bearbeitung

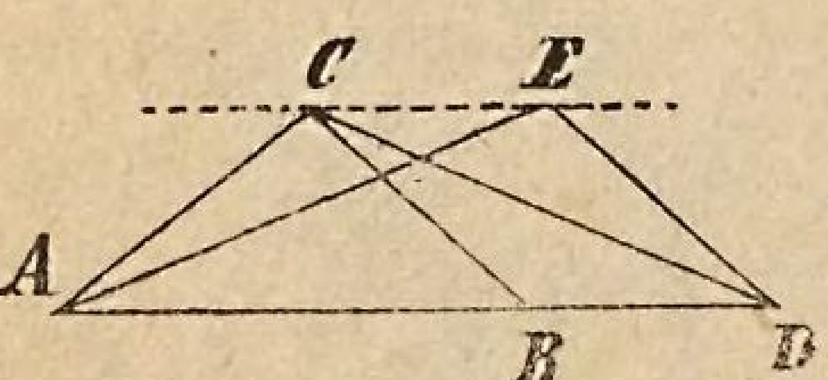
folglich (10)

$$A_1B_1O + A_2B_2O + \ldots = \tfrac{1}{2}A_1B_1BA + \tfrac{1}{2}A_2B_2CB + \ldots$$
$$+ ABC \ldots FG + AGO.$$

Dieser Werth ist unabhängig von $O$, wenn $G$ mit $A$ zusammenfällt; er behält seine Größe, so lange als das Dreieck $AGO$ seine Fläche, mithin $O$ seinen Abstand von der Strecke $AG$ behält.

## §. 10. Flächenmessung.

1. Wenn zwei Dreiecke (Parallelogramme) gleiche Höhen haben, so ist das Verhältniß ihrer Flächen dem Verhältniß ihrer Basen gleich. Eucl. VI, 1.




Beweis. Das Verhältniß der Flächen $ABC : ADE$ ist dem Verhältniß $ABC : ADC$ gleich, weil nach der Voraussetzung die Dreiecke $ADE$, $ABC$, $ADC$ gleiche Höhen, folglich $ADE$ und $ADC$ gleiche Flächen haben (§. 9, 2). Zieh man die Geraden von $C$ nach den Puncten, welche $AD$ in $m$ gleiche Theile theilen, so theilt man $ADC$ in $m$ Dreiecke von gleichen Basen und Höhen, also auch von gleichen Flächen. Wenn nun $AB$ den $m$ten Theil von $AD$ $n$mal enthält, so enthält auch $ABC$ den $m$ten Theil von $ADC$ $n$mal, d. h.

$$ABC : ADC = n : m = AB : AD.$$

Wenn aber $AB$ den $m$ten Theil von $AD$ mehr als $n$mal und weniger als $(n + 1)$mal enthält d. h.

$$n : m < AB : AD < n + 1 : m$$

so ist auch

$$n : m < ABC : ADC < n + 1 : m$$

Die Differenz der Verhältnisse $(ABC : ADC) - (AB : AD)$ ist geringer als der beliebig kleine Bruch $1 : m$, also von Null nicht verschieden (Algebra §. 1, 2).

Parallelogramme verhalten sich zu einander, wie Dreiecke, welche Hälften der Parallelogramme sind.

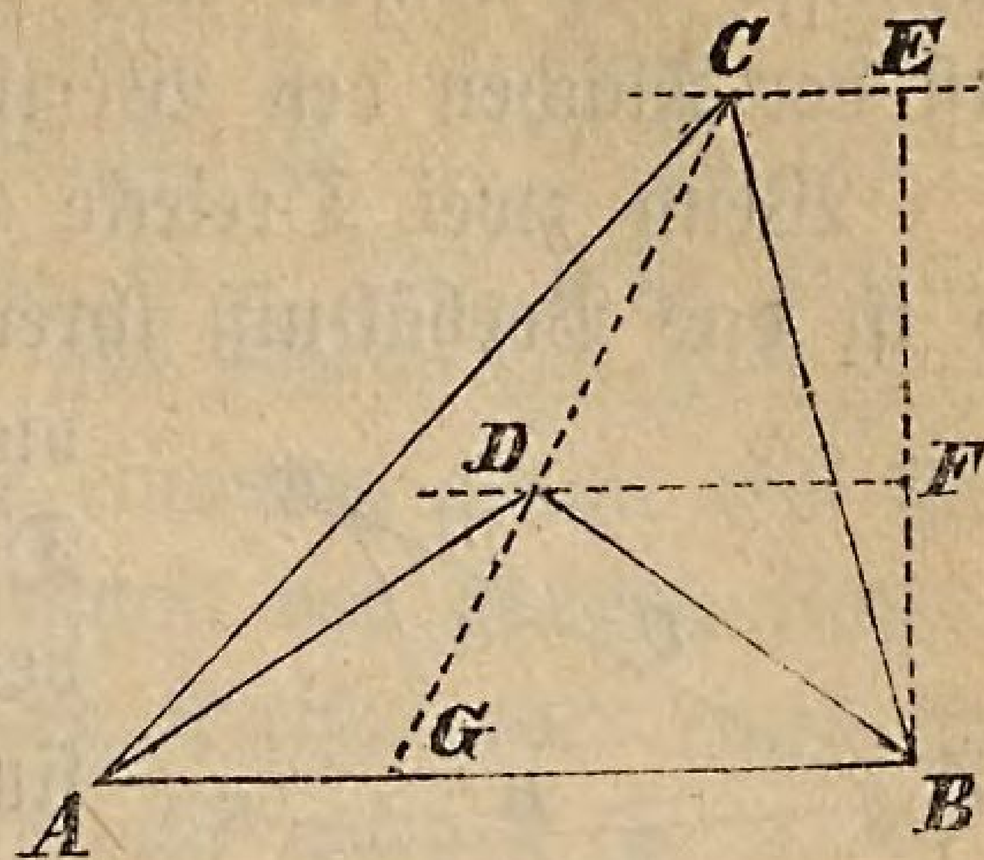
2. Wenn zwei Dreiecke (Parallelogramme) gleiche Basen haben, so ist das Verhältniß ihrer Flächen dem Verhältniß ihrer Höhen gleich.

Beweis. Zieht man die Normale zur Basis $AB$ durch $B$, und die Geraden $CE$, $DF$ parallel mit $AB$, so erhält man $ABE = ABC$,

---

übers. von Camerer p. 92 ff. Denselben Satz hat L'Huilier polygonométrie 1789 p. 92 genauer behandelt, erschöpfend aber erst Möbius Statik 46.

$ABF = ABD$ (§. 9, 2). Nun ist $BEA : BFA = BE : BF$ (1), folglich $ABC : ABD = BE : BF$.




Zusätze. Nach §. 9, 9 hat man

$$\frac{ABD}{ABC} + \frac{BCD}{BCA} + \frac{CAD}{CAB} = 1$$

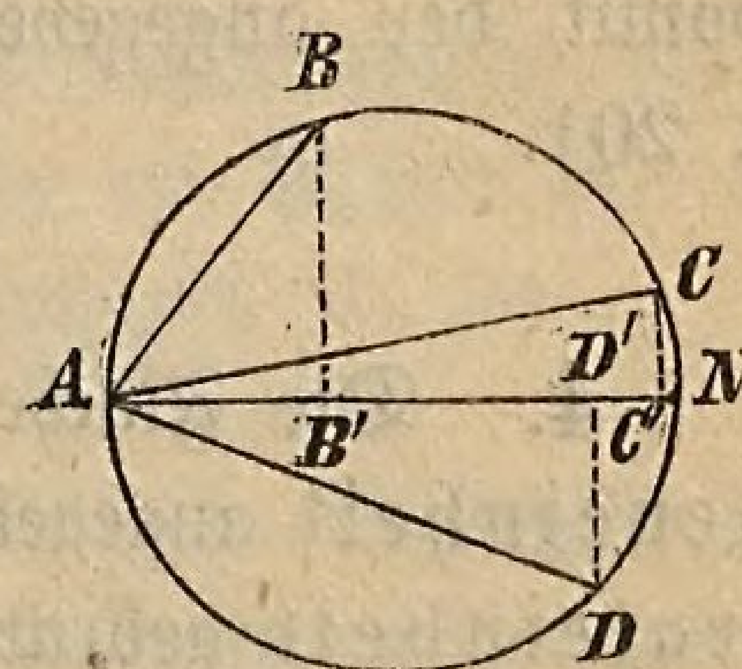
d. h. wenn man die Abstände eines beliebigen Punctes von den Seiten eines Dreiecks der Reihe nach durch die parallelen Höhen dividirt, so ist die Summe der Quotienten = 1.

Wenn zwei Dreiecke $ABC$, $ABD$ die Basis $AB$ gemein haben, so ist das Verhältniß ihrer Flächen dem Verhältniß gleich, nach welchem die Strecke $CD$ durch $AB$ getheilt wird. Wenn die Strecke $CD$ von $AB$ in $G$ geschnitten wird, so ist $ABC : ABD = CG : DG$ zufolge der Gleichungen (1)

$$AGC = (CG : DG)\, AGD, \quad BGC = (CG : DG)\, BGD.$$

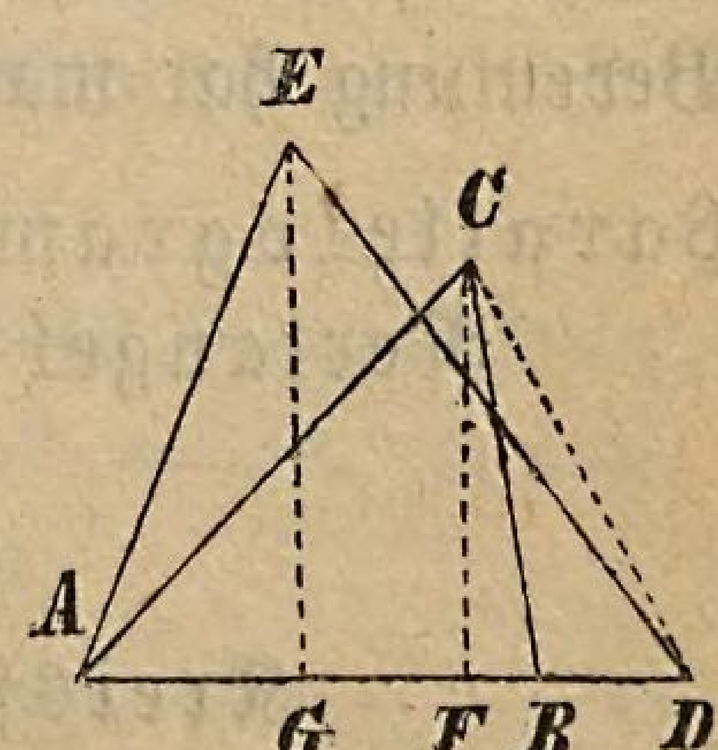
Demnach ist $CG : DG = EB : FB$, wie §. 8, 4 aus andern Gründen gefunden wurde.

Die Quadrate der von einem Puncte eines Kreises ausgehenden Sehnen verhalten sich zu einander der Reihe nach wie die Strecken, die auf dem Diameter des Punctes von den Normalen aus den Endpuncten der Sehnen abgeschnitten werden. Wenn nämlich $AN$ ein Diameter ist, so sind die Dreiecke $ABN$, $ACN$, $ADN$ rechtwinkelig (§. 4, 2). Sind nun $BB'$, $CC'$, $DD'$ normal zu $AN$, so sind die Quadrate von $AB$, $AC$, $AD$, $AN$ den Rectangeln auf der Basis $AN$ gleich, deren Höhen $AB'$, $AC'$, $AD'$, $AN$ sind (§. 9, 5). Diese Rectangel haben eine gemeinschaftliche Basis und verhalten sich zu einander, wie $AB'$, $AC'$, $AD'$, $AN$.




3. Das Verhältniß der Flächen von zwei Dreiecken (Parallelogrammen) ist das Product des Verhältnisses ihrer Basen mit dem Verhältniß ihrer Höhen. Eucl. VI, 23.

Beweis. Indem man das Dreieck $ADC$ zu Hülfe nimmt, welches mit $ABC$ gleiche Höhe, mit $ADE$ gleiche Basis hat, findet man



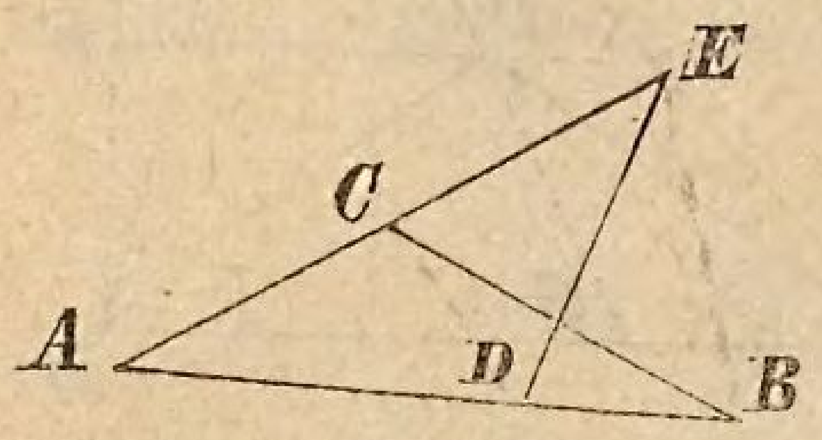

$$ABC : ADC = AB : AD \quad (1)$$
$$ADC : ADE = FC : GE \quad (2)$$

folglich durch Multiplication (Algebra §. 1, 3)

$$ABC : ADE = (AB : AD)(FC : GE).$$

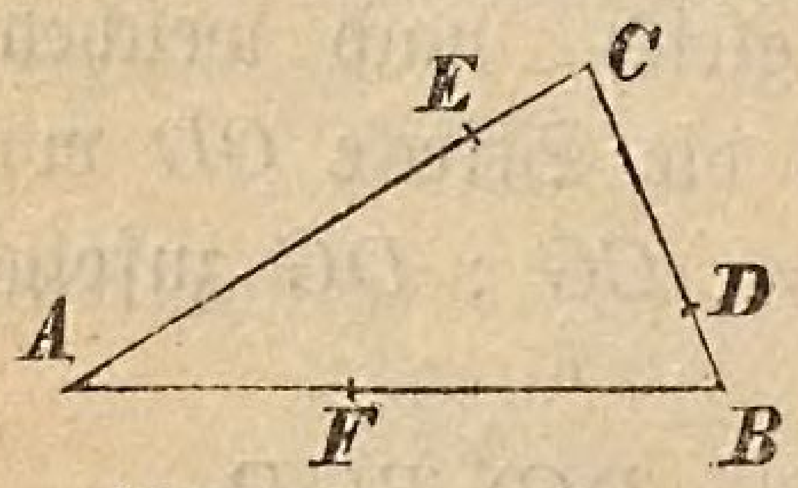
Zusätze. Wenn bei zwei Dreiecken (Parallelogrammen) die Verhältnisse der Basen und der Höhen reciprok sind, so hat das Verhältniß der Flächen den Werth 1, d. h. die Flächen sind einander gleich.

Wenn zwei Dreiecke (Parallelogramme) einen Winkel gleich haben, so ist das Verhältniß ihrer Flächen das Product der Verhältnisse, welche die jenen Winkel einschließenden Seiten des einen Dreiecks zu den den gleichen Winkel einschließenden Seiten des andern Dreiecks haben. Man findet mit Hülfe des Dreiecks $ADC$




$$ABC : ADE = (AB : AD)(AC : AE).$$

Wenn dem Dreieck $ABC$ das Dreieck $DEF$ so eingeschrieben ist, daß $BD = \alpha . BC$, $CE = \beta . CA$, $AF = \gamma . AB$, so ist




$$DEF : ABC = \alpha\beta\gamma + (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma).$$

Denn man hat

$$ADE : ABC = (ADE : ADC)(ADC : ABC) = (1-\beta)(1-\beta),$$
$$AEF : ABC = \quad - \quad (1-\beta)\gamma,$$
$$AFD : ABC = (AFD : ABD)(ABD : ABC) = \gamma\alpha.$$

Nun ist $DEF = ADE + AEF + AFD$ (§. 9, 9), folglich

$$DEF : ABC = (1-\beta)(1-\alpha) - (1-\beta)\gamma + \gamma\alpha,$$

womit der angegebene Werth stimmt. Vergl. Steiner Crelle's J. 3 p. 201.

**4.** Die Fläche einer Figur wird durch ihr Verhältniß zur Flächeneinheit angegeben. Als Flächeneinheit wird gewöhnlich die Quadrateinheit gebraucht, d. h. ein Quadrat, dessen Seite die Längeneinheit ist. Denn ein Quadrat ist nicht nur als reguläre Figur durch eine Seite bestimmt, sondern es gehört auch zu den Parallelogrammen, deren Verhältnisse zu einander nach (3) gefunden werden. Die Angabe der Fläche einer Figur heißt die Quadratur (τετραγωνισμός) der Figur.

Man sagt abkürzend Größe statt Verhältniß der Größe zur Einheit, mithin Figur statt Verhältniß ihrer Fläche zur Quadrateinheit, Basis statt Verhältniß der Basis zur Längeneinheit, u. s. f. In dieser Bedeutung hat man (vergl. Heron's geodätische Schriften)

Parallelogramm = Basis × Höhe = Länge × Breite,

Rectangel = Product von 2 folgenden Seiten,

Quadrat = $(\text{Seite})^2$,

Dreieck = $\frac{1}{2}$Basis × Höhe,

Kreisfläche = $\frac{1}{2}$Peripherie × Radius,

Kreissector = $\frac{1}{2}$Bogen × Radius.

Beweis. Das Verhältniß eines Parallelogramms zur Quadrateinheit wird gefunden, indem man das Verhältniß der Basis des Parallelogramms zur Längeneinheit mit dem Verhältniß der Höhe des Parallelogramms zur Längeneinheit multiplicirt (3). Bei dem Parallelogramm werden Basis und Höhe auch Länge und Breite desselben genannt. Bei einem Quadrat sind Länge und Breite einander gleich. Ein Dreieck hat halb so viel Fläche, als ein Parallelogramm von gleicher Basis und von gleicher Höhe (§. 9, 2). Die Fläche des Kreises oder eines Kreissectors kann als Fläche eines Dreiecks aufgefaßt werden (§. 9, 4).

Wenn die Basis und die Höhe des Parallelogramms in Fußen gegeben sind, so erhält man die Fläche desselben in Quadratfußen. Um die Fläche des Parallelogramms in Quadratzollen zu finden, nimmt man die Basis und die Höhe desselben in Zollen, u. s. w. Da ein Fuß 12 Zoll hat, so hat ein Quadratfuß $12^2$ d. i. 144 Quadratzoll.

5. Das Rectangel aus zwei Strecken (§. 9, 5) wird in der angegebenen Bedeutung (4) durch das Product der Strecken ausgedrückt. Umgekehrt kann das Product von zwei Strecken, d. i. das Product ihrer Verhältnisse zur Längeneinheit, als Fläche eines Rectangels vorgestellt werden.

Das Rectangel, dessen Basis $AB + BC$ und dessen Höhe $AD$ ist, ist die Summe der Rectangel, von denen das eine die Seiten $AB$ und $AD$, das andere die Seiten $BC$ und $AD$ hat. Folglich ist (4)

$$(AB + BC) \,.\, AD = AB \,.\, AD + BC \,.\, AD$$

in Uebereinstimmung mit den Regeln der arithmetischen Multiplication (Allg. Arithm. §. 9). Diese Regeln wurden im Alterthum geometrisch durch Flächenvergleichung abgeleitet (Eucl. II).

Die Formel für die Fläche eines Parallelogramms lehrt aus der Fläche und Basis des Parallelogramms seine Höhe berechnen. Wenn die Fläche $f$ Quadrateinheiten, die Basis $a$ Längeneinheiten hat, so hat die Höhe $(f : a)$ Längeneinheiten.

Der Pythagoreische Lehrsatz (§. 9, 5) enthält die Gleichungen

$$AC^2 = AD \,.\, AB, \quad BC^2 = DB \,.\, AB,$$
$$AC^2 + BC^2 = (AD + DB) \,.\, AB = AB^2,$$
$$DC^2 = AD \,.\, DB,$$

auf welche sich Berechnungen gründen lassen. Haben die Catheten $a$, $b$, die Hypotenuse $c$ Längeneinheiten, so ist $a^2 + b^2 = c^2$, folglich

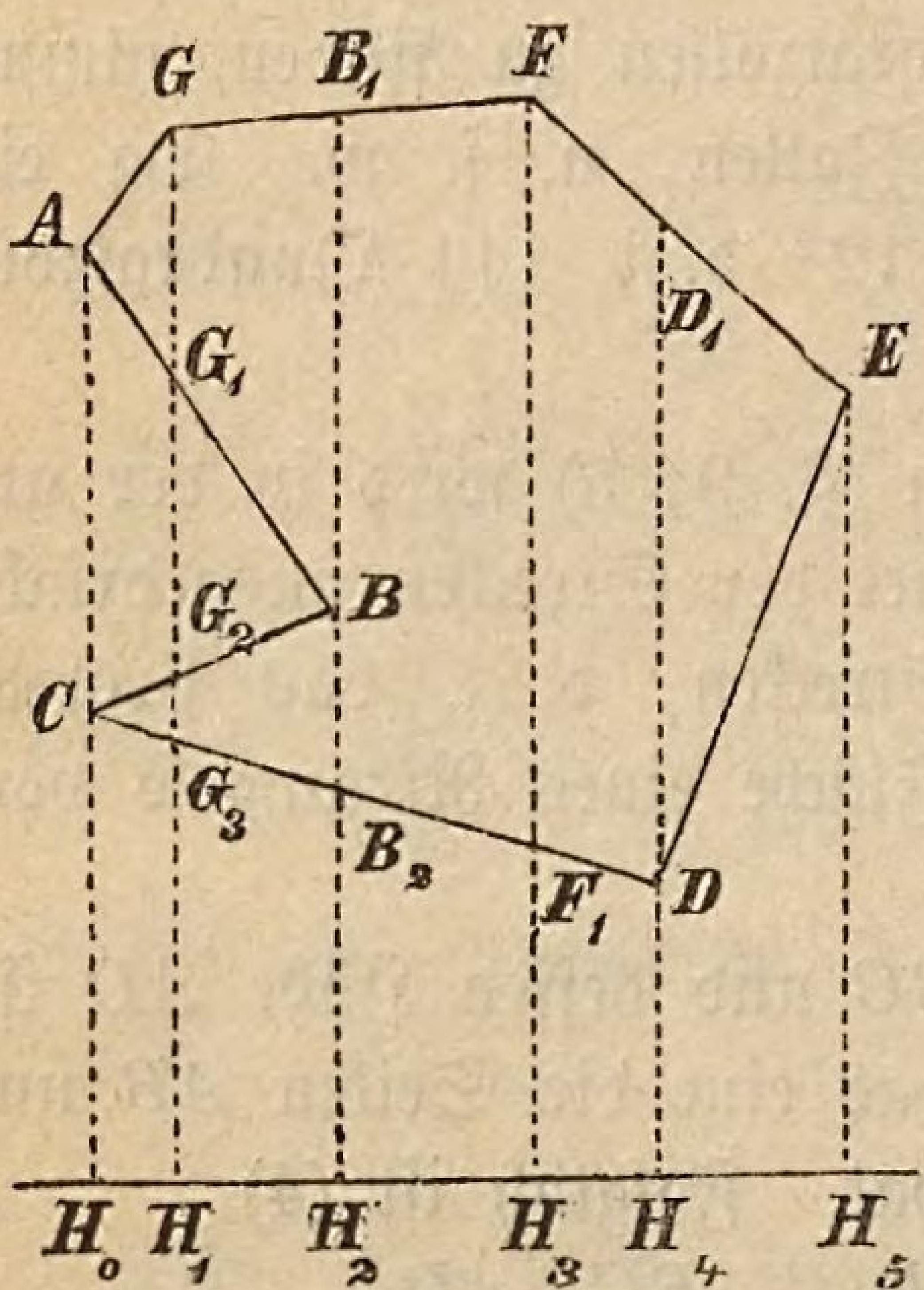
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}.$$

Hat die Seite eines Quadrats $a$ Längeneinheiten, so hat die Diagonale $\sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$ Längeneinheiten. Das Verhältniß der Diago-

nale zur Seite eines Quadrats ist $\sqrt{2}$, mithin irrational; die genannten Strecken sind incommensurabel (Algebra §. 1, 1).

Hat die Seite eines gleichseitigen Dreiecks $a$ Längeneinheiten, so hat die Höhe $\sqrt{a^2-(\frac{1}{2}a)^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$ Längeneinheiten, und die Fläche $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ Quadrateinheiten.

6. Die Fläche eines Polygons wird gefunden, indem man durch seine Eckpuncte Parallelen von beliebiger Richtung zieht, davon jede Strecke, die innerhalb des Polygons liegt, mit dem Abstand der folgenden Parallele von der vorhergehenden multiplicirt, und die Summe der Producte durch 2 dividirt.*) $ABCDEFG = \frac{1}{2}\{GG_1 + G_2G_3)\;H_0H_2 + B_1B_2\,.\,H_1H_3 + FF_1\,.\,H_2H_4 + D_1D\,.\,H_3H_5\}$.




Beweis. Die Dreiecke $G_1GA$, $GG_1B_1$ an der Basis $GG_1$, und die Dreiecke $G_3G_2C$, $G_2G_3B$ an der Basis $G_2G_3$ haben die Höhen $H_0H_1$, $H_1H_2$; ihre Summe ist (4)

$$\tfrac{1}{2}(GG_1 + G_2G_3)\,.\,H_0H_2.$$

Ebenso findet man für die an der Basis $B_1B_2$ liegenden Dreiecke die Summe $BB_1G_1 + B_2BG_3 + B_1B_2F = \frac{1}{2}B_1B_2\,.\,H_1H_3$, ferner $F_1FB_2 + FF_1D_1 = \frac{1}{2}FF_1\,.\,H_2H_4$, u. s. w.

7. Für jeden Punct der Ebene findet man, wenn man seine Abstände von den Seiten eines Polygons der Reihe nach mit den Seiten multiplicirt und die Producte summirt, dieselbe Summe, nämlich die doppelte Fläche des Polygons, vorausgesetzt daß die Zeichen der Producte mit den Zeichen der Dreiecke übereinstimmen, auf welche die Producte sich beziehen (§. 9, 10).

Ist das Polygon gleichseitig, so findet man für jeden Punct der Ebene, wenn man seine Abstände von den Seiten gemäß der obigen Regel summirt, dieselbe Summe.

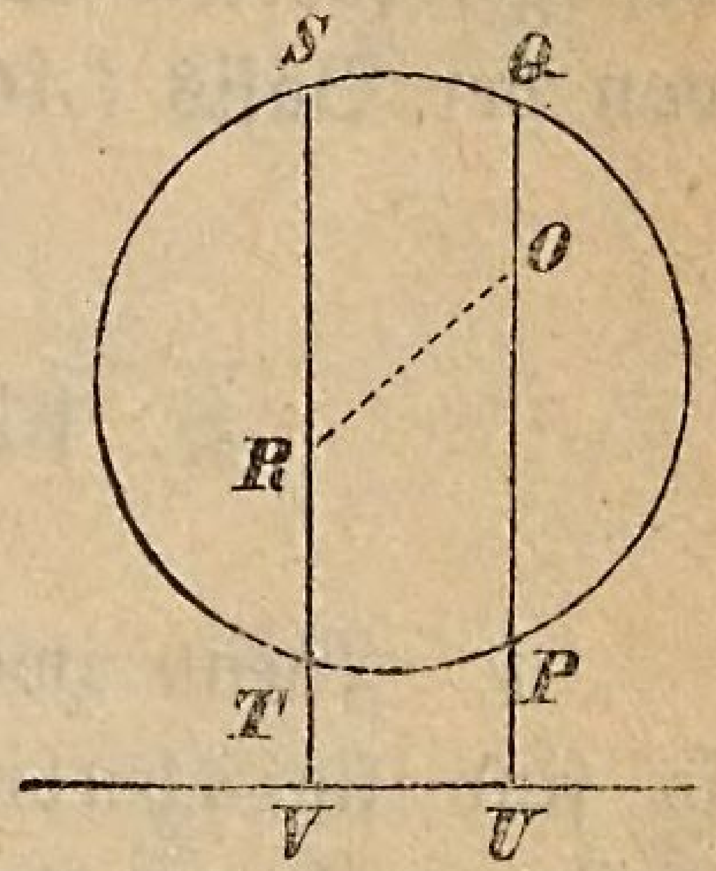
---

*) Die Theilung einer Fläche durch Parallelen zum Zwecke ihrer Quadratur kommt schon bei Archimedes vor. Die obige einfache Regel wird indessen in J. T. Mayer's pract. Geom. III, §. 280 und Meier Hirsch geom. Aufg. I, §. 25 bei Behandlung dieses Problems noch nicht angetroffen; sie ist aber aus der Formel ableitbar, welche Gauß für die Fläche eines Polygons in Schumachers Uebersetzung von Carnot's géom. de pos. II p. 362 gegeben hat.

Wenn die Normalen aus einem Punct $O$ zu den Seiten eines gleichseitigen Polygons von einem Kreise geschnitten werden, die erste in $P_1$ und $Q_1$, die zweite in $P_2$ und $Q_2$, . ., so ist

$$OP_1 + OP_2 + \ldots = OQ_1 + OQ_2 + \ldots,$$

vorausgesetzt, daß die Zeichen sowohl von $OP_1$, $OP_2$, . ., als auch von $OQ_1$, $OQ_2$, . . mit den Zeichen der Dreiecke (§. 9, 7) übereinstimmen, welche $O$ mit den Seiten des Polygons bildet.*) Bestimmt man den Punct $R$ so, daß das Centrum des Kreises die Mitte von $OR$ ist, und zieht man durch $R$ die Sehne $ST$ parallel mit $PQ$, so sind $S$ und $T$ die Gegenpuncte von $P$ und $Q$, weil die Sehnen gleiche Abstände vom Centrum, folglich gleiche Länge und gleiche Bogen haben. Daher sind die Strecken $OP$, $OQ$ den Strecken $RS$, $RT$ gleich und die Winkel $QPT$, $PTS$ recht. Wenn ferner die parallelen Sehnen normal zu $UV$ stehn, so ist $UVTP$ ein Rectangel und $UP$, $VT$ sind einander gleich. Liegen nun $U_1$ und $V_1$, $U_2$ und $V_2$, . . auf den Seiten eines gleichseitigen Polygons, so ist nach dem Obigen




$$OU_1 + OU_2 + OU_3 + \ldots = RV_1 + RV_2 + RV_3 + \ldots,$$

mithin, weil $U_1P_1 = V_1T_1$, u. s. w.

$$OP_1 + OP_2 + OP_3 + \ldots = RT_1 + RT_2 + RT_3 + \ldots$$
$$= OQ_1 + OQ_2 + OQ_3 + \ldots$$

8. Es seien $l_1$, $l_2$, $l_3$, . . gegebene Gerade, $c_1$, $c_2$, $c_3$, . . gegebene Zahlen, $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$, . . Strecken von $l_1$, $l_2$, $l_3$, . ., die sich der Reihe nach wie die Zahlen $c_1$, $c_2$, $c_3$, . . verhalten, $p_1$, $p_2$, $p_3$, . . die Abstände eines beliebigen Punctes $O$ von den gegebenen Geraden, deren Zeichen mit den Zeichen der Dreiecke $A_1B_1O$, $A_2B_2O$, $A_3B_3O$, . . übereinstimmen. Wenn nun die Summe $c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3 + \ldots$ von gegebener Größe sein soll, so giebt es im Allgemeinen unendlich viel Puncte $O$, die Puncte einer bestimmten Geraden, welche der Forderung genügen.**)

Beweis. Nach den gemachten Voraussetzungen ist (4) $c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3 + \ldots = 2(A_1B_1O + A_2B_2O + A_3B_3O + \ldots)$. Die Summe

---

*) Besondere Fälle dieses Satzes haben Jacob Gregory und August bekannt gemacht. Vergl. Kunze Planim. p. 166.

**) Apollonius (oben §. 9, 11). Vergl. Meier Hirsch geom. Aufg. II, 251. Den besondern Fall, in welchem 3 Gerade gegeben, und die zugehörigen Zahlen Einheiten sind, hat Timmermanns (Gerg. Ann. 18 p. 217) betrachtet, und C. F. A. Jacobi Entfernungsörter des Dreiecks, Progr. der Landesschule Pforta 1851 und 1854) weit ausgeführt.

$2(A_1B_1O + \ldots)$ kann insbesondere einen von $O$ unabhängigen Werth haben (§. 9, 11); dann ist die Forderung von solchen Puncten $O$, für welche die Summe $c_1p_1 + \ldots$ einen beliebig gegebenen Werth erhielte, sich selbst widersprechend. Im Allgemeinen hat aber die Summe $2(A_1B_1O + \ldots)$ einen Werth, der das von $O$ mit einer bestimmten Strecke $(AG)$ gebildete Dreieck um eine bestimmte Größe übertrifft. Bei hinreichender Höhe dieses Dreiecks hat also auch die Summe $c_1p_1 + \ldots$ den geforderten Werth, und behält denselben, wenn $O$ seinen Abstand von der Basis $(AG)$ behält.

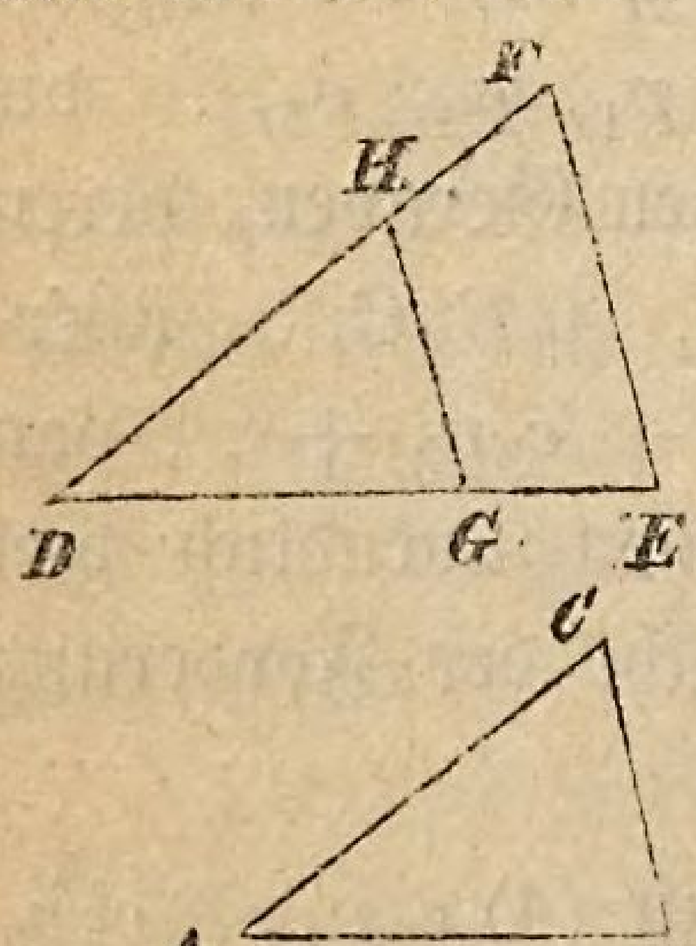
## §. 11. Aehnlichkeit der Dreiecke.

1. Wenn zwei Dreiecke zwei Winkel der Reihe nach gleich haben, so sind sie ähnlich, d. h. die Seiten des einen Dreiecks haben der Reihe nach zu den Seiten des andern Dreiecks, welche den gleichen Winkeln gegenüberliegen, gleiche Verhältnisse, und das Verhältniß der Flächen ist das Quadrat des Verhältnisses von Seiten der Dreiecke, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen. Eucl. VI, 4—7. 19.

Wenn der Winkel $A = D$, $B = E$, so ist $ABC \sim DEF$ (vergl. §. 5, 1) d. h.

$BC : EF$ gegenüber den gleichen Winkeln $A$ und $D$
$= CA : FD$ " " " " $B$ und $E$
$= AB : DE$ " " " " $C$ und $F$

und $ABC : DEF = (BC : EF)^2$.




Beweis. Macht man auf $DE$ die Strecke $DG = AB$ und zieht $GH$ parallel mit $EF$, so ist $DG : DE = GH : EF = HD : FD$ (§. 8, 2). Aus der Bemerkung, daß die Winkel $HGD$ und $FED$ gleich sind, folgt aber in Verbindung mit den Voraussetzungen, daß die Dreiecke $ABC$ und $DGH$ gleich und ähnlich sind (§. 5, 3). Also ist $AB : DE = BC : EF = CA : FD$. Das Verhältniß der Dreiecksflächen findet man aus §. 10, 3.

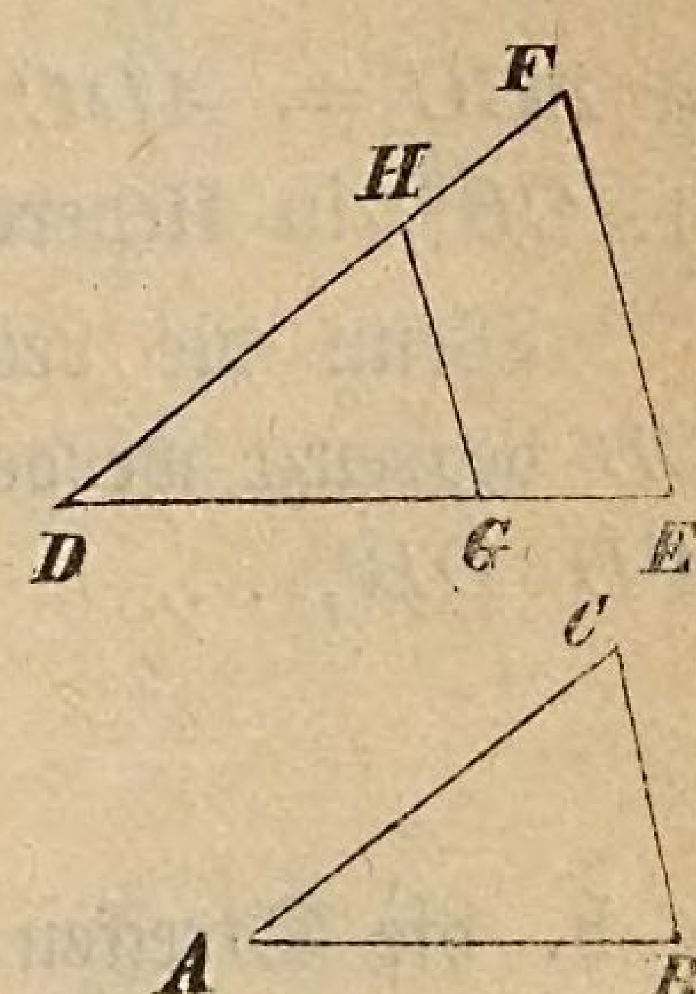
Anmerkung. Bei ähnlichen Dreiecken verhalten sich die Seiten des einen zu einander der Reihe nach wie die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten des andern. Denn die Proportion

$$AB : BC : CA = DE : EF : FD$$

umfaßt die bewiesenen Proportionen (Algebra §. 1, 5 und 6). Statt derselben Proportionen können auch die Gleichungen von Producten $AB \,.\, EF = DE \,.\, BC$, $AB \,.\, FD = DE \,.\, CA$, $BC \,.\, FD = EF \,.\, CA$

gebraucht werden, durch welche die Gleichheit von bestimmten Flächen angezeigt wird (§. 10, 5).

2. Wenn zwei Dreiecke das Verhältniß von 2 Seiten und den Winkel gleich haben, der von den beiden Seiten eingeschlossen wird, oder der größern von den beiden Seiten gegenüberliegt, oder wenn die Dreiecke die Verhältnisse der 3 Seiten gleich haben, so sind sie ähnlich.




Wenn $AB : BC = DE : EF$ und der Winkel $B = E$, oder wenn $AB : BC = DE : EF$, $AB > BC$, und der Winkel $C = F$, oder wenn $AB : BC : CA = DE : EF : FD$, so ist der Winkel $A = D$ gegenüber den homologen (in der Proportion gleichen Rang einnehmenden) Seiten $BC$ und $EF$, u. s. w., $ABC \sim DEF$.

Beweis. Macht man auf $DE$ die Strecke $DG = AB$, und zieht $GH$ parallel mit $EF$, so ist $DGH \sim DEF$, d. h.

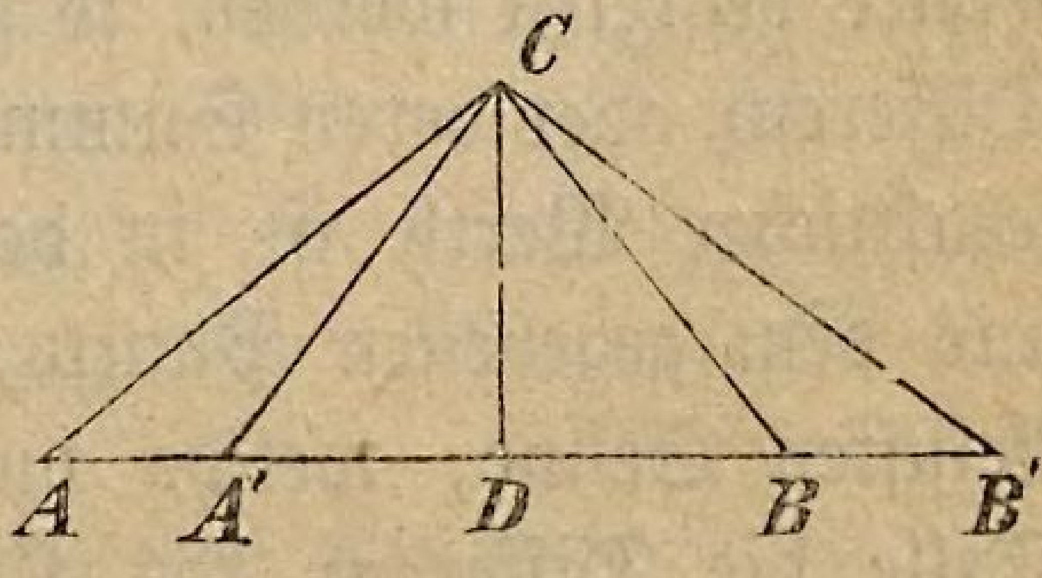
$$DG : GH : HD = DE : EF : FD \ (1).$$

a. Wenn $B = E = G$ und $AB : BC = DE : EF$, so ist auch $AB : BC = DG : GH$, mithin $BC = GH$, und $ABC \cong DGH$ (§. 5, 1), d. h. der Winkel $A = D$, folglich $ABC \sim DEF$ (1).

b. Wenn $C = F = H$ und $AB : BC = DE : EF$, so ergiebt sich wiederum $BC = GH$ und $ABC \cong DGH$ (§. 5, 4), d. h. $A = D$, folglich $ABC \sim DEF$ (1).

c. Wenn $AB : BC : CA = DE : EF : FD$, so ergiebt sich $AB : BC : CA = DG : GH : HD$, mithin $BC = GH$, $CA = HD$, und $ABC \cong DGH$ (§. 5, 2), d. h. $A = D$, $B = G = E$, folglich $ABC \sim DEF$ (1).

3. Ein rechtwinkeliges Dreieck wird durch die Normale aus dem Scheitel des rechten Winkels zur Hypotenuse in zwei Dreiecke getheilt, welche dem ganzen Dreieck und einander ähnlich sind. Eine Cathete ist das geometrische Mittel (Algebra §. 1, 9) zwischen der Hypotenuse und dem an der Cathete liegenden Stück derselben. Die Normale ist das geometrische Mittel zwischen den Stücken der Hypotenuse.




Beweis. Die rechtwinkeligen Dreiecke $ADC$ und $ACB$ haben den Winkel $A$ gemein, folglich ist (1) $ADC \sim ACB$, d. h. $AD : AC = AC : AB$, oder $AC^2 = AB \,.\, AD$.

In den rechtwinkeligen Dreiecken $ADC$ und $CDB$ sind die Winkel $DAC$ und $DCB$ gleich, weil sie dasselbe Complement $ACD$

haben; folglich ist $ADC \sim CDB$, d. h. $AD : DC = CD : DB$, oder $CD^2 = AD \,.\, DB$.

Diese Sätze treffen nach ihrer geometrischen Bedeutung (§. 10, 5) mit dem Pythagoreischen Lehrsatz (§. 9, 5) zusammen.

Zusätze. In der Proportion der ähnlichen Dreiecke (1)

$$ABC : ADC : DCB = AB^2 : AC^2 : CB^2$$

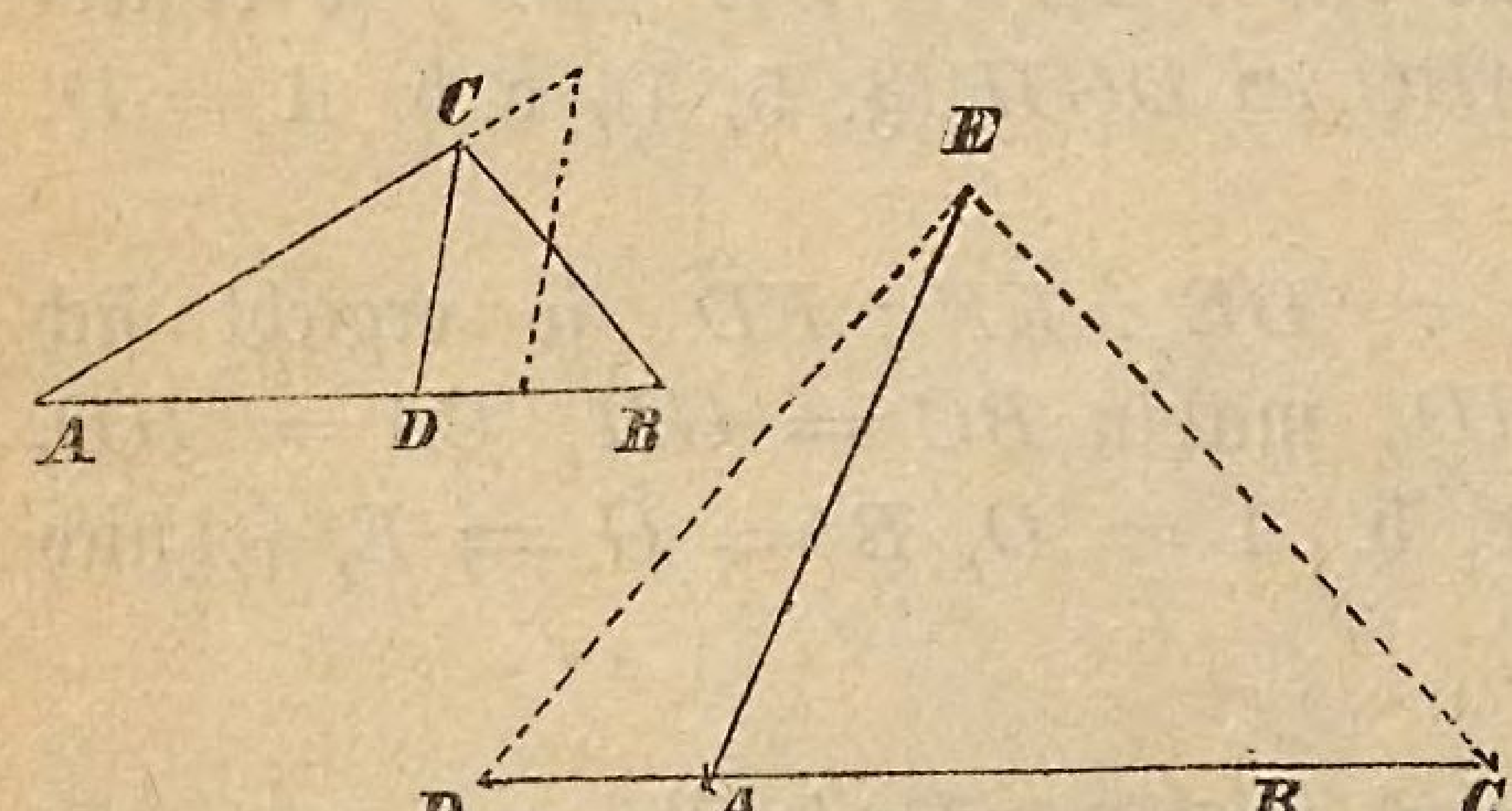
ist $ABC = ADC + CDB$, folglich (Algebra (§. 1, 7) $AB^2 = AC^2 + CB^2$, in Uebereinstimmung mit dem Pythagoreischen Lehrsatz.

Wenn die rechten Winkel $ACB$, $A'CB'$, .. von der Normale zu $CD$ begrenzt werden, so hat man wegen der gleichen Producte $AD \,.\, DB$, $A'D \,.\, DB'$, ..

$$DB : DB' = \frac{1}{DA} : \frac{1}{DA'}$$

d. h. die Strecken $DB$, $DB'$, .. verhalten sich zu einander der Reihe nach wie die reciproken Strecken $DA$, $DA'$, ... In einem solchen Zusammenhange stehn z. B. die Höhen eines Dreiecks und die Seiten, zu denen sie normal sind.

Von jedem Dreiecke läßt sich ein ähnliches Dreieck abschneiden, das mit dem gegebenen Dreiecke eine Seite und einen Winkel gemein hat. Die gemeinschaftliche Seite ist das geometrische Mittel zwischen den beiden andern Seiten, welche auf dem andern Schenkel des gemeinschaftlichen Winkels liegen. Macht man den Winkel $ACD = CBA$, so ist $ACD \sim ABC$, $AC^2 = AB \,.\, AD$.

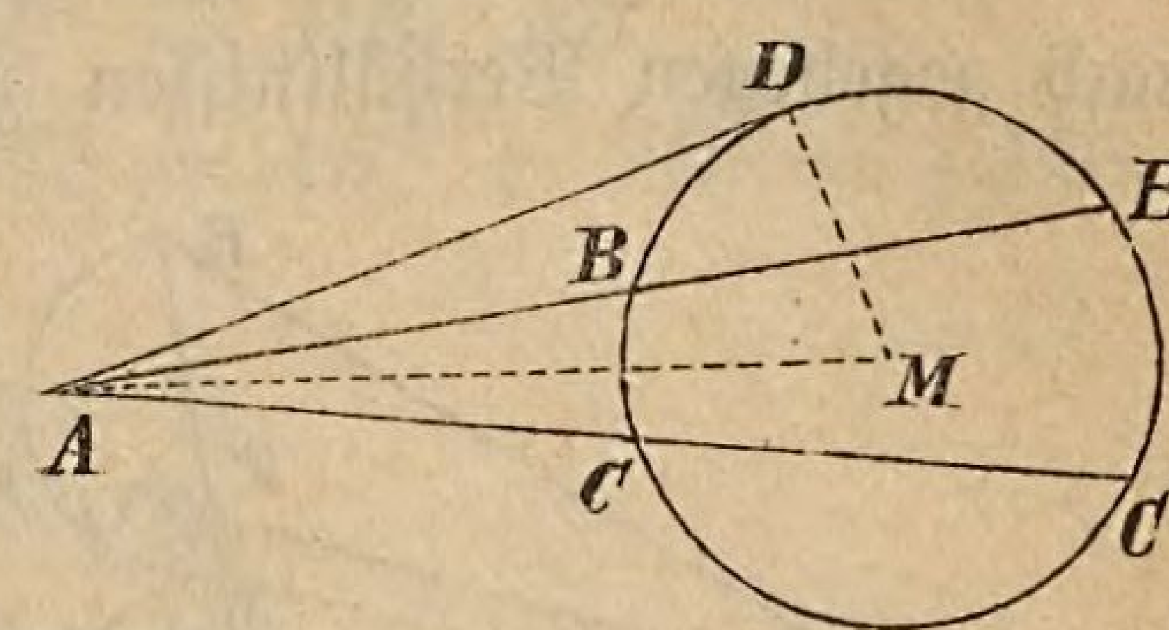



Man kann daher das geometrische Mittel zwischen $AB$ und $AC$ auch dadurch finden, daß man $DB$, $DE$, $CE$ der Strecke $AC$ gleich macht. Weil dann $BE = AE$, so ist $AEB \sim ACE$, $AE^2 = AC \,.\, AB$.

4. Wenn die durch einen Punct gehenden Geraden von einem Kreise begrenzt werden, so sind die Producte von solchen Strecken, deren Differenz oder deren Summe eine Sehne ist, einander gleich. Ihr gemeinschaftlicher Werth ist in dem ersten Falle das Quadrat der Tangente aus dem gegebenen Puncte, im zweiten Falle das Quadrat der halben kleinsten Sehne, welche durch den gegebenen Punct geht, also in jedem Falle die Differenz des Quadrats der Strecke zwischen dem gegebenen

Punct und dem Centrum und des Quadrats des Radius, und heißt die **Potenz des Puncts in Bezug auf den Kreis**.*)

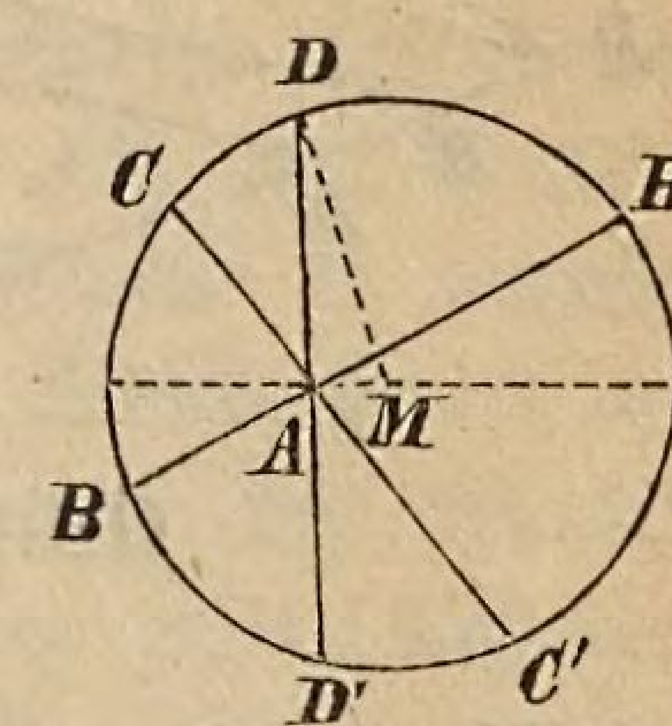
**Beweis.** Wenn die durch $A$ gehenden Geraden den Kreis in $B$ und $B'$, $C$ und $C'$ schneiden, so sind die Dreiecke $ABC$ und $AC'B'$ ähnlich wegen der gleichen Winkel bei $A$ und wegen der supplementären oder gleichen Peripheriewinkel auf dem Bogen $B'C$ (§. 4, 2). Daher die Proportion




$$AB : AC = AC' : AB' = \frac{1}{AB'} : \frac{1}{AC'}$$

oder die Gleichung $AB \,.\, AB' = AC : AC'$.

Wenn der Punct $A$ außerhalb des Kreises liegt, so können die Puncte $B$ und $B'$ in $D$ zusammenfallen, während die Gerade $ABB'$ zur Tangente wird, und man hat $AD^2 = AC \,.\, AC'$, wie auch aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $ADC$ und $AC'D$ sich ergiebt.

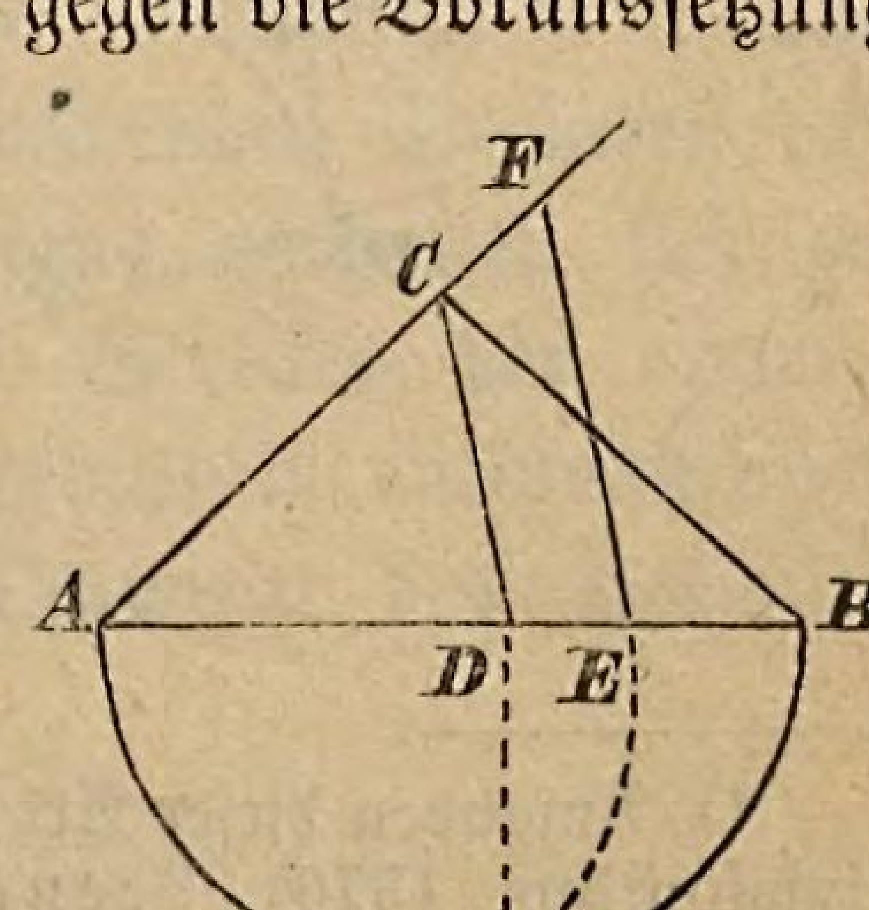



Wenn der Punct $A$ im Kreise liegt, und die Gerade $ADD'$ normal zu der nach dem Centrum $M$ gehenden Geraden $AM$ gezogen wird, so ist $A$ die Mitte von $DD'$, und $DD'$ die kleinste unter den Sehnen, welche durch $A$ gezogen werden können (§. 6, 11). Dann hat man $AB \,.\, AB' = AD^2$.

In dem rechtwinkeligen Dreieck $ADM$ hat man nach dem Pythagoreischen Lehrsatze (§. 10, 5) in dem einen Falle $AD^2 = AM^2 - MD^2$, in dem andern Falle $AD^2 = - AM^2 + MD^2$.

Umgekehrt schließt man: Wenn auf den Geraden $AB$ und $AC$ die Puncte $B'$ und $C'$ so liegen, daß $AB \,.\, AB' = AC \,.\, AC'$, so liegt $C'$ auf dem Kreise $BCB'$. Gesetzt, dieser Kreis schnitte die Gerade $AC$ in $E$, so wäre $AB \,.\, AB' = AC \,.\, AE$ und verschieden von $AC \,.\, AC'$, gegen die Voraussetzung.

5. Mit Hülfe des geometrischen Mittels zwischen zwei Strecken kann man das Dreieck construiren, welches dem einen von zwei gegebenen Dreiecken an Fläche gleich, dem andern ähnlich ist (Eucl. VI, 25). Um das Dreieck zu finden, welches gleich $ABC$, ähnlich $ADC$ ist, construirt man das geometrische Mittel $AE$ zwischen $AB$ und $AD$, und zieht $EF$ parallel



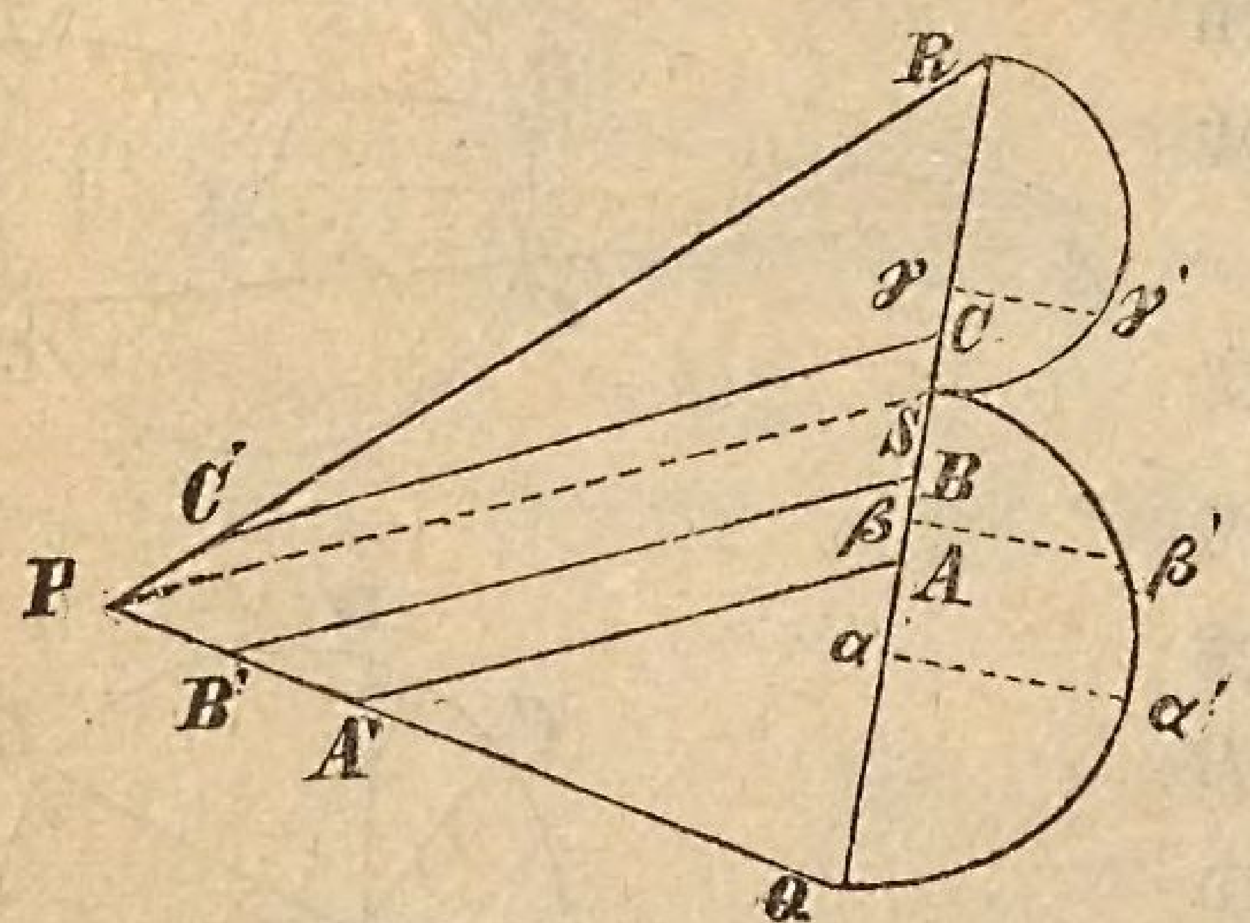

*) Eucl. III, 33 ff. Der Name des Products ist von Steiner (Crelle J. 1 p. 164) eingeführt worden.

mit $DC$. Dann ist (§. 10, 3)

$$AEF : ABC = (AE : AB)(AF : AC)$$
$$= (AE : AB)(AE : AD) = 1$$

weil $AE^2 = AB \,.\, AD$.

Um das Dreieck $PQR$ durch Parallelen von gegebener Richtung nach gegebenen Verhältnissen zu theilen, z. B. so, daß die Theile sich verhalten wie $Q\alpha : \alpha\beta : \beta\gamma : \gamma R$, ziehe man $PS$ in der gegebenen Richtung, die Halbkreise um $QS$ und $SR$, die Normalen zu $QR$ durch die Theilpuncte $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, welche die Halbkreise in $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ schneiden, und mache $QA = Q\alpha'$, $QB = Q\beta'$, $CR = \gamma' R$ endlich $AA'$, $BB'$, $CC'$ parallel mit $PS$. Dann ist



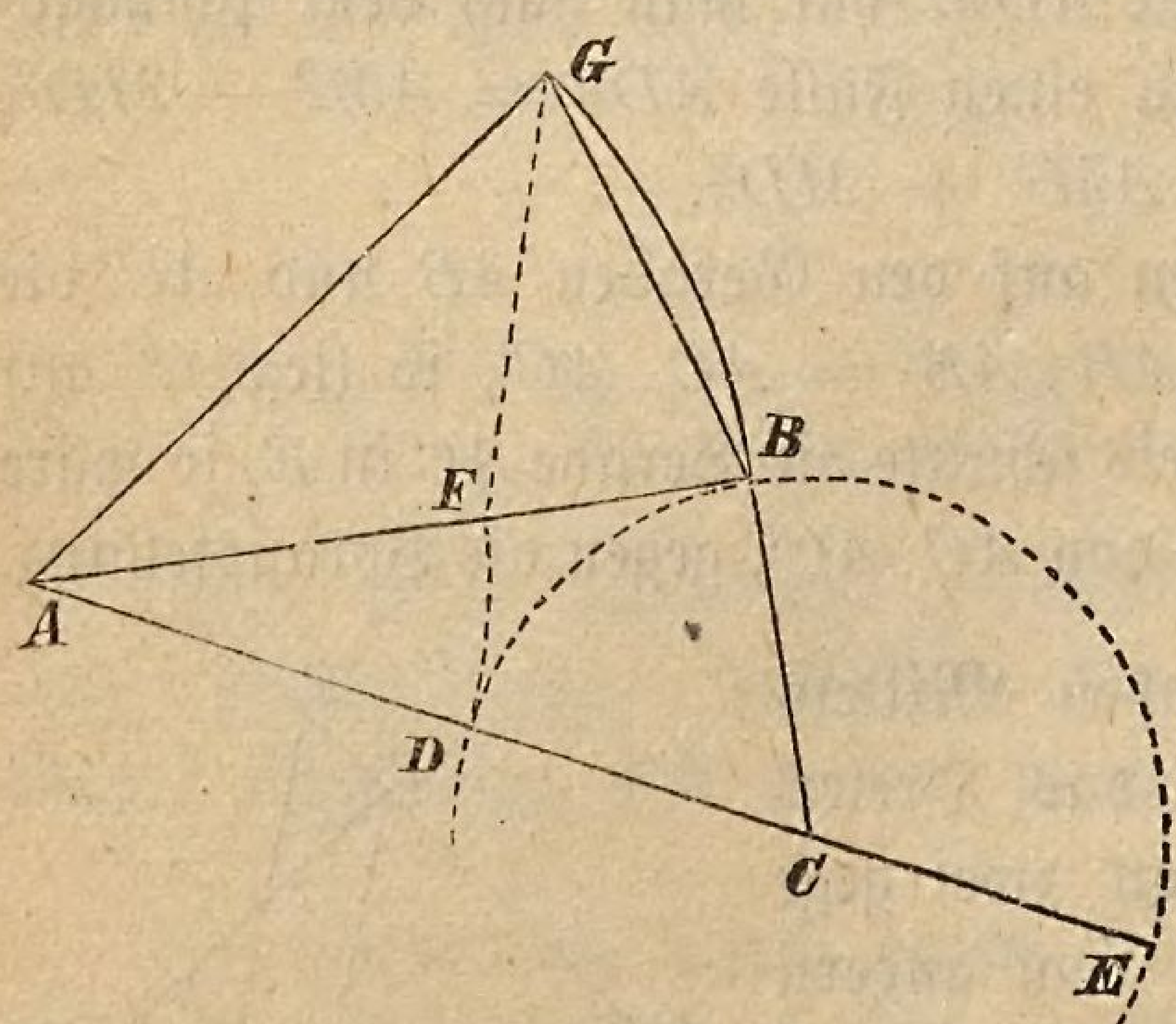

$$QAA' : QSP = (Q\alpha' : QS)^2 = Q\alpha : QS$$
$$QSP : QRP = QS : QR$$

folglich $QAA' : QRP = Q\alpha : QR$. Ebenso

$$QBB' : QRP = Q\beta : QR, \quad C'CR : PQR = \gamma R : QR,$$
$$QCC'P : PQR = Q\gamma : QR, \text{ u. s. w.}$$

Mithin verhalten sich $QAA' : A'ABB' : B'BCC' : C'CR$ zu einander der Reihe nach wie $Q\alpha : \alpha\beta : \beta\gamma : \gamma R$.*)

6. Eine Strecke heißt nach stetiger Proportion, oder in eine mittlere und eine äußere Proportionale, oder golden getheilt, wenn ein Theil (der goldne Abschnitt) das geometrische Mittel ist zwischen dem andern Theil und der ganzen Strecke.**)




Um die Strecke $AB$ golden zu theilen, zieht man $BC$ normal zu $AB$ und halb so groß, und beschreibt den Kreis um $C$ mit dem Radius $CB$, welcher die Gerade $AC$ in $D$ (und $E$) schneidet. Dann

*) Aufgaben dieser Art haben Mahommed Bagdedinus 950 (de superficierum divisionibus 1570), Leonardo von Pisa 1220 (Practica geometriae fol. 86) zusammengestellt. Vergl. Meier Hirsch geom. Aufg. I, 14 ff. J. H. T. Müller Planim. p. 266 ff.

**) Eucl. VI, def. 3. Vergl. II, 11. IV, 10. VI. 30. XIII, 1 ff. Die Benennung sectio aurea s. divina ist neueren Ursprungs.

ist $AF = AD$ der goldene Abschnitt von $AB$. Denn die Gerade $AB$ berührt den Kreis $(C)$, also hat man (4)

$$AE : AB = AB : AD$$

und nach Subtraction von 1, weil $DE = AB$,

$$AD : AB = FB : AD, \quad AF^2 = FB \,.\, AB.$$

Nach dem Pythagoreischen Satze ist $AC^2 = AB^2 + BC^2 = \frac{5}{4}AB^2$, folglich $AC : AB = \frac{1}{2}\sqrt{5}$, und

$$AF : AB = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$
$$FB : AB = \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$$
$$AF : FB = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

Bei einem Kreise ist der goldne Abschnitt des Radius die Seite eines regulären eingeschriebenen Zehnecks. Ist $AG = AB$, $BG = AF$, so ist $FBG \sim GBA$ (2), weil diese Dreiecke den Winkel $B$ gemein haben, und $FB : BG = GB : BA$. Daher ist der Winkel $FGB = BAG$ und die Seite $FG = BG = AF$, folglich auch der Winkel $AGF = BAG$, $AGB = GBA = 2BAG$, $5BAG = 280^0$, $10BAG = 360^0$.

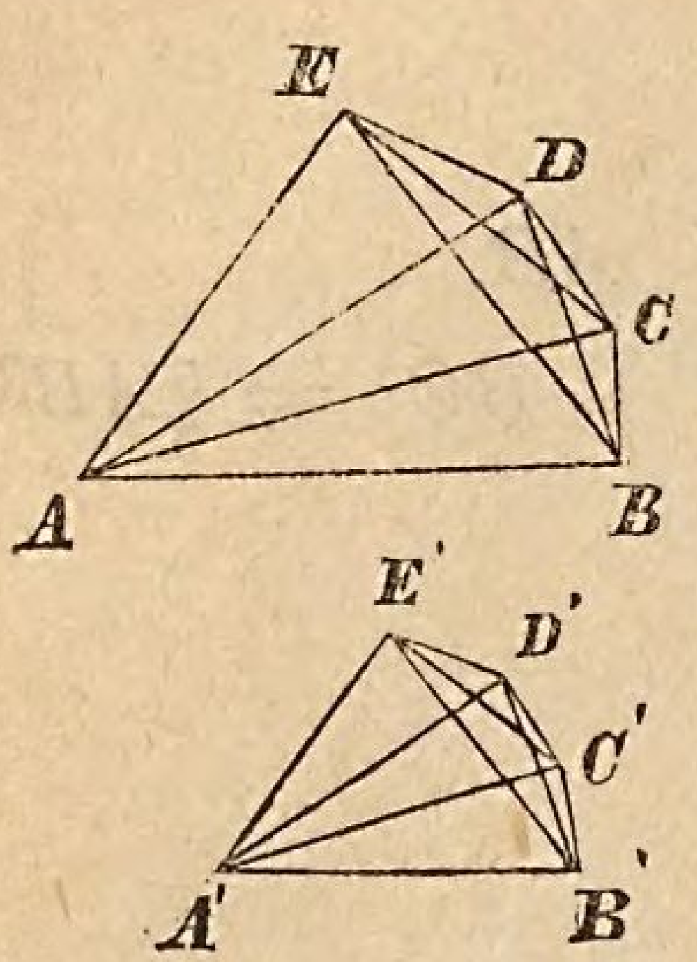
## §. 12. Von den ähnlichen Figuren.

**1.** Wenn jedem Punct einer Figur ein Punct einer andern Figur so entspricht, daß die Dreiecke $ABC$, $ABD$, $ABE$, . ., welche von zwei Puncten der einen Figur mit den übrigen Puncten derselben Figur gebildet werden, den entsprechenden Dreiecken der andern Figur $A'B'C'$, $A'B'D'$, $A'B'E'$, . . der Reihe nach ähnlich sind, und dabei $ABD$, $ABE$, . . mit $ABC$ von einerlei oder entgegengesetztem Sinne, je nachdem $A'B'D'$, $A'B'E'$, . . mit $A'B'C'$ von einerlei oder entgegengesetztem Sinne sind: so sind die Figuren $ABCDE$ . . und $A'B'C'D'E'$ . . ähnlich, d. h. alle übrigen Dreiecke der einen Figur sind den entsprechenden Dreiecken der andern Figur ähnlich, die Strecken der einen Figur verhalten sich zu einander der Reihe nach wie die entsprechenden Strecken der andern Figur, das Verhältniß der Perimeter ist das Verhältniß entsprechender Strecken, das Verhältniß der Flächen ist das Quadrat des Verhältnisses entsprechender Strecken.*)

---

*) Eucl. VI, 20. Die Euclidische Definition (die erste zum 6ten Buch) ist unstatthaft, weil sie Behauptungen einschließt, welche eines Beweises bedürfen. Vergl. §. 7. und die daselbst erwähnte Abhandlung des Verf.

Beweis. Nach den Voraussetzungen ist der Winkel $BAD = B'A'D'$, $BAC = B'A'C'$, folglich $CAD = C'A'D'$. Zugleich ist $AC : AB = A'C' : AB'$, $AB : AD = A'B' : A'D'$, folglich $AC : AD = A'C' : A'D'$; mithin $ACD \backsim A'C'D'$ (§. 11, 2). Ebenso erkennt man $ACE \backsim A'C'E'$, $ADE \backsim A'D'E'$, .., $BCD \backsim B'C'D'$, $BCE \backsim B'C'E'$, $BDE \backsim B'D'E'$, ... Aus der Aehnlichk voneit $BCD$ und $B'C'D'$, $BCE$ und $B'C'E'$ folgt ebenso die Aehnlichkeit von $CDE$ und $C'D'E'$, u. s. w.




Die Gleichungen $AB : A'B' = AC : A'C' = .. = BC : B'C' = BD : B'D' = .. = CD : C'D' = CE' : C'E' = ..$ sind in der Proportion

$$AB : AC : .. : BC : BD : .. : CD : .. = A'B' : A'C' : .. : B'C' : B'D' : .. : C'D' : ..$$

enthalten, aus der auch

$$AB + BC + CD + .. : AB = A'B' + B'C' + C'D' + .. : A'B'$$

oder

$$AB + BC + CD + .. : A'B' + B'C' + C'D' + .. = AB : A'B'$$

folgt (Algebra §. 1, 7). Ebenso schließt man aus den Gleichungen (§. 11, 1)

$$ABC : A'B'C' = ACD : A'C'D' = ADE : A'D'E' = .. = (AB : A'B')^2$$

das Verhältniß der Flächen

$$ABCDE .. : A'B'C'D'E' .. = (AB : A'B')^2.$$

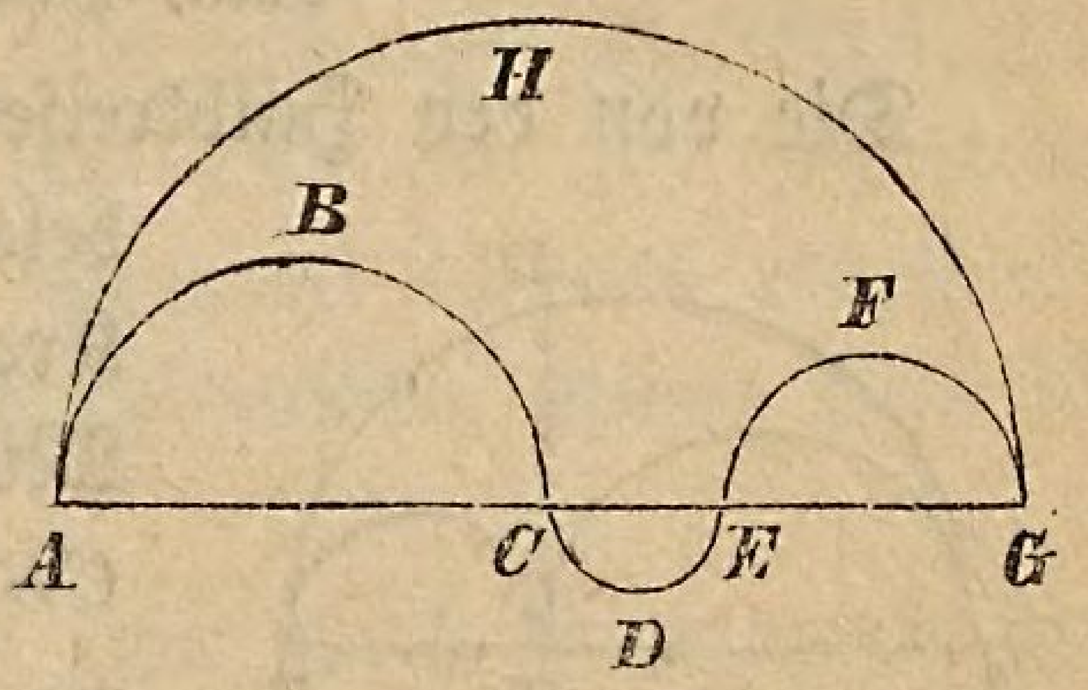
2. Wenn 3 Puncte der einen Figur auf einer Geraden liegen, so liegen die entsprechenden Puncte der ähnlichen Figur auch auf einer Geraden; entsprechende Strecken der ähnlichen Figuren werden in entsprechenden Puncten nach demselben Verhältniß getheilt. Wenn insbesondere eine Figur ein Centrum hat (§. 7, 6), so hat auch die ähnliche Figur ein Centrum, und die Centren sind entsprechende Puncte der beiden Figuren.

Liegen die Puncte der einen Figur auf einer Curve, so liegen die entsprechenden Puncte der ähnlichen Figur auf einer ähnlichen Curve. Einer Sehne der einen Curve entspricht eine Sehne der andern Curve, und wenn eine Sehne der einen Curve verschwindet, so verschwindet auch die entsprechende Sehne der andern Curve, d. h. der Tangente der einen Curve durch einen Punct entspricht die Tangente der andern Curve durch den entsprechenden Punct (§. 3, 5). Einem der einen Curve eingeschriebenen oder umgeschriebenen Polygon entspricht ein der andern Curve eingeschriebenes oder umgeschriebenes Polygon, und wenn das eine dieser Polygone mit der Curve bei unendlicher Anzahl der gemeinschaft-

lichen Puncte zusammenfällt, so fällt auch das entsprechende Polygon mit der entsprechenden Curve zusammen. Daher ist das Verhältniß entsprechender Bogen von ähnlichen Curven dem Verhältniß entsprechender Strecken, und das Verhältniß entsprechender Flächen dem Quadrat des Verhältnisses entsprechender Strecken gleich.

3. Reguläre Polygone von derselben Anzahl der Seiten und von derselben Art (§. 7, 5) sind ähnliche Figuren; zwei folgende Eckpuncte des einen Polygons können als irgend zwei folgenden Eckpuncten des andern Polygons entsprechend angenommen werden.

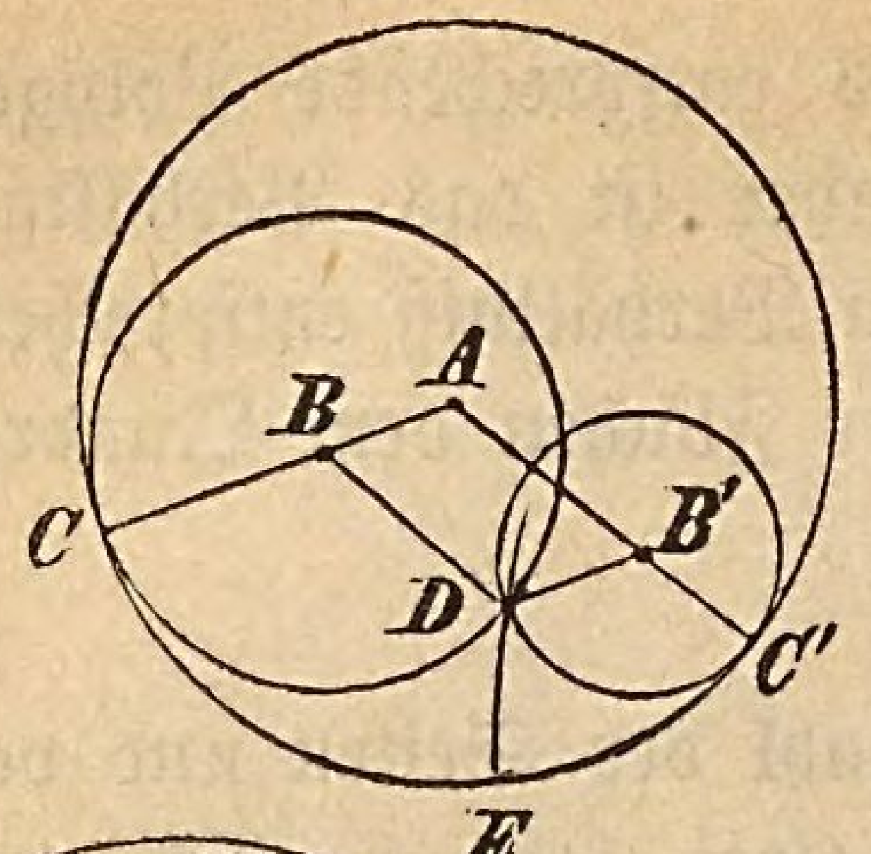
Gleichwinkelige Segmente von Kreisen (§. 3, 6), Kreisbogen von gleichen Centriwinkeln sind ähnliche Figuren; einem Endpunct des einen Bogens entspricht ein Endpunct des andern Bogens. Je zwei Kreise sind ähnliche Figuren; ein Bogen des einen Kreises kann als irgend einem ähnlichen Bogen des andern Kreises entsprechend angenommen werden. Das Verhältniß der Kreisperipherien oder ähnlicher Bogen von Kreisen ist dem Verhältniß entsprechender Strecken z. B. der Diameter gleich; das Verhältniß der Kreisflächen oder ähnlicher Segmente von Kreisen ist dem Quadrat des Verhältnisses entsprechender Strecken gleich.*)



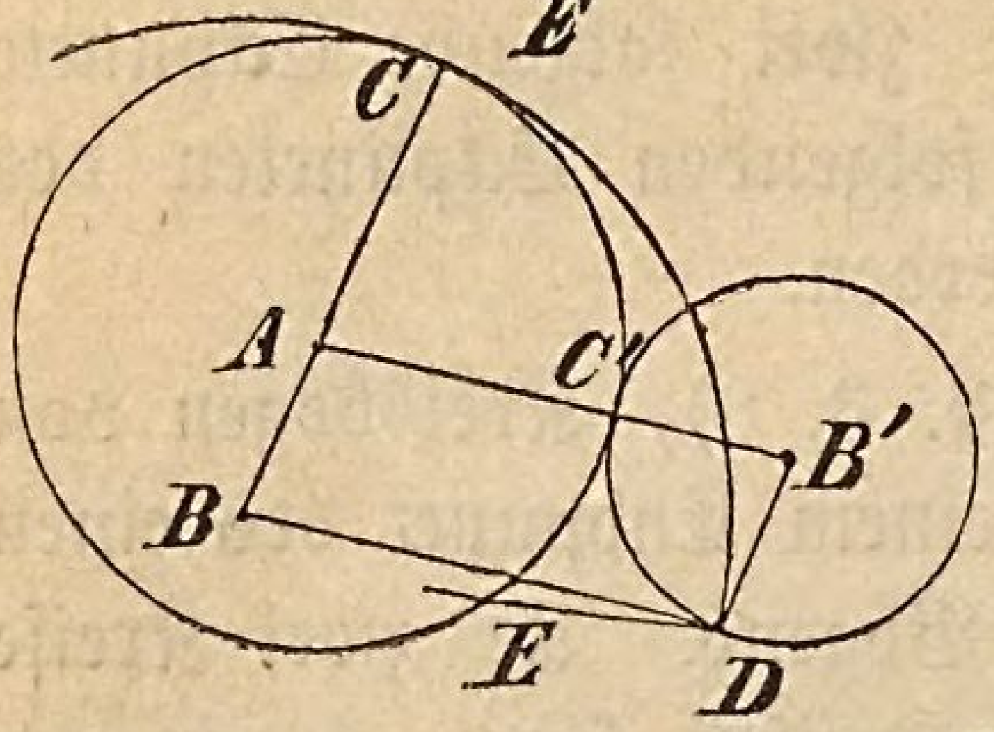

Die aus Halbkreisen bestehende Linie $ABCDEFG$ ist von gleicher Länge, wie der Halbkeis $AHG$. Denn die Halbkreise verhalten sich wie ihre Diameter; nun ist $AC + CE + EG = AG$, folglich u. s. w.

Wenn der Kreis ($A$) von dem Kreis ($B$) in $C$ einerseits der gemeinschaftlichen Tangente berührt wird, und von dem Kreis ($B'$), dessen Radius die Differenz der Radien $AC - BC$ ist, in $C'$ einerseits oder beiderseits, je nachdem $AC$ größer oder kleiner als $BC$, und wenn $B'ABD$ ein Parallelogramm ist: so ist $D$ ein gemeinschaftlicher Punct der Kreise ($B$) und ($B'$) auf der Berührungssehne $CC'$, und der Bogen $CC'$ ist die Summe oder die Differenz der Bogen $CD$ und $DC'$. Denn zufolge der Gleichungen $BD = AB' = BC$, $B'D = AB = B'C'$ liegt $D$ sowohl auf dem Kreis ($B$), als auch auf ($B'$). Die Bogen $CC'$, $CD$, $DC'$ haben gleiche Centriwinkel und sind ähnlich, die Bogen und ihre Sehnen verhalten sich zu einander wie ihre Radien. Daher ist Bogen und Sehne

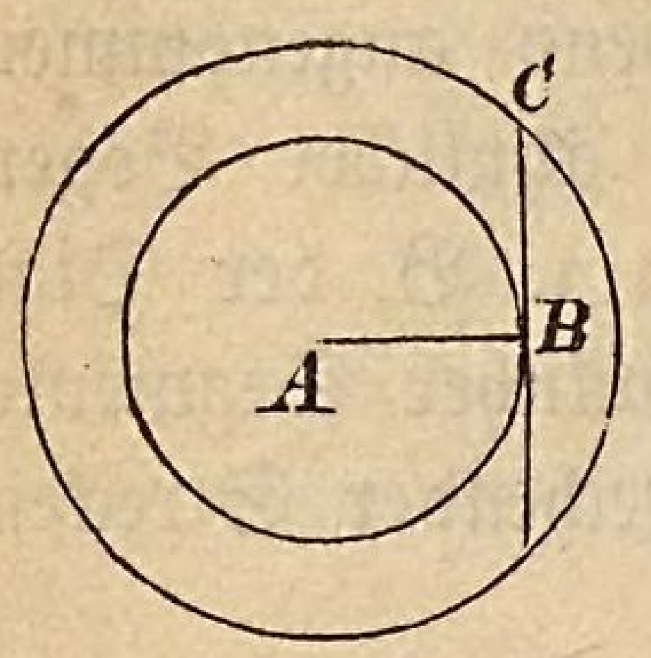
*) Eucl. XII, 2. Die Aehnlichkeit der Bogen und Segmente von Kreisen wird bei Euclides durch besondere Definition festgestellt (III, def. 11).



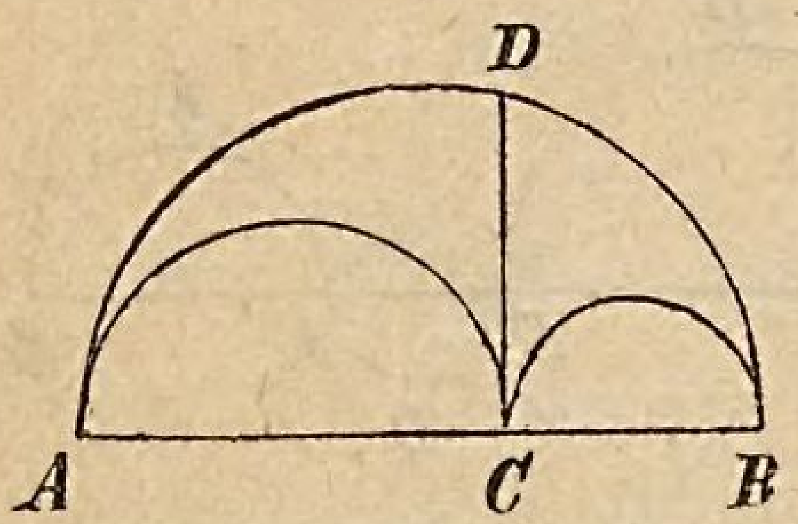

$CC'$ in dem ersten Fall $CD + DC'$, in dem andern Fall $CD - DC'$. Ist der Bogen $CE$ des Kreises $(A)$ so lang als der Bogen $CD$, so ist der Bogen $EC'$ in dem ersten Fall so lang als $DC'$, in dem andern Fall so lang als $C'D$. Wenn der Kreis $(B)$ auf dem Kreis $(A)$ rollend ohne zu gleiten den Bogen $EC$ zurückgelegt hat, so hat der Punct $D$ des Kreises $(B)$ einen Epicycloidenbogen $ED$ beschrieben. Denselben Epicycloidenbogen hat der Punct $D$ des Kreises $(B')$ beschrieben, wenn der Kreis $(B')$ in gleicher Weise den Bogen $EC'$ zurückgelegt hat.*)



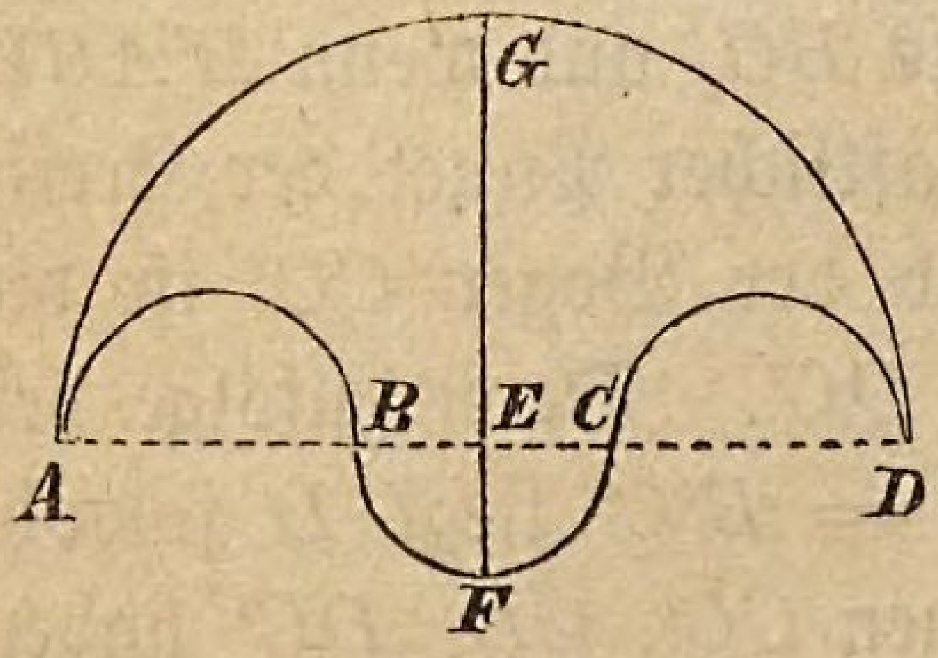

Die Ringfläche zwischen zwei concentrischen Kreisen ist der Fläche des Kreises gleich, dessen Diameter eine durch den äußern Kreis begrenzte Tangente des innern Kreises ist. Denn die Kreisflächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien; nun ist der Winkel $CBA$ recht und $AC^2 - AB^2 = BC^2$ nach dem Pythagoreischen Satze, folglich u. s. w.




Die von den Halbkreisen $AC$, $CB$, $BA$ eingeschlossene Fläche (Arbelos, Archim. lemma 4) ist der Fläche des Kreises gleich, dessen Diameter das geometrische Mittel $CD$ zwischen den Diametern $AC$ und $CB$ ist. Denn $(AC + CB)^2 - AC^2 - CB^2 = 2AC \, . \, CB = 2CD^2$.




Von den Halbkreisen $AB$, $BC$, $CD$ $DA$, unter denen der erste und dritte gleich, der zweite und vierte concentrisch sind, wird eine Fläche eingeschlossen (Salinon, Archim. lemma 14), die der Fläche des Kreises gleich ist, dessen Diameter die Summe $FG$ der Radien von den beiden concentrischen Halbkreisen ist. Denn $AD^2 - 2AB^2 + BC^2 = (2AB + BC)^2 - 2AB^2 + BC^2 = 2(AB + BC)^2 = 2FG^2$.

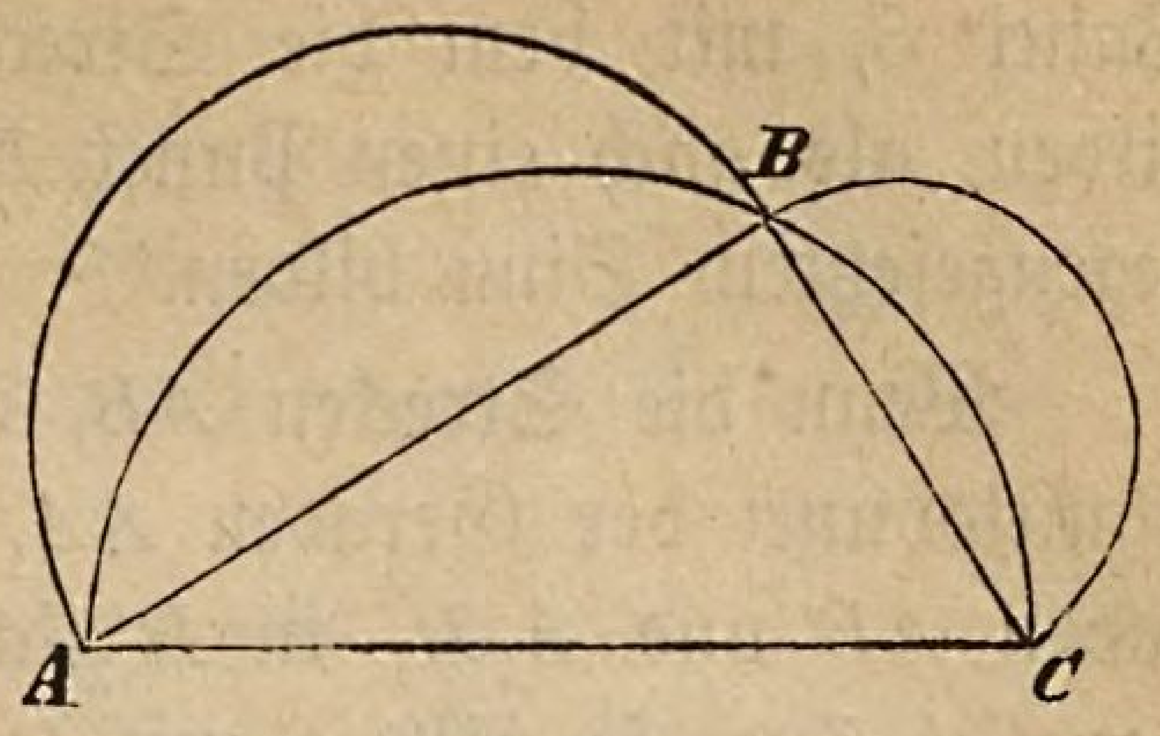



Von den Halbkreisen über den Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks werden zwei sichelförmige Flächen (μηνίσκοι, lunulae) eingeschlossen,

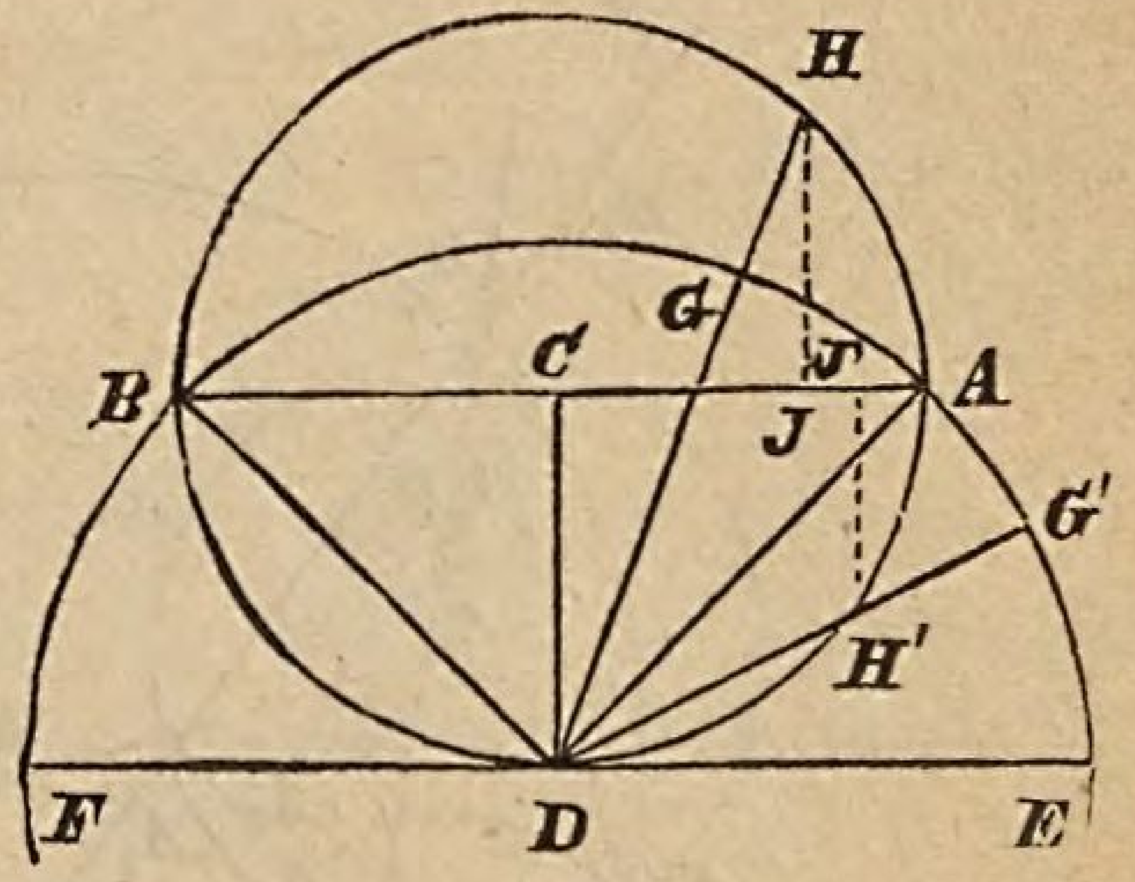
---

*) Euler Acta Petrop. 1781, I p. 48 De duplici genesi epicycloidum etc.

deren Summe der Fläche des Dreiecks gleich ist. Denn die Summe der Halbkreisflächen über den Catheten ist der Halbkreisfläche über der Hypotenuse gleich, woraus durch Subtraction der Segmente über den Catheten die Behauptung sich ergiebt.




Wenn man einem Kreise das rechtwinkelige und gleichschenkelige Dreieck $ABD$ einschreibt, und um das Centrum $D$ den Halbkreis $EABF$ beschreibt, so daß $EF$ mit $AB$ paralle ist, so ist die sichelförmige Fläche zwischen dem Halbkreis $AB$ und dem Quadranten $AB$ sowohl der von dem Diameter $EF$, dem Octanten $FB$, dem Halbkreis $BA$ und dem Octanten $AE$ eingeschlossenen Fläche, als auch der Fläche des Dreiecks $ABD$ gleich.*) Denn $DB^2 = 2CA^2$, folglich ist die Fläche des Halbkreises $EF$ 2mal so groß als die Fläche des Halbkreises $AB$, und der Sector $ABD$ gleich der Fläche des Halbkreises $AB$. Indem man nun die von dem Quadranten $AB$ und dem Halbkreis $BA$ eingeschlossene Fläche von der Kreisfläche $AB$ und von der Halbkreisfläche $EF$ subtrahirt, und indem man das Segment $AB$ von der Halbkreisfläche $AB$ und von dem Sector $DAB$ subtrahirt, erhält man die angegebenen Gleichungen.



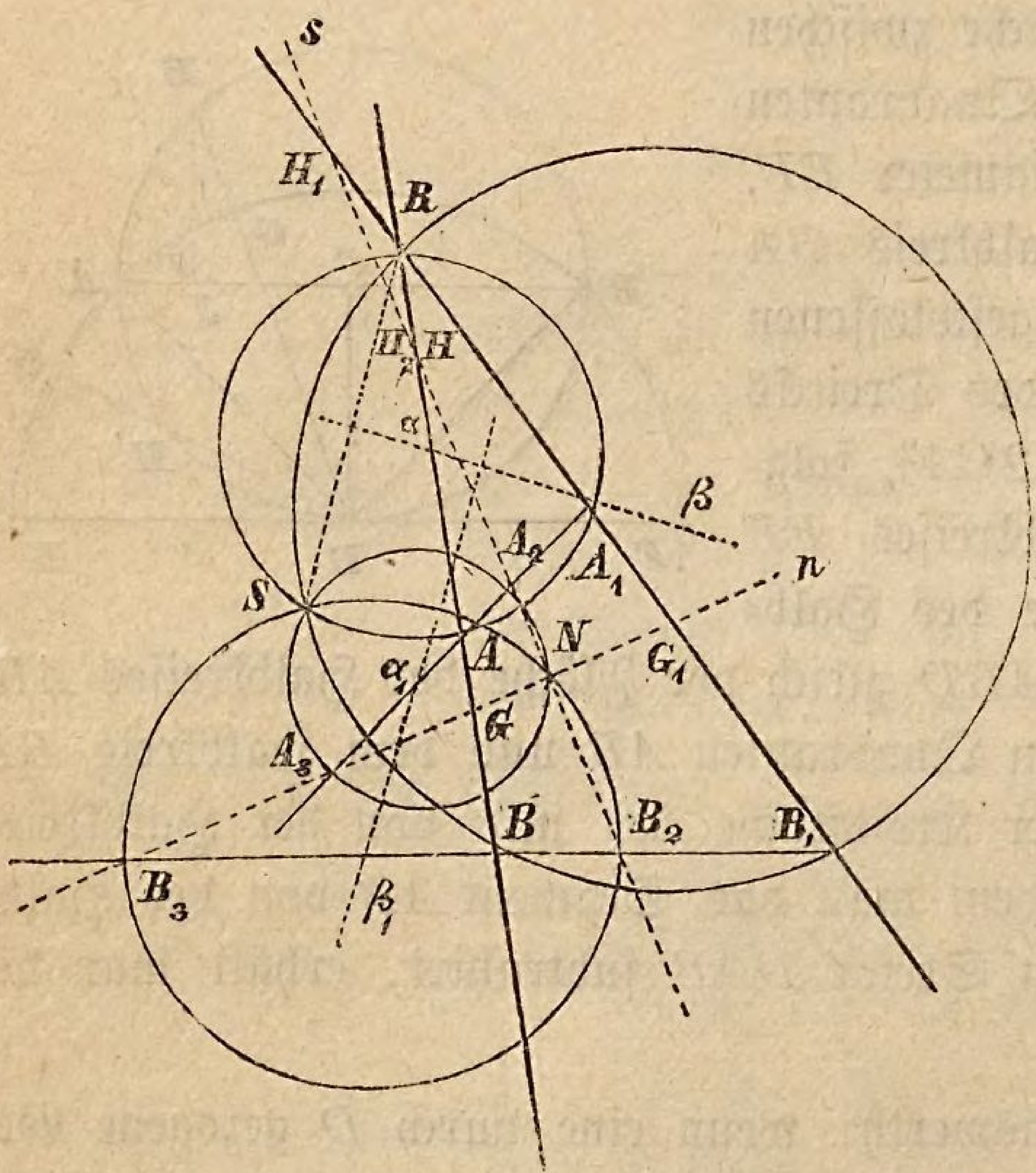

Dabei ist noch bemerkenswerth: wenn eine durch $D$ gezogene Gerade den Halbkreis in $G$, den Kreis in $H$ schneidet, und wenn die Normale aus $H$ zu $AB$ diese Gerade in $J$ schneidet, so ist die von den Bogen $AG$, $AH$ und der Strecke $GH$ eingeschlossene Fläche der Fläche des Dreiecks $DAJ$ gleich. Denn der Sector $CAH$ ist dem doppelten Sector $DAG$ ähnlich, und dem einfachen Sector $DAG$ gleich, weil der Winkel $ACH = 2ADH$ und $DA^2 = 2CA^2$. Nun ist $AHG + DAG + CDH = CDA + CAH$, folglich die gesuchte Fläche $AHG$ gleich der Differenz der Dreiecke $CDA - CDH = DAJ$, weil $CDH = CDJ$ (§. 9, 2). Ebenso findet man die Fläche $AH'G'$ gleich der Fläche des Dreiecks $DAJ'$.

---

*) Lunula des Hippocrates von Chios, eines Zeitgenossen von Pericles, wie Proclus zu Euclid berichtet. Den Zusatz hat Tschirnhausen gemacht Acta Erud. 1687 p. 526. Vergl. Klügel math. W. III p. 591. Untersuchungen über die Flächen anderer sichelförmigen Figuren findet man angeführt Reuß Repert. commentt. p. 45. Dahin gehört auch der Aufsatz Clausen's in Crelle J. 21 p. 375.

4. Zu zwei gegebenen Strecken $AB$, $A_1B_1$ giebt es sowohl einen Punct $S$, mit dem die Strecken ähnliche Dreiecke von einerlei Sinn bilden, als auch einen Punct $N$, mit dem sie ähnliche Dreiecke von entgegengesetztem Sinn bilden.*)

Wenn die Strecken $AB$, $A_1B_1$ parallel sind, so ist $S$ der Durchschnittspunct der Geraden $AA_1$, $BB_1$ (§. 8, 2). Wenn ferner die Geraden $AB$ und $A_1B_1$ in $R$ sich schneiden, und die Geraden $AA_1$, $BB_1$ parallel sind, so fällt $S$ mit $R$ zusammen, und die Kreise $AA_1R$, $BB_1R$ berühren einander, weil ihre Centren auf einer durch $R$ gehenden Geraden sich befinden (§. 8, 3). In jedem andern Falle ist $S$ der andere Durchschnittspunct der Kreise $AA_1R$, $BB_1R$. Denn es sind nicht nur die Bogen $SA$ und $SB$, $SA_1$ und $SB_1$, und die Dreiecke $SAA_1$ und $SBB_1$, sondern auch die Dreiecke $SAB$ und $SA_1B_1$ ähnlich und von einerlei Sinn (§. 4, 7). Dem Centrum $\alpha$ des Kreises $SAA_1$ entspricht das Centrum $\beta$ des Kreises $SBB_1$ so, daß die Figuren $SAA_1\alpha$ und $SBB_1\beta$ ähnlich sind und von einerlei Sinn (2). Aus der Aehnlichkeit von $SA\alpha$ und $SB\beta$ folgt aber die Aehnlichkeit von $S\alpha\beta$ und $SAB$, weil der Winkel $\alpha S\beta = \alpha SB + BS\beta = AS\alpha + \alpha SB = ASB$ und $S\alpha : S\beta = SA : SB$ (§. 11, 2). Die gleichen Winkel $ASB$, $A_1SB_1$, $\alpha S\beta$ sind dem Winkel der ähnlichen Bogen $SA$ und $SB$ gleich; die gleichen Winkel $ASA_1$, $BSB_1$ sind dem Winkel der Strecken $AB$ und $A_1B_1$ gleich.




Wenn $AB$ in $C$, $A_1B_1$ in $C_1$ nach demselben Verhältniß getheilt werden, so geht der Kreis $CC_1R$, dessen Centrum $\gamma$ sei, ebenfalls durch $S$. Denn aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $SAC$ und $SA_1C_1$ folgt die Gleichheit der Winkel $CSC_1$, $ASA_1$, $AC^{\wedge}A_1C_1$. Hieraus ergiebt sich die Aehnlichkeit der Dreiecke $SAA_1$ und $SCC_1$, der Bogen $SA$ und $SC$, der Figuren $SAA_1\alpha$ und $SCC_1\gamma$, endlich der Dreiecke $SAC$, $SA_1C_1$, $S\alpha\gamma$.

*) Vergl. die §. 7. citirte Abhandlung p. 43.

Wenn $AA_1$ in $A_k$, $BB_1$ in $B_k$, $CC_1$ in $C_k$ nach demselben gegebenen Verhältniß getheilt werden, so liegen $A_k$, $B_k$, $C_k$ auf einer Geraden.*) Denn zufolge der Voraussetzung sind die Figuren $SAA_1A_k$, $SBB_1B_k$, $SCC_1C_k$ ähnlich und von einerlei Sinn. Hieraus schließt man aber wie vorhin, daß auch die Figuren $SABC$, $SA_1B_1C_1$, $SA_kB_kC_k$ ähnlich und von einerlei Sinn sind.

Insbesondere liegen auf einer Geraden $s$ die Puncte $A_2$, $B_2$, $C_2$, und auf einer Geraden $n$ die Puncte $A_3$, $B_3$, $C_3$, in denen die Strecken $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ innen und außen nach dem Verhältniß $AB : A_1B_1$ von den Geraden getheilt werden, welche die Winkel $ASA_1$, $BSB_1$, $CSC_1$ und deren Nebenwinkel halbiren (§. 8, 6). Die Geraden $s$ und $n$ sind mit den Geraden parallel, welche den von $AB$ und $A_1B_1$ gebildeten Winkel und dessen Nebenwinkel halbiren. Denn aus der Aehnlichkeit der Dreiecke von einerlei Sinn $SAB$, $SA_1B_1$, $SA_2B_2$, $SA_3B_3$ folgt wie oben, daß $AB^\wedge A_2B_2 = ASA_2$, $A_2B_2{}^\wedge A_1B_1 = A_2SA_1$, $AB^\wedge A_3B_3 = ASA_3$, $A_1B_1{}^\wedge A_3B_3 = A_1SA_3$. Nun wird der Winkel $ASA_1$ und sein Nebenwinkel von $SA_2$ und $SA_3$ halbirt, also bildet $s$ mit $AB$ und $A_1B_1$ entgegengesetzt gleiche Winkel, $n$ mit denselben Geraden supplementäre Winkel.

Der gemeinschaftliche Punct $N$ der Geraden $s$ und $n$ liegt auf den Kreisen $A_2SA_3$, $B_2SB_3$, $C_2SC_3$, so daß die Figuren $NABC$ und $NA_1B_1C_1$ ähnlich und von entgegengesetztem Sinn sind. Denn die Winkel $A_2NA_3$, $B_2NB_3$, $C_2NC_3$ sind recht, wie $A_2SA_3$, $B_2SB_3$, $C_2SC_3$, folglich gehn durch $S$ und $N$ die Kreise, welche die Strecken $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, innen und außen nach dem Verhältniß $AB : A_1B_1$ normal schneiden. Aus dieser Lage aber schließt man (§. 8, 6), daß $AN : A_1N = BN : B_1N = CN : C_1N = AB : A_1B_1$, und daß der Winkel $ANA_2 = A_2NA_1$, $BNB_2 = B_2NB_1$, $CNC_2 = C_2NC_1$. Demnach sind die Winkel $ANB$ und $A_1NB_1$, $ANC$ und $A_1NC_1$ gleich und entgegengesetzt, also die Dreiecke $NAB$ und $NA_1B_1$, $NAC$ und $NA_1C_1$ ähnlich und von entgegengesetztem Sinn (§. 11, 2).

Die Strecken $AB$ und $A_1B_1$ werden von der Geraden $n$ in $G$ und $G_1$, von der Geraden $s$ in $H$ und $H_1$ so getheilt, daß $AG : BG = A_1G_1 : B_1G_1$, $AH : BH = A_1H_1 : B_1H_1$, mithin $SAG$ und $SA_1G_1$, $SAA_1$ und $SGG_1$, $SAH$ und $SA_1H_1$, $SAA_1$ und $SHH_1$ ähnlich und von einerlei Sinn sind. Denn wegen der gleichen Winkel sind die Dreiecke $NAG$ und $NA_1G_1$, $NBG$ und $NB_1G_1$, $NAH$ und $NA_1H_1$, $NBH$ und $NB_1H_1$ ähnlich, folglich u. s. w.

---

*) Diese Gerade schneidet die Strecken $AB$ und $A_1B_1$ nach demselben Verhältniß, wie man mit Hülfe des Menelaischen Satzes (Trigonom. §. 7, 6) erkennt.

Die Geraden $RS$ und $SN$ sind normal zu einander. Denn die Strecke $HH_1$ wird durch die Gerade $RS$ in $H_2$ nach dem Verhältniß geschnitten, welches die Abstände des Punctes $H_2$ von den Geraden $AB$ und $A_1B_1$ haben, mit denen die Gerade $s$ entgegengesetzt gleiche Winkel bildet. Dasselbe Verhältniß haben die Abstände des Punctes $S$ von den Geraden $AB$ und $A_1B_1$, nämlich $SH : SH_1 = AB : A_1B_1$. Zugleich hat man $HN : H_1N = AB : A_1B_1$; also wird der Winkel $HSH_1$ und sein Nebenwinkel von den Geraden $RS$ und $SN$ halbirt (§. 8, 6), und der Winkel $RSN$ ist recht.

Wenn man die Centren der Kreise $A_2SA_3$, $B_2SB_3$, $C_2SC_3$ durch $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ bezeichnet, so sind die Figuren $S\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $S\alpha\beta\gamma$, $SABC$, .. ähnlich und von einerlei Sinn, wie aus der Aehnlichkeit von $SAA_2A_3\alpha_1$, $SBB_2B_3\beta_1$, $SCC_2C_3\gamma_1$ sich ergiebt. Zugleich sind die Geraden $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ normal zu einander, weil sie die normalen Strecken $RS$ und $SN$ normal halbiren (§. 6, 7). Also sind auch die Winkel $\alpha S\alpha_1$, $\beta S\beta_1$, $\gamma S\gamma_1$ recht, d. h. die Kreise $AA_1R$, $BB_1R$, $CC_1R$ werden von den Kreisen $A_2SA_3$, $B_2SB_3$, $C_2SC_3$ der Reihe nach normal geschnitten. Die Geraden $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ schneiden sich aber auf der Mitte der Strecke $NR$.

5. Zu zwei ähnlichen Figuren von einerlei Sinn, $ABC$ .. und $A_1B_1C_1$ .., giebt es einen sich selbst so entsprechenden Punct $S$, daß $SABC$ .. und $SA_1B_1C_1$ .. ähnliche Figuren einerlei Sinnes sind. Ist nämlich $S$ der Punct, mit welchem $AB$ und $A_1B_1$ ähnliche Dreiecke von einerlei Sinn bilden (4), so folgt aus den Bedingungen $ABS \sim A_1B_1S$, $ABC \sim A_1B_1C_1$, .. die Aehnlichkeit von $SABC$ .. und $SA_1B_1C_1$ .. (1).

Die Winkel $ASA_1$, $BSB_1$, $CSC_1$, .., $AB^\wedge A_1B_1$, $AC^\wedge A_1C_1$, $BC^\wedge B_1C_1$, .. sind von derselben Größe. Die entsprechenden Geraden $AB$ und $A_1B_1$, $AC$ und $A_1C_1$, .. schneiden sich auf dem Kreise $AA_1S$; die entsprechenden Geraden $BA$ und $B_1A_1$, $BC$ und $B_1C_1$, .. schneiden sich auf dem Kreise $BB_1S$, u. s. w. Vergl. §. 7, 3.

Die Kreise, welche die Verbindungslinien $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, .. innen in $A_2$, $B_2$, $C_2$, .., außen in $A_3$, $B_3$, $C_3$, .. nach dem Verhältniß der entsprechenden Strecken $AB : A_1B_1$ rechtwinkelig theilen (§. 8, 6), gehn durch $S$ (4). Zugleich liegen die Centren $\alpha, \beta, \gamma$, .. der Kreise $AA_1S$, $BB_1S$, $CC_1S$, .., die inneren Theilpuncte $A_2$, $B_2$, $C_3$, .., die äußeren Theilpuncte $A_3$, $B_3$, $C_3$, .., und die Centren $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, .. der Kreise $A_2A_3S$, $B_2B_3S$, $C_2C_3S$, .. so daß die Figuren $SABC$ .., $SA_1B_1C_1$, .., $SA_2B_2C_2$, .., $SA_3B_3C_3$, .., $S\alpha\beta\gamma$ .., $S\alpha_1\beta_1\gamma_1$ .. ähnlich und einerlei Sinnes sind (4).

Wird die Figur $SABC$ .. in ihrer Ebene um $S$ gedreht, bis die

Richtung $SA$ mit der Richtung $SA_1$ oder mit der entgegengesetzten Richtung zusammenfällt, so erhalten die Figuren perspectivische Lage, d. h. die Verbindungslinien der entsprechenden Puncte $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$,.. gehn durch den sich selbst entsprechenden Punct $S$. Dann sind je zwei entsprechende Gerade parallel; im ersten Falle haben je zwei entsprechende Strecken einerlei Richtung, und die Verbindungslinien $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ schließen den sich selbst entsprechenden Punct aus, welcher äußerer Aehnlichkeitspunct heißt; im andern Falle haben je zwei entsprechende Strecken entgegengesetzte Richtung, und die Verbindungslinien $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, .. schließen den sich selbst entsprechenden Punct $S$ ein, welcher innerer Aehnlichkeitspunct genannt wird.*)

**6.** Zu zwei ähnlichen Figuren von entgegengesetztem Sinn, $ABC$.. und $A_1B_1C_1$,.., giebt es einen sich selbst so entsprechenden Punct $N$, daß $NABC$.. und $NA_1B_1C_1$.. ähnliche Figuren entgegengesetzten Sinnes sind. Ist nämlich $N$ der Punct, mit welchem $AB$ und $A_1B_1$ ähnliche Dreiecke von entgegengesetztem Sinn bilden (4), so folgt aus den Bedingungen $ABN \backsim A_1B_1N$, $ABC \backsim A_1B_1C_1$, .. die Aehnlichkeit von $NABC$.. und $NA_1B_1C_1$.. (1).

Die Geraden $s$ und $n$, welche durch den Punct $N$ gehn und mit $AB$ und $A_1B_1$ entgegengesetzt gleiche und supplementäre Winkel bilden, bilden auch mit $AC$ und $A_1C_1$, mit $BC$ und $B_1C_1$,.. solche Winkel und entsprechen sich selbst dergestalt, daß $s$ von entsprechenden Geraden in entsprechenden Puncten geschnitten wird, die den Punct $N$ ausschließen, während $n$ von entsprechenden Geraden in entsprechenden Puncten geschnitten wird, die den Punct $N$ einschließen. Die Verbindungslinien der entsprechenden Puncte $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$,.. werden von den sich selbst entsprechenden Geraden $s$ und $n$ innen und außen nach dem Verhältniß entsprechender Strecken ($AB : A_1B_1$) geschnitten (4). In perspectivische Lage können ähnliche Figuren von entgegengesetztem Sinn nicht gelangen, ohne daß die eine im Raume umgewendet wird.

**7.** Zwei Kreise von beliebiger Lage können als ähnliche Figuren in perspectivischer Lage auf zwei Arten betrachtet werden. Nach der

---

*) Der bei ähnlichen Figuren sich selbst entsprechende Punct ist von Euler 1777 (Nov. Act. Petrop. 9 p. 154) betrachtet und Aehnlichkeitspunct (centrum similitudinis) genannt worden. Derselbe heißt bei Magnus (Aufg. d. anal. Geom. I. p. 59) Situationspunct. Apollonius im ersten Buch der ebenen Oerter (vergl. Camerer's Uebers. der Simson'schen Bearbeitung p. 36) hatte denselben Punct zur Construction ähnlicher Figuren gebraucht. Der Ausdruck „perspectivische Lage" rührt von Steiner her (Syst. Entw. p. 29), und ist bezeichnender als der alte Ausdruck „ähnliche Lage" (Eucl. VI, 18. XI, 27).

einen Auffassung haben sie einen äußeren, nach der andern einen innern Aehnlichkeitspunct (5); die Aehnlichkeitspuncte theilen den Abstand der Centren innen und außen nach dem Verhältniß der Radien. Durch die Aehnlichkeitspuncte gehn die gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise.*)

Setzt man den Radius $MA$, der in der durch die Centren $M$ und $M_1$ gehenden Geraden liegt, dem gleichgerichteten Radius $M_1 A_1$ entsprechend, so entspricht einem andern Radius $MB$ der gleichgerichtete Radius $M_1 B_1$ so, daß die Bogen $AB$ und $A_1 B_1$ ähnlich sind (3). Wird die Gerade $MM_1$ von der Geraden $BB_1$ in $S$ geschnitten, so sind die Dreiecke $SMB$ und $SM_1 B_1$ ähnlich und von einerlei Sinn, daher $MS : M_1 S = MB : M_1 B_1$. Wenn ferner $C$ und $C_1$ entsprechende Puncte der Kreise, mithin $MC$ und $M_1 C_1$ Radien von einerlei Richtung sind, so geht die Gerade $CC_1$ durch den Punct $S$, weil sie die Strecke $MM_1$ außen nach dem Verhältniß der Radien theilt. Wenn insbesondere die Gerade $SC$ den Kreis $(M)$ berührt, so berührt sie auch den andern Kreis $(M_1)$.

Setzt man dagegen den Radius $MA$ dem entgegengesetzten Radius $M_1 A_2$ entsprechend, so entspricht einem andern Radius $MB$ der parallele entgegengesetzte Radius $M_1 B_2$, so daß die Bogen $AB$ und $A_2 B_2$ ähnlich sind. Wird die Gerade $MM_1$ von der Geraden $BB_2$ in $T$ geschnitten, so sind die Dreiecke $TMB$ und $TM_1 B_2$ ähnlich und von einerlei Sinn, daher $MT : TM_1 = MB : M_1 B_2$, u. s. w.

Zur Bestimmung der Aehnlichkeitspuncte $S$ und $T$ der Kreise, deren Radien durch $r$ und $\varrho$ bezeichnet werden, hat man

$$MS : M_1 S : MM_1 = r : \varrho : r - \varrho$$
$$MT : TM_1 : MM_1 = r : \varrho : r + \varrho$$

Die Vergleichung von $MS$ und $MT$ mit $r$, von $M_1 S$ und $TM_1$ mit $\varrho$ folgt aus der Vergleichung von $MM_1$ mit $r - \varrho$ und $r + \varrho$, von welcher die gegenseitige Lage der beiden Kreise abhängt (§. 3, 3). Wenn die Kreise außer einander liegen, so sind $T$ und $S$ von den Kreisen ausgeschlossen, und es giebt zwei Paare gemeinschaftlicher Tangenten der Kreise. Wenn die Kreise sich außen berühren, so ist $T$ ihr gemeinschaftlicher Punct, während $S$ von beiden Kreisen ausgeschlossen bleibt, und es giebt 3 gemeinschaftliche Tangenten der Kreise. Wenn die Kreise sich schneiden, so schließen beide den Punct $T$ ein und den Punct $S$ aus, und es giebt nur ein Paar gemeinschaftliche Tangenten. Wenn ein Kreis den andern innen berührt, so schließen beide den Punct $T$ ein und haben den Punct $S$ gemein, während eine gemeinschaftliche Tangente übrig bleibt. Wenn ein Kreis von dem andern eingeschlossen wird, so

*) Vergl. Pappus VII, 110. 118. Euler a. a. O. Poncelet propr. proj. 236, Steiner geom. Constr. p. 42.

schließen beide die Puncte $T$ und $S$ ein und haben keine gemeinschaftlichen Tangenten. Bei concentrischen Kreisen fallen die Aehnlichkeitspuncte mit dem gemeinschaftlichen Centrum zusammen. Bei gleichen Kreisen liegt der äußere Aehnlichkeitspunct auf $MM_1$ unendlich fern, während der innere Aehnlichkeitspunct mit der Mitte von $MM_1$ zusammenfällt.

Wenn überhaupt die ähnlichen Figuren von einerlei Sinn aus je zwei gleichen und ähnlichen Theilen von einerlei Sinn bestehn und je ein Centrum haben (§. 7, 6), wenn ferner ein Paar entsprechende Seiten parallel sind, so können die Figuren auf zwei Arten als perspectivisch betrachtet werden. Nach der einen Auffassung haben sie einen äußeren, nach der anderen einen innern Aehnlichkeitspunct; die Aehnlichkeitspuncte theilen den Abstand der Centren innen und außen nach dem Verhältniß entsprechender Strecken. Sind $AB \,..\, A_1B_1 \,..$ und $\alpha\beta \,..\, \alpha_1\beta_1 \,..$ die ähnlichen Figuren, $M$ und $\mu$ ihre Centren, $AB$ und $\alpha\beta$ parallel, so kann der Strecke $MA$ sowohl die Strecke $\mu\alpha$ als auch die entgegengesetzte Strecke $\mu\alpha_1$ entsprechend gesetzt werden, und $M\mu$ wird von $A\alpha$ und $A\alpha_1$ in den Aehnlichkeitspuncten geschnitten.

8. I. Bei einem Dreieck $ABC$ liegen der Höhenpunct $H$ (§. 6, 9), der Schwerpunct $S$ (§. 8, 4) und das Centrum $M$ des umgeschriebenen Kreises auf einer Geraden*), so daß $HS : SM = 2$. Wenn $A_1$, $B_1$, $C_1$ die Mitten der Seiten $BC$, $CA$, $AB$ des Dreiecks $ABC$ sind, so sind die Seiten des Dreiecks $B_1C_1M$ mit den Seiten des Dreiecks $BCH$ der Reihe nach parallel. Daher sind die Dreiecke $B_1C_1M$ und $BCH$ ähnlich und von einerlei Sinn, und zwar in perspectivischer Lage mit einem innern Aehnlichkeitspunct, weil $B_1C_1$ und $BC$ entgegengesetzte Richtung haben (5). Die Strecke $HM$ geht durch den Durchschnittspunct $S$ der Geraden $BB_1$, $CC_1$ und wird von ihm innen nach dem Verhältniß $BC : B_1C_1 = 2$ (§. 8, 3) getheilt.

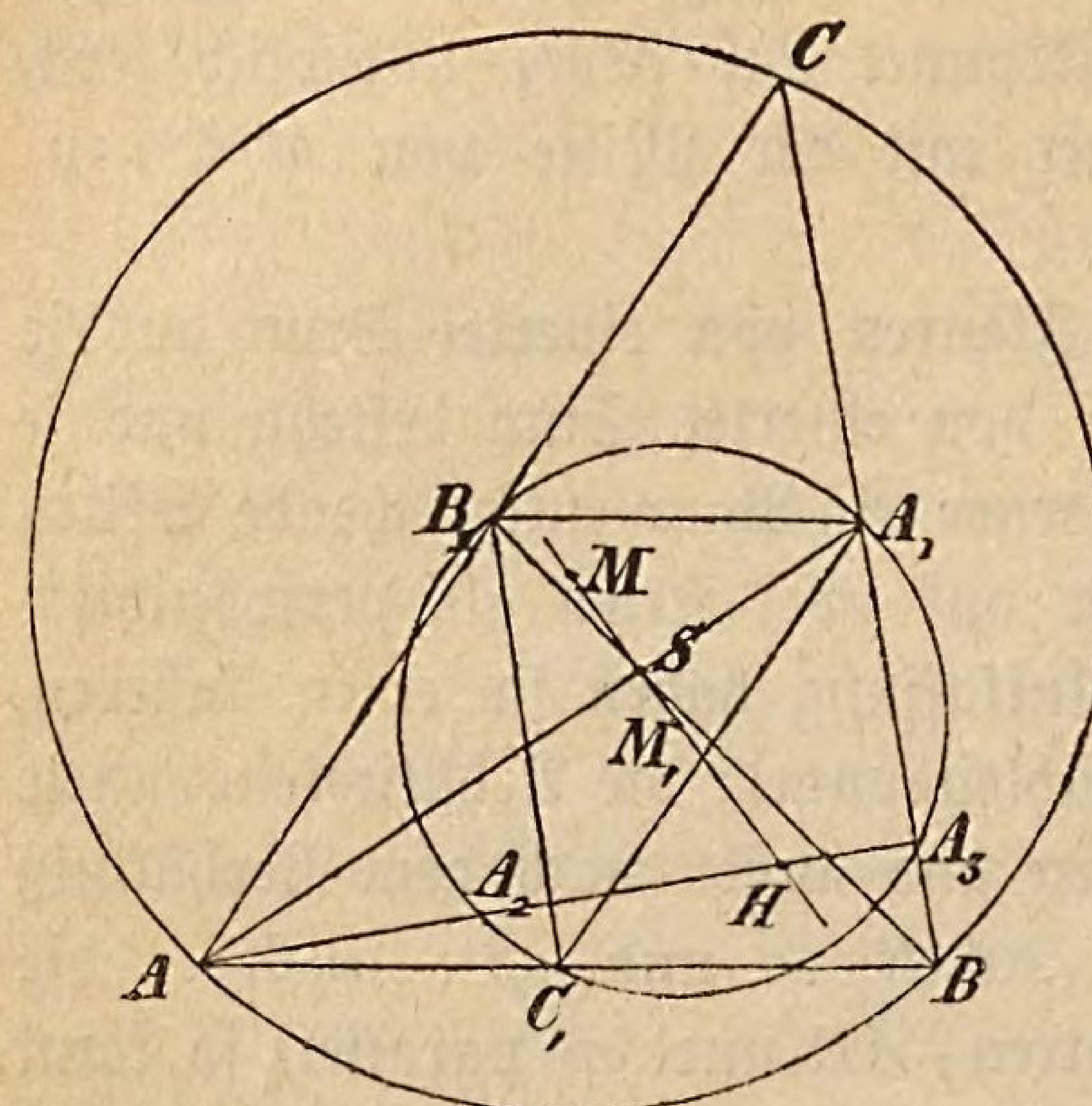
II. Auf der Euler'schen Geraden $HSM$ liegt auch das Centrum $M_1$ des Feuerbach'schen Kreises $A_1B_1C_1$, so daß $MM_1$ innen in $S$, außen in $H$ nach dem Verhältniß 2 getheilt wird.**) Wenn man $B_1C_1M_1 \backsim BCM$ macht, so ist $M_1$ das Centrum des Kreises $A_1B_1C_1$, die Radien $MA$

---

*) Euler 1765 bei Gelegenheit einer Berechnung Nov. Comm. Petrop. XI p. 14. Carnot Géom. de pos. 131. Gauß 1810 in Schumachers Uebersetzung von Carnots Werk II p. 359.

**) Feuerbach das geradlin. Dreieck 1822. 55 ff. Daß der Kreis $A_3B_3C_3$ die Seiten des Dreiecks $ABC$ und die Strecken $HA$, $HB$, $HC$ halbirt, haben auch Brianchon und Poncelet 1820 bekannt gemacht (Gerg. Ann. XI p. 215). Diese Beziehungen sind von Steiner 1833 Geom. Constr. p. 50 durch Betrachtung der Aehnlichkeitspuncte aufgeklärt worden.

und $M_1 A_1$ sind entgegengesetzt parallel im Verhältniß 2, $MM_1$ und $AA_1$ theilen einander innen im Verhältniß 2, also in $S$, dem Aehnlichkeitspunct und gemeinschaftlichen Schwerpunct der Dreiecke $ABC$ und $A_1 B_1 C_1$, dem innern Aehnlichkeitspunct der Kreise $ABC$ und $A_1 B_1 C_1$ (7). Dabei ist (I) $MH = 3MS = 2MS + 2SM_1 = 2MM_1 = 2M_1 H$, $MH : M_1 H = 2$, also $H$ der äußere Aehnlichkeitspunct der Kreise $ABC$ und $A_1 B_1 C_1$.




Wenn $A_2$ und $A_1$ Gegenpuncte des Feuerbach'schen Kreises sind, so haben die Radien $MA$ und $M_1 A_2$ dieselbe Richtung, der Punct $H$ liegt auf der Geraden $AA_2$, $HA : HA_2 = MA : M_1 A_2 = 2$, d. h. der Feuerbach'sche Kreis geht durch die Mitten $A_2$, $B_2$, $C_2$ von $HA$, $HB$, $HC$.

Wenn $BC$ von $HA$ in $A_3$ geschnitten wird, so ist der Winkel $A_1 A_3 A_2$ recht, also liegt der Fußpunct $A_3$ auf dem Kreis, dessen Gegenpuncte $A_1$ und $A_2$ sind, d. h. der Feuerbach'sche Kreis geht durch die Fußpuncte $A_3$, $B_3$, $C_3$ der Höhen des Dreiecks $ABC$.

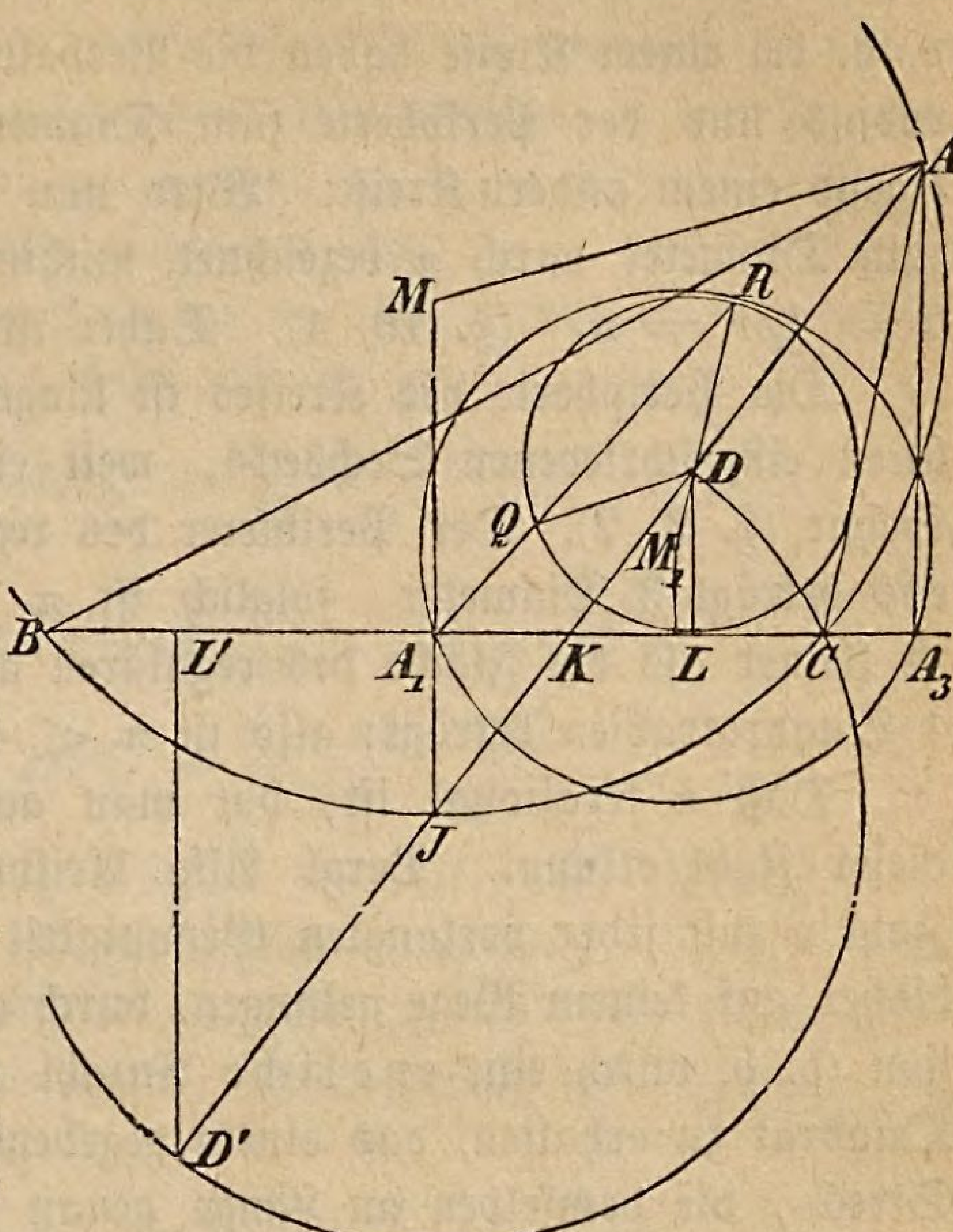
III. Der Feuerbach'sche Kreis wird von den die Seiten des Dreiecks $ABC$ berührenden Kreisen berührt, 'von dem eingeschriebenen innen, von den drei andern Kreisen außen.*)

Beweis. Wenn $J$ die Mitte des Bogens $BC$ ist, so halbirt $AJ$ nicht nur den Winkel $BAC$, sondern auch den Winkel $MAA_3$, weil $MAJ = AJM = JAA_3$. Wenn $AJ$ von dem um $J$ mit dem Radius $JC$ beschriebenen Kreis in $D$ und $D'$, von $BC$ in $K$ geschnitten wird, so ist $2DCB = DJB = AJB = ACB$, d. h. $D$ das Centrum des dem Dreieck $ABC$ eingeschriebenen Kreises, $D'$ das Centrum eines die Seiten des Dreiecks berührenden Kreises. Diese Kreise berühren $BC$ im $L$ und $L'$, deren Mitte $A_1$ ist. Dabei ist $BCJ = BAJ = JAC$, $JCK \backsim JAC$, d. h. $JD^2 = JC^2 = JK \,.\, JA$, folglich auch $A_1 L^2 = A_1 K \,.\, A_1 A_3$.

Wenn der Radius $DQ$ des eingeschriebenen Kreises die Richtung

*) Feuerbach a. a. O. 57 ff. Vergl. unten Trigonometrie §. 4, 15. Casey Quart. Journ. 1860 t. 4 p. 152. Kücker Grunert Archiv 47 p. 12. Schröter Crelle J. 68 p. 208. Lappe Crelle J. 71 p. 387. Der hier gegebene Beweis ist von Binder (Brief Schönthal 1872) dem Verf. mitgetheilt worden.

$M_1 A_1$ hat, so sind die Winkel $QDL$ und $MAA_3$ gleich, die Dreiecke $QDK$ und $LDK$ gleich und ähnlich. Wird der eingeschriebene Kreis von der Geraden $A_1 Q$ in $R$ geschnitten, so ist $A_1 Q \,.\, A_1 R = A_1 L^2 = A_1 K \,.\, A_1 A_3$, d. h. $Q, R, K, A_3$ liegen auf einem Kreis, folglich ist $2 A_1 R A_3 = 2 QRA_3 = 2 QKA_3 = 2 QKL = 2 QDL = A_1 M_1 A_3$, d. h. $R$ liegt auf dem Feuerbach'schen Kreis. Wegen der Aehnlichkeit der gleichschenkeligen Dreiecke $A_1 M_1 R$ und $QDR$ liegen $M_1$, $D$, $R$ auf einer Geraden, also wird in $R$ der Feuerbach'sche Kreis von dem eingeschriebenen Kreis innen berührt. Ebenso wird der Feuerbach'sche Kreis von dem Kreis, dessen Centrum $D'$ ist, außne berührt, weil $A_1 L'^2 = A_1 L^2$ u. s. w.




## §. 13. Cyclometrie.

**1.** Bei allen Kreisen ist sowohl das Verhältniß der Fläche zum Quadratradius, als auch das Verhältniß der Peripherie zum Diameter von unveränderlicher Größe. Diese beiden Verhältnisse sind einander gleich und haben einen ~~irrationalen~~ transzendenten Werth zwischen 3 und 4, der durch $\pi$ bezeichnet wird, so daß 1)

$$\text{Kreisfläche} = \pi \square \text{Radien}$$

$$\text{Peripherie} = \pi \text{Diameter}^{*)}$$

Beweis. Sind $r$ und $r_1$ die Radien, $k$ und $k_1$ die Flächen, $p$ und $p_1$ die Peripherien von zwei Kreisen, so hat man zufolge der Aehnlichkeit von Kreisen (§. 12, 3)

$$k : k_1 = r^2 : r_1{}^2$$

$$p : p_1 = 2r : 2r_1$$

---

*) Der in diesem Satze enthaltene Zusammenhang der Rectification (Messung der Länge) des Kreises mit der Quadratur desselben ist zuerst von Archimedes gegeben worden; die Quadratur des Kreises und der Ellipse war bereits früher gefunden. Vergl. Archimedes Quadr. d. Parabel, in der Einleitung.

1) Vgl. Lindemann's 1882.

daher

$$k : r^2 = k_1 : r_1{}^2$$
$$p : 2r = p_1 : 2r_1$$

d. h. bei einem Kreise haben die Verhältnisse der Fläche zum Quadratradius und der Peripherie zum Diameter dieselben Werthe, wie bei irgend einem andern Kreise. Wird nun das Verhältniß der Peripherie zum Diameter durch $\pi$ bezeichnet, mithin $p = 2\pi r$ gesetzt, so hat man $k = \frac{1}{2}pr = \pi r^2$ (§. 10, 4). Daher ist auch $k : r^2 = \pi$.

Die Peripherie des Kreises ist länger als der Perimeter des regulären eingeschriebenen Sechsecks, weil ein Bogen länger ist als seine Sehne (§. 3, 2). Der Perimeter des regulären eingeschriebenen Sechsecks beträgt 3 Diameter, folglich ist $\pi > 3$. Die Fläche des Kreises ist kleiner als die Fläche des regulären umgeschriebenen Vierecks, welche 4 Quadratradien beträgt; also ist $\pi < 4$.

Daß $\pi$ irrational ist, hat man aus der analytischen Bedeutung dieser Zahl erkannt. Vergl. Allg. Arithm. §. 31, 5. Obgleich man die Zahl $\pi$ mit jeder verlangten Genauigkeit begrenzen kann, so ist es doch bisher auf keinem Wege gelungen, durch elementar-geometrische Construction (d. h. durch eine endliche Anzahl von Geraden und Kreisen) ein Quadrat zu erhalten, das einem gegebenen Kreise an Fläche, oder eine Strecke, die demselben an Länge genau gleichkäme. Es ist aber auch ein Beweis für die Unmöglichkeit einer solchen Construction nicht bekannt.[1] Vergl. Euler Introd. II, 540. Ausführlichen Bericht über die Versuche zur Quadratur des Kreises findet man bei Klügel math. W. IV p. 59 ff.

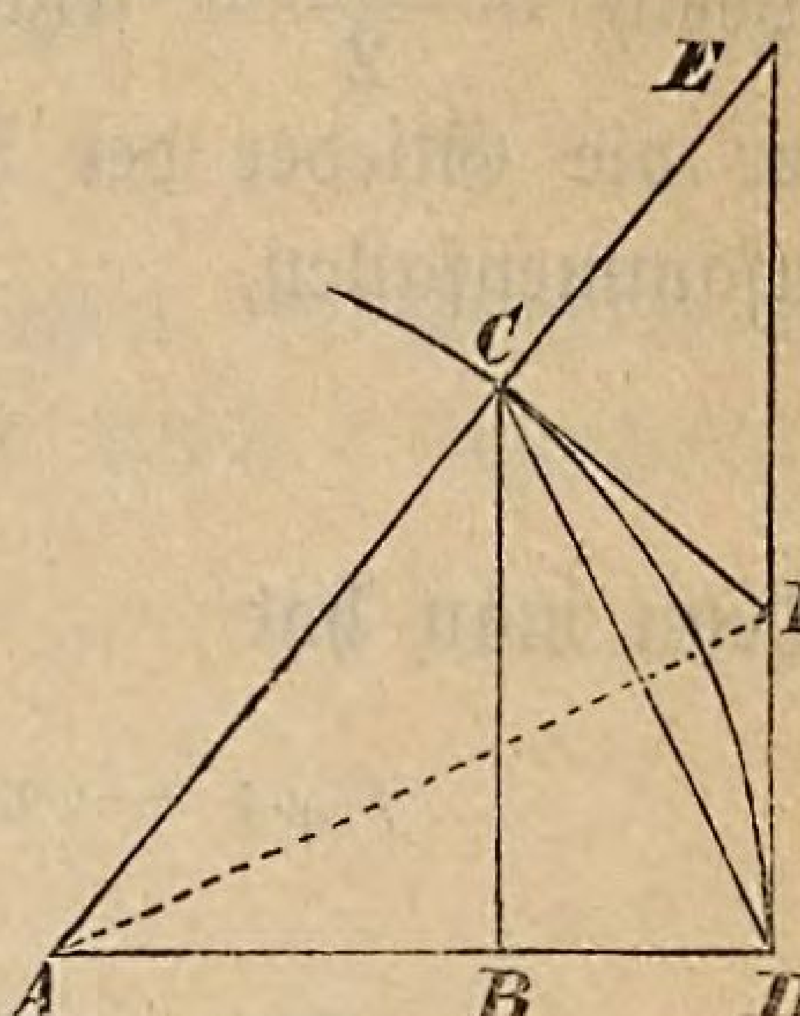
2. Um die Zahl $\pi$ annäherungsweise zu finden, berechnet man das Verhältniß der Fläche eines dem Kreise ein- oder umgeschriebenen Polygons von hinreichend großer Seitenzahl zum Quadratradius oder das Verhältniß des Perimeters eines solchen Polygons zum Diameter. Der Fehler, den man begeht, indem man das Polygon anstatt des Kreises betrachtet, vermindert sich bei wachsender Seitenzahl des Polygons. Die Fläche oder der Umfang eines dem Kreise ein- oder umgeschriebenen Polygons kann in Quadratradien oder Diametern einfach ausgedrückt werden, wenn das Polygon regulär ist und 4 oder 6 oder 10 Seiten hat. Aus der Fläche (oder dem Umfang) des dem Kreise eingeschriebenen und des demselben umgeschriebenen regulären $n$Ecks lassen sich aber die Flächen (oder die Umfänge) der dem Kreise eingeschriebenen und der umgeschriebenen regulären $2n$Ecke, $4n$Ecke, $8n$Ecke, . . berechnen, wie folgt.

Die Flächen der regulären $n$Ecke, des einem Kreise eingeschriebenen

Den Beweis lieferte 1882, also nach Herausgabe eines Buches, Lindemann in München. Kehr.

und des umgeschriebenen, werden durch $e$ und $u$, die Flächen der regulären $2n$Ecke durch $e_1$ und $u_1$, die Flächen der regulären $4n$Ecke durch $e_2$ und $u_2$, u. s. w. bezeichnet. Dann ist $e_1$ das geometrische Mittel zwischen $e$ und $u$, und $u_1$ das harmonische Mittel zwischen $e_1$ und $u$ (Algebra §. 1, 9); $e_2$ das geometrische Mittel zwischen $e_1$ und $u_1$, und $u_2$ das harmonische Mittel zwischen $e_2$ und $u_1$, u. s. w.*)

Beweis. Ist der Winkel $BAC$ der $2n$te Theil von $360^0$, $CBA$ recht, die Seite $AD = AC$, der Winkel $EDA$ und $ACF$ recht, so ist die Fläche




$$ABC = \frac{e}{2n} \qquad ADE = \frac{u}{2n}$$

$$ADC = \frac{e_1}{2n} \qquad ADFC = \frac{u_1}{2n}$$

$$FEC = \frac{u - u_1}{2n} \qquad DFC = \frac{u_1 - e_1}{2n}$$

Zuerst hat man nun $ABC : ADC = AB : AD$ (§. 10, 1) $= AC : AE$ (§. 8, 2) $= ADC : ADE$, folglich $e : e_1 = e_1 : u$, $e_1{}^2 = eu$.

Ferner hat man $FEC : DFC = FE : DF$ (§. 10, 1) $= FEA : DFA = FEA : FCA = AE : AC = ADE : ADC$, folglich $u - u_1 : u_1 - {}_1e = u : e_1$, $2ue_1 = u_1 e_1 + u_1 u$,

$$\frac{1}{u_1} = \left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{u}\right)$$

Zu einer ähnlichen Annäherung an die Fläche oder den Umfang des Kreises dient die von Cusanus (Zeitgenosse von Regiomontan) und Descartes unternommene Vergleichung eines regulären $n$Ecks mit einem regulären $2n$Eck, $4n$Eck, .. von gleicher Fläche oder von gleichem Umfang. Vergl. Klügel math. W. IV p. 77 und 67. Legendre élém. de géom. IV am Ende.

3. Die Differenz zwischen der Fläche des Kreises und $e_m$ oder $u_m$ ist geringer als $u_m - e_m$. Insoweit nun $e$ und $u$, $e_1$ und $u_1$, $e_2$ und $u_2$, .. übereinstimmen, geben sie die Fläche des Kreises annäherungsweise an, also auch die Zahl $\pi$, wenn man unter $e$, $e_1$, $e_2$, .., $u$, $u_1$, $u_2$, .. die Verhältnisse der einzelnen Polygone zum Quadratradius versteht.

Etwas leichter als die Größen $e$, $e_1$, $e_2$, .., $u$, $u_1$, $u_2$, .. findet man die Reciproken derselben, die der Reihe nach durch $f$, $f_1$, $f_2$, .., $v$, $v_1$, $v_2$, .., bezeichnet werden mögen. Nach (2) hat man nämlich

---

*) Der erste von diesen Sätzen ist in dieser Form zuerst von Snellius (Cyclom. prop. 9), der andere von Jac. Gregory (vera circuli et hyperbolae quadratura 1667, prop. 1 und 12) aufgestellt worden. Gregory's Schrift ist auch in Hugenii opp. varia p. 412 enthalten. Die analogen Sätze für die Umfänge (5) hatte bereits Archimedes in der Cyclometrie gebraucht.

$$f_1 = \sqrt{fv}, \quad v_1 = \frac{f_1 + v}{2}, \ldots$$

Wenn nun $f_m$ und $v_m$ so wenig verschieden sind, daß $\frac{(f_m - v_m)^2}{8v_m}$ innerhalb der Rechnungsgrenzen verschwindet, so kann man für $f_{m+1}$ den Werth $\frac{f_m + v_m}{2}$ setzen (Algebra §. 1, 10), und findet als Grenze, mit der die Glieder der Reihe $f_{m+1}$, $v_{m+1}$, $f_{m+2}$, $v_{m+2}$, . . mehr und mehr zusammenfallen,

$$\frac{1}{\pi} = v_m + \frac{f_m - v_m}{3}$$

Denn man hat

$$f_{m+1} - v_m \qquad = \qquad \frac{f_m - \quad}{2}$$

$$v_{m+1} - f_{m+1} = \frac{v_m - f_{m+1}}{2} = -\frac{f_m - v_m}{4}$$

$$f_{m+2} - v_{m+1} = \frac{f_{m+1} - v_{m+1}}{2} = \frac{f_m - v_m}{8}$$

. . . . . . . . . . . . . . .

folglich durch Addition der Colonnen

$$f - v_m = \frac{f_m - v_m}{2}\left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \ldots\right)$$

$$= \frac{f_m - v_m}{3} \text{ (Allg. Arithm. §. 12, 5).}$$

Beispiel. Von den regulären Vierecken hat das dem Kreise eingeschriebene 2, das umgeschriebene 4 Quadratradien. Aus den Werthen $e = 2$, $u = 4$ findet man

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f$ | 0,5 | $v$ | 0,25 |
| $f_1$ | 0,353 553 | $v_1$ | 0,301 776 |
| $f_2$ | 0,326 640 | $v_2$ | 0,314 208 |
| $f_3$ | 0,320 364 | $v_3$ | 0,317 286 |
| $f_4$ | 0,318 821 | $v_4$ | 0,318 054 |
| | . . . . | | . . . . |

Es ist aber

$$f_4 - v_4 = 0{,}000\,767$$

$$\frac{(f_4 - v_4)^2}{8v_4} = 0{,}000\,0002$$

folglich innerhalb der obigen Rechnungsgrenzen

$$\frac{1}{\pi} = v_4 + \frac{f_4 - v_4}{3} = 0{,}318\,310$$

$$\pi = 3{,}14159.$$

Anmerkung. Archimedes hat durch Betrachtung der Umfänge der regulären 96Ecke die Grenzen $3\frac{10}{71}$ und $3\frac{1}{7}$ für $\pi$ gefunden. Auf demselben Wege sind im Alterthum Apollonius, unter den Neuern Vieta (1579) und Ludolph van Ceulen (1596) weiter vorgedrungen. Nach dem Letztern wird $\pi$ häufig die Ludolph'sche Zahl genannt. Den Näherungswerth $\frac{355}{113}$ für $\pi$ hat Metius, ein Zeitgenosse Ceulen's gegeben. Vergl. Klügel math. W. I p. 644.

**4.** Wenn $e, e_1, e_2, \ldots, u, u_1, u_2, \ldots$ die oben (2) angegebene Bedeutung haben, und wenn man die Kreisfläche durch $k$ bezeichnet, so ist

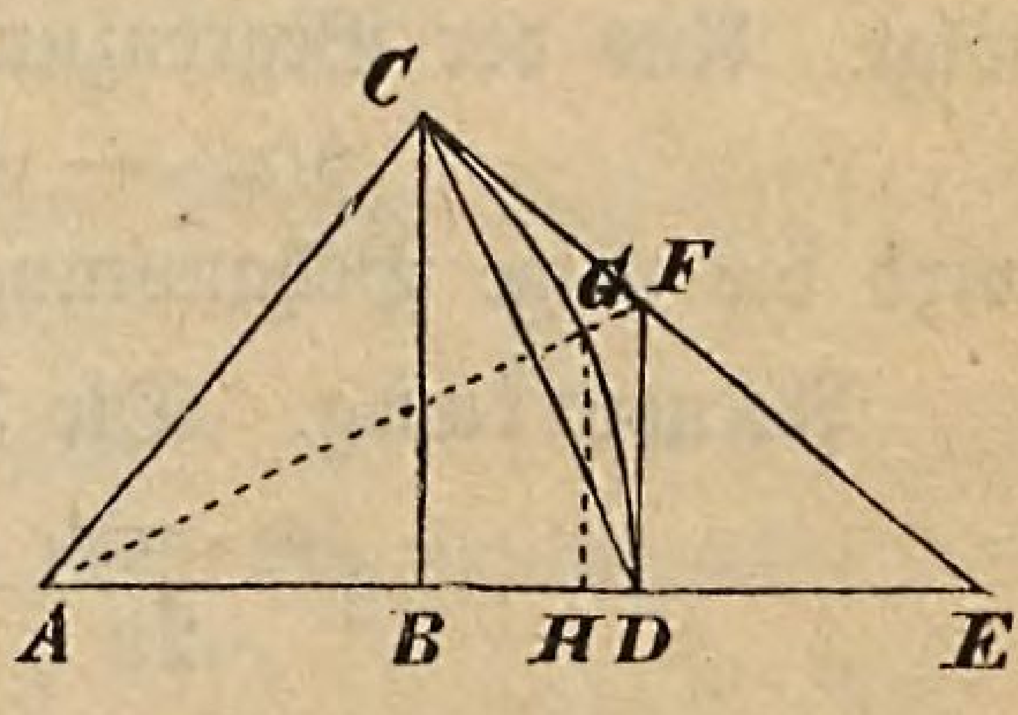
$$e_2 - e_1 > \frac{e_1 - e}{4}$$

$$u - u_2 > \frac{e_1 - e}{2}$$

$$e_1 + \frac{e_1 - e}{3} < k < u - \frac{u - e}{3} \text{*)}$$

Beweis. Ist der Sector $DAC$ der $2n$te Theil des Kreises, sind die Winkel $CBA$, $ACE$, $FDA$ recht, und $G$ die Mitte des Bogens $DC$, so ist die Dreiecksfläche

$$BDC = \frac{e_1 - e}{2n}, \quad DGC = \frac{e_2 - e_1}{2n}, \quad DEF = \frac{u - u_1}{2n}.$$




Zieht man $GH$ mit $FD$ parallel, so ist $HDG$ gleich und ähnlich der Hälfte von $DGC$, und nach §. 10, 3
$HDG : BDC = (HD : BD)(HG : BC)$.
Nun ist $HD : BD = DG^2 : DC^2$ (§. 10, 2) $> \frac{1}{4}$, weil $DG : DC > \frac{1}{2}$; ferner $HG : BC > \frac{1}{2}$, weil $HG : DC = \frac{1}{2}$ und $DC : BC > 1$. Folglich ist $HDG : BDC > \frac{1}{8}$,

$$DGC : BDC > \tfrac{1}{4}, \text{ d. h. } e_2 - e_1 > \frac{e_1 - e}{4}$$

Ferner ist $CF = FD < FE$, folglich

$$DEF : BEC = (FE : CE)^2 > \tfrac{1}{4} \text{ (§. 11, 1)}$$
$$BEC : BDC = BE : BD = CE : CF > 2$$

---

*) Huygens de circuli magnitudine inventa 1654, prop. 1—4. (Opera varia 1724 p. 357). Dieselben Begrenzungen sind arithmetisch aus den in (2) gegebenen Gleichungen von Jac. Gregory abgeleitet worden. Vergl. Kunze Planimetrie 8ter Anhang.

woraus durch Multiplication folgt

$$DEF : BDC > \tfrac{1}{2}, \text{ d. h. } u - u_1 > \frac{e_1 - e}{2}.$$

Weil $e_\infty$ und $u_\infty$ von $k$ nicht verschieden sind, so erhält man aus dem System

$$\begin{array}{lll} e_1 - e & & = e_1 - e \\ e_2 - e_1 & & > \tfrac{1}{4}(e_1 - e) \\ e_3 - e_2 > \tfrac{1}{4}(e_2 - e_1) & & > \tfrac{1}{16}(e_1 - e) \\ e_4 - e_3 > \tfrac{1}{4}(e_3 - e_2) & & > \tfrac{1}{64}(e_1 - e) \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

durch Addition der Colonnen

$$k - e > (e_1 - e)(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \ldots)$$
$$k - e > \tfrac{4}{3}(e_1 - e). \text{ Allg. Arithm. §. 12, 5.}$$

Dagegen giebt das System

$$\begin{array}{l} u - u_1 > \tfrac{1}{2}(e_1 - e) \\ u_1 - u_2 > \tfrac{1}{2}(e_2 - e_1) \\ u_2 - u_3 > \tfrac{1}{2}(e_3 - e_2) \\ \ldots \quad \ldots \end{array}$$

durch Addition der Colonnen

$$u - k > \tfrac{1}{2}(k - e),$$

woraus durch Addition von $k - e$

$$u - e > \tfrac{3}{2}(k - e), \quad k - e < \tfrac{2}{3}(u - e)$$

folgt. Aus der Begrenzung

$$\tfrac{4}{3}(e_1 - e) < k - e < \tfrac{2}{3}(u - e)$$

wird die obige Behauptung durch Addition von $e$ abgeleitet.

Anmerkung. Die Begrenzung

$$\tfrac{4}{3}\frac{e_2 - e_1}{2n} < \frac{k - e_1}{2n} < \tfrac{2}{3}\frac{u_1 - e_1}{2n}$$

giebt zu erkennen, daß das Segment $CDG$ mehr als $\tfrac{4}{3}$ des eingeschriebenen Dreiecks $CDG$ und weniger als $\tfrac{2}{3}$ des umgeschriebenen Dreiecks $CDF$ beträgt.

5. Bezeichnet man durch $r$ den Radius des Kreises, und durch $E, E_1, E_2, \ldots, U, U_1, U_2, \ldots, K$ die Perimeter, welche die Flächen $e, e_1, e_2, \ldots, u, u_1, u_2, \ldots, k$ (4) einschließen, so hat man

$$e_2 = \tfrac{1}{2}Er, \quad u = \tfrac{1}{2}Ur, \quad k = \tfrac{1}{2}Kr.$$

Denn das Viereck $ADGC = GAD + AGC = \tfrac{1}{2}AG \,.\, DC$ (§. 10, 4), folglich $e_2 = \tfrac{1}{2}E_1 r$, u. s. w. Mittelst dieser Gleichungen findet man aus (2), daß $U_1$ das harmonische Mittel zwischen $E$ und $U$, und $E_1$ das geometrische Mittel zwischen $U_1$ und $E$ ist, — Sätze von trigono=

metrischer Bedeutung, auf welche die von Archimedes unternommene Begrenzung der Zahl $\pi$ sich gründet. Ebenso erhält man aus (4)

$$E_1 + \frac{E_1 - E}{3} < K < U_1 - \frac{U_1 - E}{3}$$

Als obere Grenze hat Huygens (a. a. O. prop. 9) $E + \frac{U - E}{3}$ gefunden. Andere Grenzen der Peripherie des Kreises oder eines Bogens hatte Snellius in der Schrift Cyclometricus 1621 mitgetheilt, von denen eine bereits bei Nicolaus Cusanus (1450) vorkommt. Vergl. Klügel math. W. IV p. 80. Den Beweis für Snellius' Begrenzung hat Huygens (a. a. O. prop. 15 und 16) geliefert.

**6.** Engere Begrenzungen der Zahl $\pi$ sind von Huygens a. a. O. und von Jac. Gregory theils in der angeführten Schrift, theils in dem Anhange der Exercitationes geometricae 1668 angezeigt worden. Unter den hierzu dienlichen Methoden ist folgende von Legendre (élém. de géom. Note 3) gebrauchte durch ihre Tragweite bemerkenswerth.

Wenn die Reihen $f, f_1, f_2, ..$ und $v, v_1, v_2, ..$ dadurch gebildet werden, daß (3)

$$f_1 = \sqrt{fv}, \quad v_1 = \frac{f_1 + v}{2}$$

$$f_2 = \sqrt{f_1 v_1}, \quad v_2 = \frac{f_2 + v_1}{2}, \text{ u. s. w.}$$

so nähern sich ihre Glieder einer bestimmten Grenze, weil $2f_1 - 2v_1 = f_1 - v < f - v$, also $f_1 - v_1 < \frac{1}{2}(f - v)$, u. s. w.

Zur Berechnung dieser Grenze setzt man $f = v(1 + \delta)$ und die Grenze $= v(1 + A\delta + B\delta^2)$, worin $A$, $B$ näher zu bestimmende Coefficienten bedeuten. Setzt man ferner $f_1 = v_1(1 + \delta_1)$, so wird die Grenze $= v_1(1 + A\delta_1 + B\delta_1^{\,2})$, weil dieselbe durch den vorgeschriebenen unendlichen Proceß eben so wohl aus $f_1$ und $v_1$, als aus $f$ und $v$ gefunden wird. Es ist aber (Allg. Arithm. §. 32, 2)

$$f_1 = v\sqrt{1 + \delta} = v(1 + \tfrac{1}{2}\delta - \tfrac{1}{8}\delta^2)$$
$$v_1 = \tfrac{1}{2}(f_1 + v) = v(1 + \tfrac{1}{4}\delta - \tfrac{1}{16}\delta^2)$$

wenn man die höhern Potenzen von $\delta$ als unbeträchtlich klein wegläßt. Durch Division findet man

$$\frac{f_1}{v_1} = \frac{1 + \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{8}\delta^2}{1 + \frac{1}{4}\delta - \frac{1}{16}\delta^2} = 1 + \tfrac{1}{4}\delta - \tfrac{1}{8}\delta^2 = 1 + \delta_1$$
$$\delta_1 = \tfrac{1}{4}\delta - \tfrac{1}{8}\delta^2, \quad \delta_1^{\,2} = \tfrac{1}{16}\delta^2$$

Die Identität der Grenzen

$$1 + A\delta + B\delta^2 = (1 + \tfrac{1}{4}\delta - \tfrac{1}{16}\delta^2)(1 + \tfrac{1}{4}A\delta - \tfrac{1}{8}A\delta^2 + \tfrac{1}{16}B\delta^2)$$
$$= 1 + \left.\begin{array}{l} \frac{1}{4} \\ + \frac{1}{4}A \end{array}\right| \delta \left.\begin{array}{l} - \frac{1}{16} \\ + \frac{1}{16}A \\ - \frac{1}{8}A \\ + \frac{1}{16}B \end{array}\right| \delta^2$$

lehrt (Algebra §. 4, 1), daß

$$\tfrac{3}{4}A = \tfrac{1}{4}, \quad A = \tfrac{1}{3},$$
$$\tfrac{15}{16}B = -\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16}A - \tfrac{1}{8}A, \quad B = -\tfrac{1}{12}$$

ist und mithin die gesuchte Grenze $v(1 + \frac{1}{3}\delta - \frac{1}{12}\delta^2)$.

Beispiel. Aus den Werthen (3)

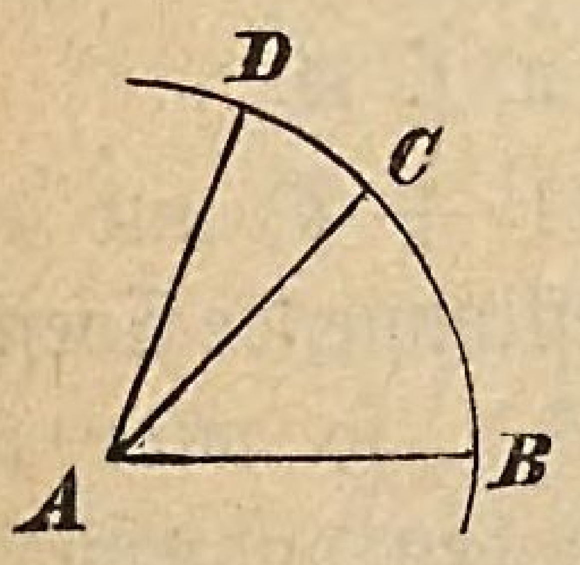
$$f_3 = 0{,}320\,364 \quad v_3 = 0{,}317\,286$$

findet man für die Grenze

$$\begin{array}{r} 0{,}317\,286 \\ +\ 0{,}001\,026 \\ -\ 0{,}000\,0025 \\ \hline 0{,}318\,3095 \end{array}$$

Anmerkung. Die analytische Berechnung der Zahl $\pi$ (Allg. Arithm. §. 31 und 32) wurde vorbereitet durch Vieta (Klügel math. W. II p. 606), Wallis und Brouncker, vollendet durch Jac. Gregory, Newton und Leibniz (Klügel math. W. I p. 654).

7. Das Verhältniß von Bogen eines Kreises ist dem Verhältniß ihrer Centriwinkel gleich. Eucl. VI, 33.




Beweis. Der Winkel $BAC$ enthält den $m$ten Theil von $BAD$ entweder $n$mal, oder mehr als $n$mal und weniger als $(n + 1)$mal, d. h. $BAC : BAD = n : m$, oder

$$n : m < BAC : BAD < n + 1 : m.$$

Die Geraden, welche den Winkel $BAD$ in $m$ gleiche Theile theilen, theilen auch den Bogen $BD$ in $m$ gleiche Theile, weil zu gleichen Centriwinkeln gleiche Bogen des Kreises gehören (§. 1, 6). Wenn nun der Winkel $BAC$ den $m$ten Theil von $BAD$ $n$mal enthält, so enthält auch der Bogen $BC$ den $m$ten Theil des Bogens $BD$ $n$mal, d. h.

$$BC : BD = n : m = BAC : BAD.$$

Wenn aber

$$n : m < BAC : BAD < n + 1 : m,$$

so ist auch

$$n : m < BC : BD < n + 1 : m.$$

Die Differenz der Verhältnisse $(BC : BD) - (BAC : BAD)$ kann von Null nicht verschieden sein, weil sie kleiner ist als der beliebig kleine Bruch $\frac{1}{m}$. Vergl. §. 10, 1.

8. Die einem Winkel concentrisch eingeschriebenen Kreisbogen sind ähnlich (1), also hat jeder von ihnen zu seinem Radius dasselbe Verhältniß, welches der Arcus des Winkels heißt. Der Arcus von $180^0$ ist $\pi$, der Arcus von $1^0$ ist $\pi : 180$ (7), der Arcus von $\alpha^0$ ist $\alpha\pi : 180 = \alpha : \frac{180}{\pi}$, der Arcus eines Winkels ist das Verhältniß des Winkels zum $\pi$ten Theil von $180^0$.

Der Centriwinkel, dessen Bogen so lang ist als der Radius, hat den Arcus 1 und $180 : \pi$ Grad d. i.

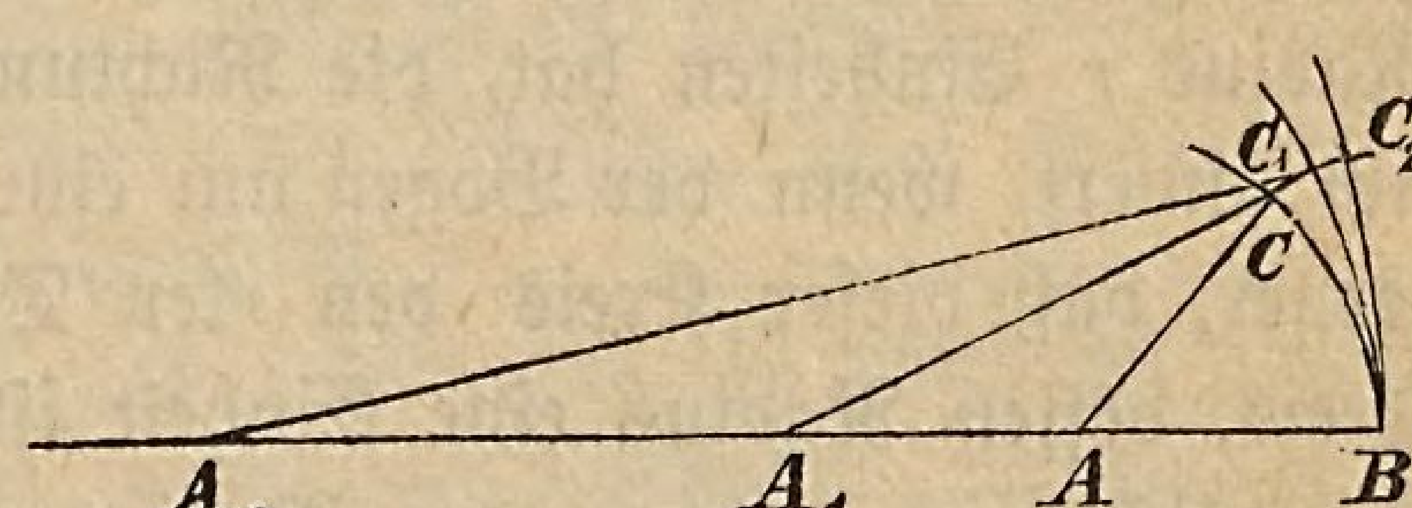
$$57^0{,}2958 = 3437'{,}75 = 206265''$$

Der Arcus $a$ gehört zu dem Winkel von $(180 : \pi)\,a$ Grad. Demnach ist

Kreisbogen = Arcus des Centriw. $\times$ Radius

Kreissector = $\frac{1}{2}$ Arcus des Centriw. $\times$ Quadrat-Radius (§. 10, 4)

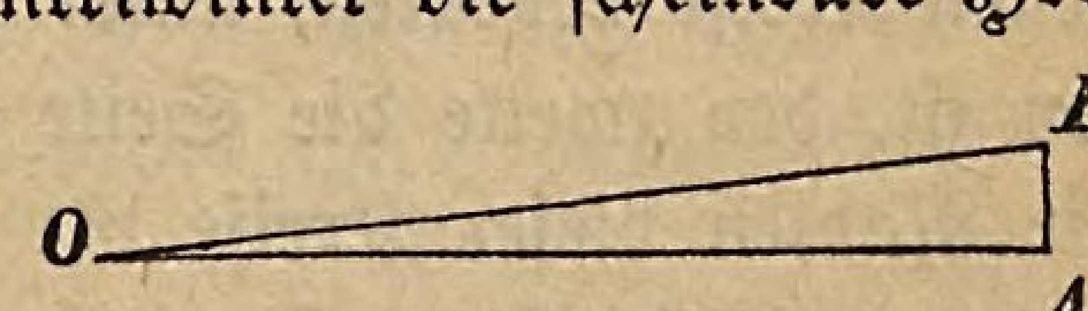
Wie man Größe abkürzend setzt für ihr Verhältniß zur Einheit, so setzt man Winkel für seinen Arcus, indem man den $\pi$ten Theil von $180^0$ als Winkeleinheit nimmt.




Anwendungen. Wenn $BA_1 = 2BA$, $BA_2 = 2BA_1$, u. s. w., wenn von den Kreisen, deren Centren $A_1$, $A_2$, .. und deren Radien $A_1B$, $A_2B$, .. sind, der erste von der Geraden $A_1C$ in $C_1$, der zweite von der Geraden $A_2C_1$ in $C_2$, .. geschnitten wird, so sind die Bogen $BC$, $BC_1$, $BC_2$, .. von gleicher Länge. Denn der Winkel $BA_1C_1 = BA_1C$ ist die Hälfte von $BAC$ (§. 4, 2), u. s. w., folglich

$$AB \,.\, BAC = A_1B \,.\, BA_1C_1 = A_2B \,.\, BA_2C_2 = \ldots$$

Die scheinbare Höhe eines Objects ist dem Verhältniß seiner verticalen Höhe zum horizontalen Abstand vom Auge um so mehr gleich, je kleiner dieses Verhältniß, d. h. je weniger die Höhe des Objects von einem Kreisbogen verschieden ist, dessen Centriwinkel die scheinbare Höhe des Objects angiebt. Ist z. B. $AB =$ 27,3 Fuß, $OA = 1859$ Fuß, der Winkel $BAO$ recht, so hat man $AB : OA = 0{,}0147$ und die scheinbare Höhe $AOB = 0{,}0147 \,.\, 3438' = 50'{,}5$.




Die logarithmische Berechnung wird Algebra §. 8, 3 gezeigt.

9. Auf einer Curve theile man von einem ihrer Puncte aus Bogen von gleicher Länge ab, ziehe die Tangenten der Curve in den Theilpuncten (§. 3, 5), und bestimme den Winkel jeder Tangente mit der vorhergehenden. Wenn nun diese Winkel einander gleich sind, wie klein auch die gleichen Bogen genommen werden mögen, so ändert sich die Richtung der Curve von dem gewählten Anfange an gleichförmig, die Curve ist daselbst gleichförmig gekrümmt und hat eine unveränderliche Krümmung (curvatura, courbure). Wenn aber diese Winkel ungleich sind, so ändert sich die Richtung der Curve ungleichförmig, die Curve ist ungleichförmig gekrümmt und hat veränderliche Krümmung. Jeder Kreis ist gleichförmig gekrümmt, weil der Winkel der Tangenten an den Enden eines Bogens dem Centriwinkel gleich ist (§. 4, 8), und zu gleichen Bogen gleiche Centriwinkel gehören.

Unter der Krümmung eines Kreises d. h. einer gleichförmig gekrümmten Linie ist der Winkel zu verstehn, welchen die Tangenten an den Enden eines Bogens bilden, dessen Länge einer Längeneinheit gleichkommt. Folglich hat man

$$\text{Krümmung des Kreises} = \frac{1}{\text{Radius}}$$

weil jener Winkel dem Centriwinkel des Bogens gleich ist, der aus (8) gefunden wird. Diese Gleichung lehrt, daß bei einem Kreise, dessen Radius $r$ Einheiten hat, die Richtung um den $r$ten Theil von $180^0 : \pi$ sich ändert, wenn der Bogen um eine Einheit sich ändert. Man schließt ferner, daß dieser Kreis den $r$ten Theil so stark gekrümmt ist, als ein Kreis, dessen Radius eine Einheit ist; daß die Krümmung des Kreises unendlich wird, wenn der Radius verschwindet und der Kreis mit seinem Centrum zusammenfällt; daß die Krümmung des Kreises verschwindet, wenn der Radius unendlich wird und der Kreis mit einer seiner Tangenten zusammenfällt.

Anwendung. Die Summe der Krümmungen der Kreise, welche von den Seiten eines Dreiecks je eine außen, die beiden andern innen berühren, ist der Krümmung des eingeschriebenen Kreises gleich. Wenn die Seiten des Dreiecks $BC$, $CA$, $AB$ der Reihe nach $a$, $b$, $c$ Einheiten haben, wenn $D$, $F$, $G$, $H$ die Centren der dem Dreieck eingeschriebenen Kreise bedeuten, unter denen der erste von dem Dreieck eingeschlossen ist, der zweite die Seite $BC$ außen berührt, u. s. w., wenn ferner die Radien dieser Kreise der Reihe nach $d$, $f$, $g$, $h$ Einheiten betragen und die Fläche des Dreiecks $\triangle$ Quadrateinheiten hat, so schließt man aus den Gleichungen $ABC = + BCD + CAD + ABD = - CBF + CAF + ABF = \ldots$, $2\triangle = (a + b + c) d = \ldots$, daß

$$\frac{1}{d} = \frac{a + b + c}{2\triangle}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{-a + b + c}{2\triangle}$$

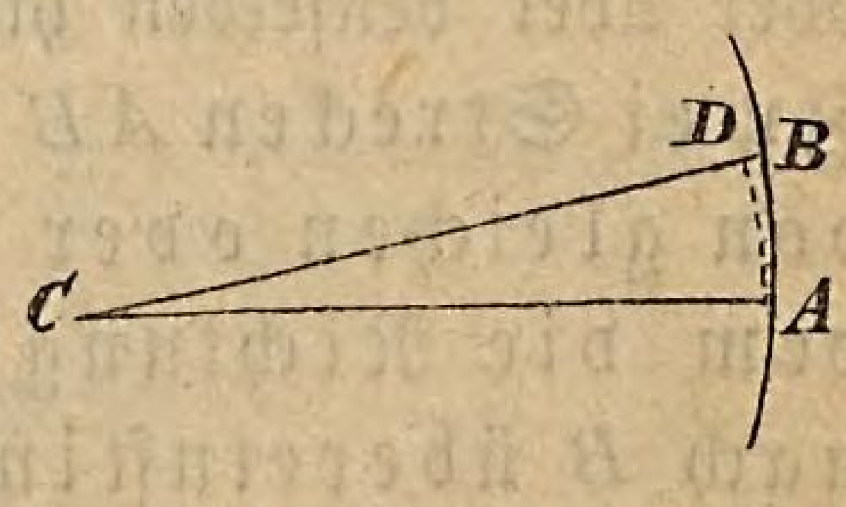
$$\frac{1}{g} = \frac{a - b + c}{2\triangle}$$

$$\frac{1}{h} = \frac{a + b - c}{2\triangle}$$

folglich $\frac{1}{f} + \frac{1}{g} + \frac{1}{h} = \frac{1}{d}$ *), worin die obige Behauptung enthalten ist.

**10.** Eine ungleichförmig gekrümmte Linie hat in jedem Puncte eine bestimmte Krümmung, in verschiedenen Puncten im Allgemeinen verschiedene Krümmungen. Um die Krümmung der Curve in einem ihrer Puncte zu berechnen, bilde man den Winkel der Tangenten des gegebenen Puncts und eines in seiner Nähe beliebig gewählten Puncts, oder den gleich großen Winkel der Normalen dieser Puncte (§. 3, 6). Der Quotient des so entstandenen Winkels („Contingenzwinkel" bei den Neuern) durch den zwischen den Berührungspuncten liegenden Bogen drückt die gesuchte Krümmung insoweit genau aus, als der Bogen für gleichförmig gekrümmt gelten darf (9). Diese Voraussetzung wird um so mehr erfüllt, je kleiner der Bogen. Also ist die gesuchte Krümmung die in jedem gegebenen Falle zu berechnende Grenze, welche jener Quotient erreicht, indem der Bogen verschwindet.

Wenn $A$ der gegebene Punct der Curve, $B$ ein beliebiger Punct der Curve in der Nähe von $A$ ist; wenn die Normalen der Curve in $A$ und $B$ gezogen werden und die erstere von der letztern in $C$ geschnitten wird; wenn ferner der Kreis, dessen Centrum $C$ und dessen Radius $CA$ ist, die Normale $CB$ in $D$ schneidet, so ist der Winkel $ACB$ dem Quotienten des Bogens $AD$ durch den Radius $CA$ gleich (8). Folglich ist der Quotient von $ACB$ durch den Bogen $AB$ so viel als das Product des Verhältnisses der Bogen $AD : AB$ mit der Krümmung des Kreises ($C$). Weil aber die Bogen $AD$ und $AB$ normal zu $AC$ sind, so berühren sie einander und fallen um so mehr zusammen, je kleiner der Bogen $AB$ und dadurch der Winkel $ACB$ wird. Dabei behält $C$ eine endliche Entfernung von




*) L'Huilier Elém. d'analyse géom. et algébr. p. 224. Vergl. Stereom. §. 8, 14.

$A$, wenn nicht die Curve in $A$ die Krümmung 0 hat. Mithin ist die Krümmung der Curve in $A$ der Krümmung eines bestimmten Kreises gleich, welcher unter den die Curve in $A$ berührenden Kreisen am meisten mit der Curve zusammenfällt, so daß zwischen ihm und der Curve ein Kreis nicht gezogen werden kann. Dieser Kreis heißt der Krümmungskreis (Osculationskreis) für den gegebenen Punct der Curve, sein Centrum das Krümmungscentrum, sein Radius der Krümmungsradius. Weil ein die Curve in $A$ berührender Kreis, der durch $B$ geht, in den Krümmungskreis übergeht, wenn $B$ mit $A$ zusammenfällt, so sagt man, daß der Krümmungskreis mit der Curve 3 unendlich nahe Puncte gemein hat, deren Verein der Berührungspunct ist, und nennt seine Berührung (die zugleich Durchschneidung ist) 3punctig. Andere Kreise, welche die Curve in demselben Punct berühren, haben mit ihr wie die gerade Tangente 2punctige Berührungen (§. 3, 5).

Die Lehre von der Krümmung der Curven wurde angeregt durch Huygens' Lehre von der Abwickelung der Curven (Horol. oscill. 1673. 3ter Abschn.), und findet sich ausgebildet bei Newton in mehrern Stellen der Principia (1687), besonders aber Methodus fluxionum, probl. 5 und 6 (zuerst 1736 gedruckt). Gleichzeitig hat denselben Gegenstand Leibniz beleuchtet (Acta Erud. 1686), von dem der Ausdruck Osculation herrührt, nicht ohne Irrungen, welche Jac. Bernoulli Acta Erud. 1692 berichtigte. Vergl. Klügel math. W. III p. 398.

## §. 14. Producte und Quadrate von Strecken.*)

**1.** Die Strecke $AB$ einer gegebenen Geraden habe $x$ Längeneinheiten. Wenn die Zahl $x$ um $y$ steigt oder fällt, so bewegt sich der Endpunct $B$ der Strecke $AB$ auf der gegebenen Geraden vorwärts in der Richtung von $A$ nach $B$ oder rückwärts in der entgegengesetzten Richtung. Wenn in dem zweiten Falle die Differenz $x - y$ null oder negativ wird, so fällt der Endpunct $B$ mit dem Anfang $A$ zusammen oder über denselben hinaus auf die andere Seite der gegebenen Geraden. Zwei Strecken $AB$ und $AC$ einer Geraden haben also Werthe von gleichen oder von entgegengesetzten Zeichen, je nachdem die Richtung von $A$ nach $C$ mit der Richtung von $A$ nach $B$ übereinstimmt oder nicht.**)

---

*) Dieser Abschnitt ist eigentlich trigonometrisch; die in Betracht gezogenen metrischen Relationen sind solche, die weder Winkel noch Winkelfunctionen enthalten.

**) Negative Strecken sind seit dem Anfang des 17ten Jahrhunderts, namentlich durch Girard, Descartes u. A. in Gebrauch gekommen. Die folgerichtige Unterscheidung der Strecken $AB$ und $BA$ ist aber erst von Möbius 1827 (Baryc. Calc. §. 1) in den geometrischen Calcul eingeführt worden.

Die Strecken $AB$ und $BA$ sind entgegengesetzt gleich, d. h.

$$BA = -AB, \quad AB + BA = 0$$

Wie auch die Puncte $A$, $B$, $C$ auf einer Geraden liegen mögen, immer ist $AB + BC + CA = 0$, $AB + BC = AC$, $BC = AC - AB$, u. s. w. Denn bei jeder Aufeinanderfolge der drei Puncte ist eine der Strecken $AB$, $BC$, $CA$ der Summe der beiden andern entgegengesetzt gleich.

Das Zeichen irgend einer Strecke $MN$ ist erst dann bestimmt, wenn eine Strecke derselben Geraden als positiv gegeben ist, deren Richtung die *positive Richtung der Geraden* heißt. Bei parallelen Geraden wird vorausgesetzt, daß ihre positiven Richtungen übereinstimmen; zwei parallele Strecken $AB$ und $CD$ haben dann gleiche oder entgegengesetzte Zeichen, je nachdem die Richtung von $A$ nach $B$ mit der Richtung von $C$ nach $D$ übereinstimmt oder nicht. In dem Parallelogramm $ABCD$ ist demnach $AB + CD = BC + DA = 0$.

Ist $C$ die Mitte der Strecke $AB$, und $O$ ein beliebiger Punct der Geraden $AB$, so ist das Product der Strecken

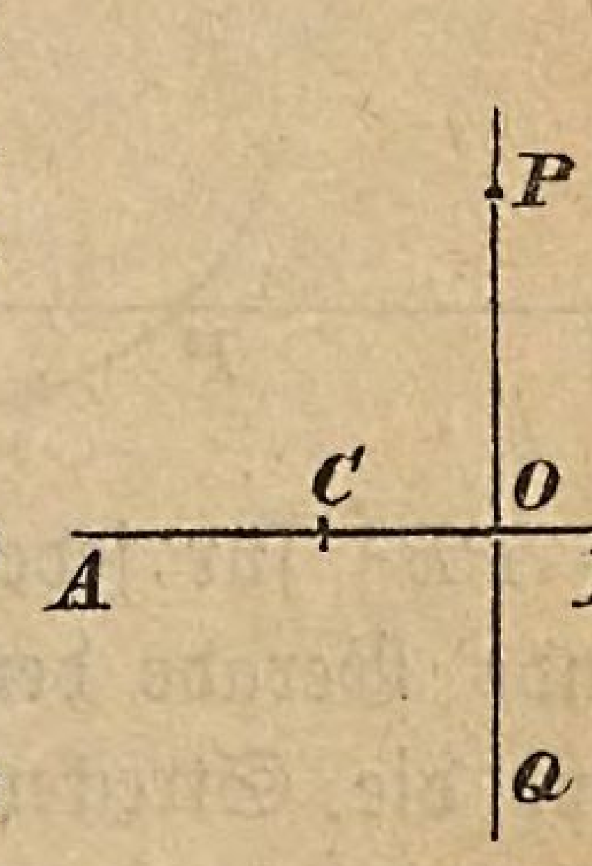
$$AO \,.\, BO = (AC + CO)(CO - CB) = CO^2 - CB^2 = CO^2 - \tfrac{1}{4}AB^2$$

positiv oder negativ, je nachdem $O$ die Strecke $AB$ außen oder innen theilt. Ebenso findet man

$$AO^2 + BO^2 = 2AC^2 + 2CO^2 = \tfrac{1}{2}AB^2 + 2CO^2$$
$$AO^2 - BO^2 = 4AC \,.\, CO = 2AB \,.\, CO$$

Die Differenz ist positiv oder negativ, je nachdem $O$ näher an $B$ oder an $A$ liegt, je nachdem $CO$ und $AB$ gleiche Zeichen haben oder nicht.

2. Für alle Puncte einer Normale zu $AB$ ist die Differenz der Quadrate ihrer Abstände von $A$ und $B$ von derselben Größe. Wird $AB$ von der Normale in $O$ geschnitten, so ist für jeden Punct $P$ der Normale nach §. 10, 5




$$OP^2 = AP^2 - AO^2 = BP^2 - BO^2$$

folglich $AP^2 - BP^2 = AO^2 - BO^2 = 2AB \,.\, CO$ wenn $C$ die Mitte von $AB$ (1).

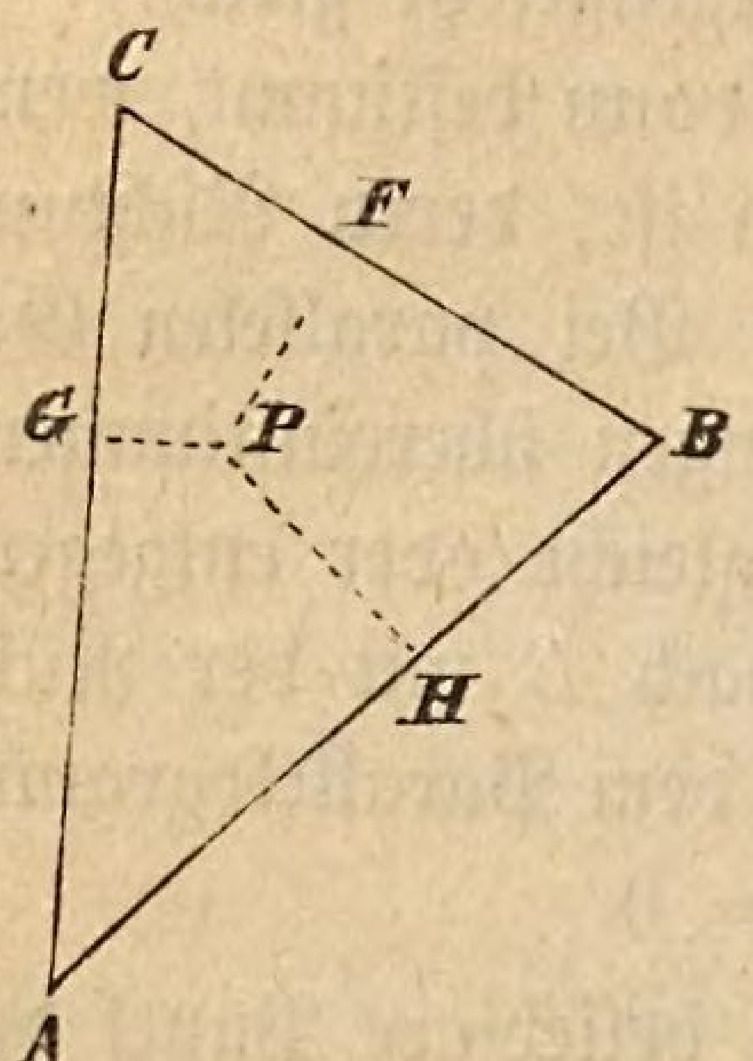
Umgekehrt schließt man, daß die Puncte, für welche die Differenz der Quadrate ihrer Abstände von 2 gegebenen Puncten von gegebener Größe ist, auf einer bestimmten Geraden liegen, welche die Strecke der gegebenen Puncte rechtwinkelig schneidet.*) Wenn $AP^2 - BP^2 = AQ^2 - BQ^2$ ist, so ist $PQ$ normal

---

*) *Apollonius* im 2ten Buch der ebenen Oerter. Vergl. Simson's Bearbeitung übers. von Camerer p. 209.

zu $AB$. Gesetzt, die Normalen zu $AB$ durch $P$ und $Q$ schnitten $AB$ in $O$ und $O'$, so wäre $AP^2 - BP^2 = 2AB \,.\, CO$, $AQ^2 - BQ^2 = 2AB \,.\, CO'$, folglich die eine Differenz von der andern verschieden.

Wenn $P$ ein beliebiger Punct der Ebene des Dreiecks $ABC$ ist, und wenn die Seiten $AB$, $BC$, $CA$ von den Normalen aus $P$ in $H$, $F$, $G$ geschnitten werden, so hat man




$$AH^2 - BH^2 = AP^2 - BP^2$$
$$BF^2 - CF^2 = BP^2 - CP^2$$
$$CG^2 - AG^2 = CP^2 - AP^2$$

folglich durch Addition

$$AH^2 - BH^2 + BF^2 - CF^2 + CG^2 - AG^2 = 0.$$

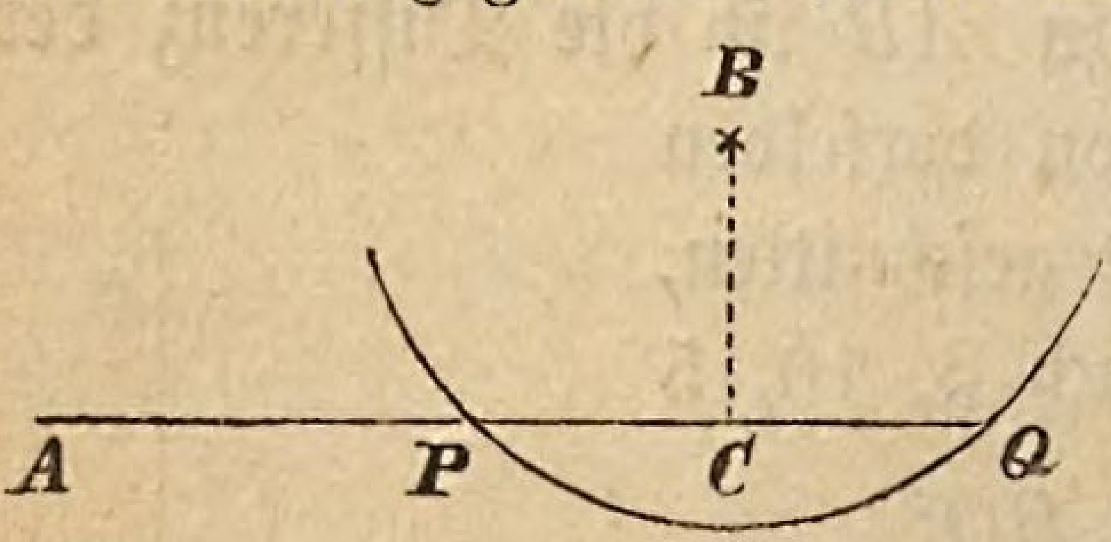
Sind $C_1$, $A_1$, $B_1$ die Mitten von $AB$, $BC$, $CA$, so ist (1) $AH^2 - BH^2 = 2AB \,.\, C_1H$, u. s. w., mithin

$$AB \,.\, C_1H + BC \,.\, A_1F + CA \,.\, B_1G = 0$$

wobei die Producte positiv oder negativ sind, je nachdem $AB$ und $C_1H$, $BC$ und $A_1F$, $CA$ und $B_1G$ einerlei oder entgegengesetzte Richtung haben.

Umgekehrt schließt man aus der Gleichung $AH^2 - BH^2 + BF^2 - CF^2 + CG^2 - AG^2 = 0$ oder $AB \,.\, C_1H + BC \,.\, A_1F + CA \,.\, B_1G = 0$, daß die Geraden, welche $BC$ in $F$, $CA$ in $G$, $AB$ in $H$ normal schneiden, durch einen Punct gehn.

3. Wenn eine durch den gegebenen Punct $A$ gezogene Gerade mit einem gegebenen Kreis die Puncte $P$ und $Q$ gemein hat, so ist (1)




$$AP \,.\, AQ = AC^2 - PC^2,$$

wenn $C$ die Mitte von $PQ$ ist, und (2)

$$AC^2 - PC^2 = AB^2 - PB^2,$$

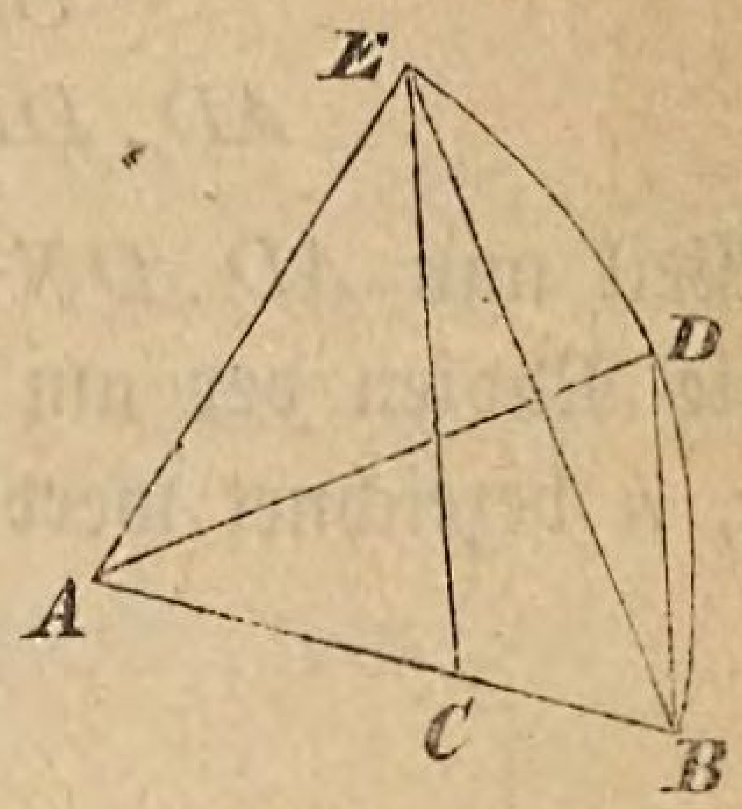
wenn $B$ das Centrum des Kreises ist. Daher hat das Product $AP \,.\, AQ = AB^2 - PB^2$ für jede durch $A$ gehende und den Kreis in $P$ und $Q$ schneidende Gerade denselben Werth und zwar positiv oder negativ, je nachdem die Strecken $AP$ und $AQ$ einerlei oder entgegengesetzte Richtung haben, d. h. je nachdem der gegebene Punct $A$ vom Kreise ausgeschlossen oder eingeschlossen ist. Dieses durch den Punct und den Kreis bestimmte Product heißt die **Potenz des Punctes in Bezug auf den Kreis** (§. 11, 4), welche entweder positiv und dem Quadrat der aus dem Puncte an den Kreis sich erstreckenden Tangente gleich ist, oder negativ und gleich dem Quadrat der halben Sehne, welche unter den durch den Punct gehenden Sehnen am kleinsten ist.

Anwendung. Wenn man in dem gleichschenkeligen Dreieck $PQB$ einen Punct der Basis $PQ$ durch $A$ bezeichnet, so hat man

$$AB^2 = PB^2 + AP.AQ,$$

worin das Product einen negativen Werth hat, wenn $A$ von $PQ$ eingeschlossen ist.

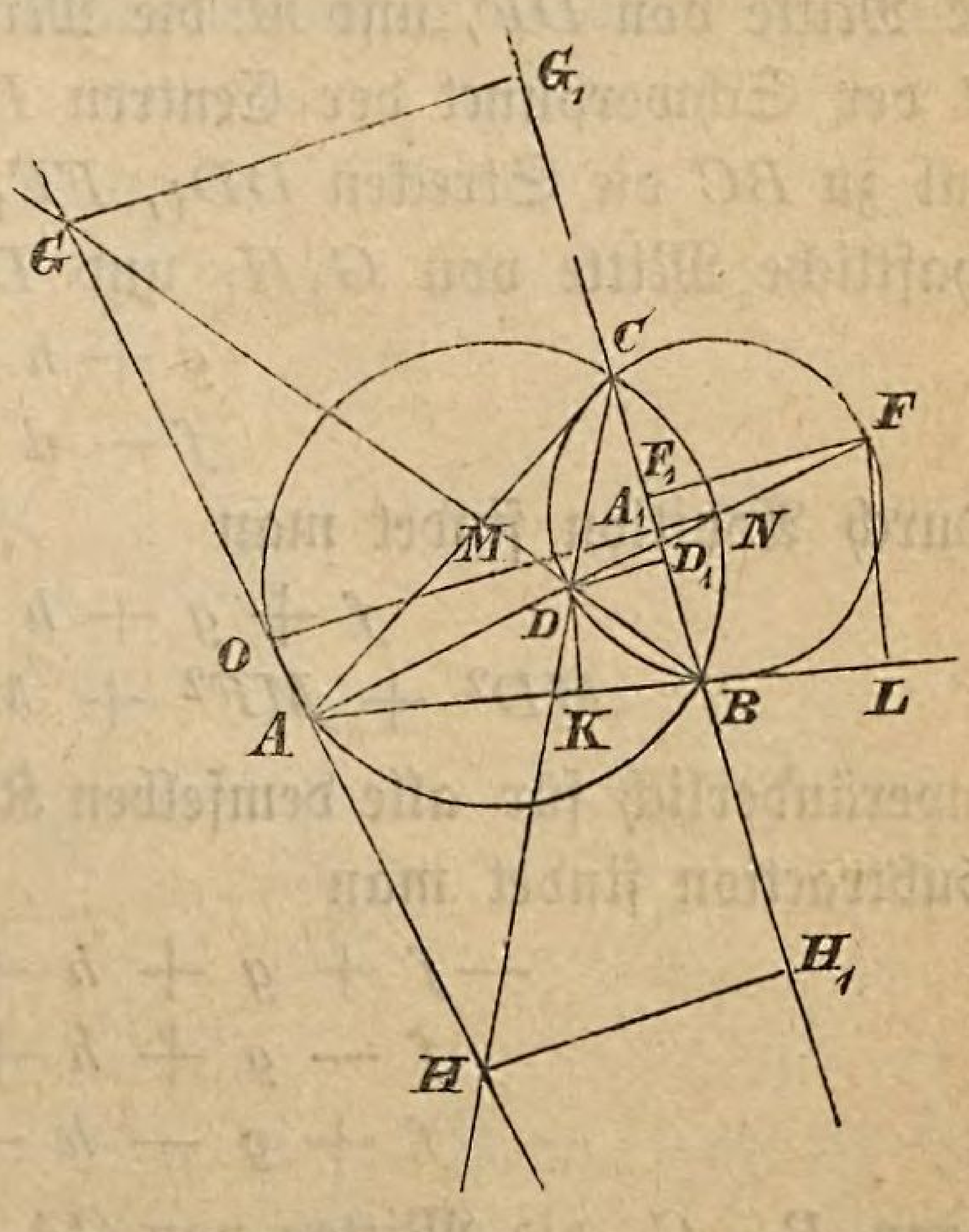
Hieraus erkennt man, daß das Quadrat der Seite des regulären Fünfecks der Summe der Quadrate der Seiten des regulären Zehnecks und Sechsecks gleich ist, wenn diese Figuren demselben Kreise eingeschrieben sind (Eucl. XIII, 10). Es sei $AE = CE = AD = AB$, $AC = BD$ gleich dem goldnen Abschnitt von $AB$, so daß $AC^2 = AB.CB$ (§. 11, 6). Dann sind $BD$, $AE$, $BE$ die Seiten des dem Kreise, der um $A$ mit dem Radius $AB$ gezogen ist, eingeschriebenen regulären Zehnecks, Sechsecks, Fünfecks, und man hat




$$BE^2 = AB.CB + AE^2 = BD^2 + AE^2.$$

**4.** Die Potenz des Centrums eines dem Dreieck eingeschriebenen Kreises in Bezug auf den dem Dreieck umgeschriebenen Kreis ist das doppelte Product der Radien dieser Kreise.*)

Beweis. Ist $M$ das Centrum des Kreises $ABC$, $N$ die Mitte des Bogens $BC$, und wird die Gerade $AN$ von dem Kreis, den man um das Centrum $N$ mit dem Radius $NB$ beschreibt, in $D$ und $F$ geschnitten, so lehrt die Gleichheit der Winkel $2DCB$, $DNB$, $ANB$, $ACB$, daß $D$ das Centrum des dem Dreieck $ABC$ eingeschriebenen Kreises ist (§. 6, 8). Weil der Winkel $DBF$ recht ist, so ist $F$ das Centrum des Kreises, der dem Winkel $BAC$ eingeschrieben ist und die Seite $BC$ außen berührt. Zieht man den Diameter $NO$ des Kreises $ABC$, so ist der Winkel $NAO$ recht, und $AO$ wird von




---

*) Euler Nov. Comm. Petrop. 11 p. 114. Ueber die Relation zwischen dem Abstand der Centren und den Radien von Kreisen, deren einer einem Polygon umgeschrieben ist, während der andere demselben Polygon eingeschrieben ist, vergl. N. Fuß 1798 Nov. Act. Petrop. 10 p. 103, 13 p. 166, Steiner Crelle J. 2 p. 289, Jacobi Crelle J. 3 p. 376.

$BD$ und $CD$ in den Puncten $G$ und $H$ geschnitten, den Centren der Kreise, die den Winkeln $CBA$ und $ACB$ eingeschrieben sind und die Seiten $CA$ und $AB$ außen berühren.

Die von den gleichen Winkeln $BON$, $BAN$ abgeschnittenen rechtwinkeligen Dreiecke $OBN$, $AKD$, $ALF$ sind ähnlich d. h.

$$ON:BN = AD:KD = AF:LF$$
$$AD.DN = KD.ON, \quad AF.NF = LF.ON$$

Weil nun $AD.DN = AM^2 - MD^2$ (3) u. s. w., so hat man, indem die Radien der um $M$, $D$, $F$, $G$, $H$ beschriebenen Kreise durch $r$, $d$, $f$, $g$, $h$ bezeichnet werden,

$$MD^2 - r^2 = -2dr$$
$$MF^2 - r^2 = 2fr$$
$$MG^2 - r^2 = 2gr$$
$$MH^2 - r^2 = 2hr$$

Weil $MD^2$ positiv ist, so kann $2d$ nicht größer als $r$ sein.

Zusatz. Die Winkel $GCH$, $GBH$ sind recht, also liegen $B$, $C$, $G$, $H$ auf einem Kreise, für welchen $G$ und $H$ Gegenpuncte sind. Die Sehne $BC$ wird von $MN$ in $A_1$ normal halbirt, folglich ist $O$ das Centrum des Kreises $BCGH$, und die Mitte von $GH$. Dabei ist $N$ die Mitte von $DF$, und $M$ die Mitte von $NO$, folglich ist das Centrum $M$ der Schwerpunct der Centren $D$, $F$, $G$, $H$.*) Zieht man nun normal zu $BC$ die Strecken $DD_1$, $FF_1$, $GG_1$, $HH_1$, so ist $A_1$ die gemeinschaftliche Mitte von $G_1H_1$ und $D_1F_1$, folglich (§. 8, 4)

$$g + h = 2OA_1$$
$$f - d = 2A_1N$$

Durch Addition findet man

$$f + g + h - d = 4r \text{**)}$$
$$MD^2 + MF^2 + MG^2 + MH^2 = 12r^2$$

unveränderlich für alle demselben Kreise eingeschriebenen Dreiecke. Durch Subtraction findet man

$$-f + g + h + d = 4MA_1$$
$$f - g + h + d = 4MB_1$$
$$f + g - h + d = 4MC_1$$

wenn $B_1$, $C_1$ die Mitten von $CA$, $AB$ bedeuten. Ist der Winkel $BAC$ stumpf, so tritt $-A_1M$ an die Stelle von $MA_1$. Hieraus ergiebt sich z. B.

---

*) Beltrami 1863 (Grunert Archiv 42 p. 356). Binder Württemb. Corresp. Blatt 1872 p. 96.

**) Feuerbach das geradl. Dreieck 5 und 50.

$$MA_1 + MB_1 + MC_1 = d + r\text{*)}$$
$$-MA_1 + MB_1 + MC_1 = f - r$$
$$MA_1 - MB_1 + MC_1 = g - r$$
$$MA_1 + MB_1 - MC_1 = h - r$$

Durch Multiplication findet man $(g + h)(f - d) = BC^2$, u. s. w.

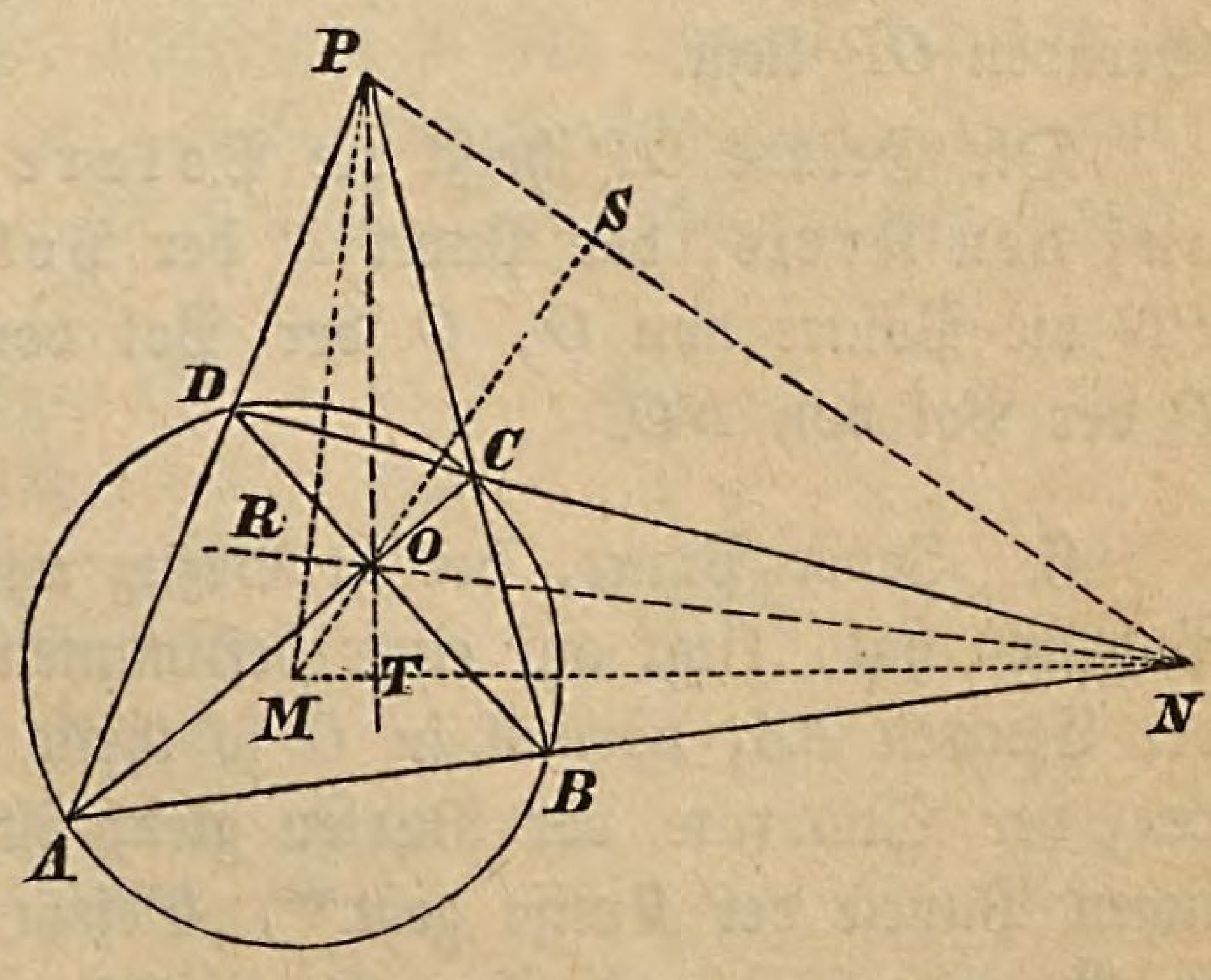
5. Wenn die Puncte $A, B, C, D$ auf einem Kreise liegen, und die Geraden $AB, CD$ außen in $N$, die Geraden $BC, DA$ außen in $P$, die Geraden $AC, BD$ innen in $O$ sich schneiden, so schneiden sich die Kreise

$ABP, BCN, CDP, DAN$ in einem Punct $S$ der Geraden $PN$
$ABO, BDN, DCO, CAN$ „ „ „ $R$ „ „ $NO$
$ACP, CBO, BDP, DAO$ „ „ „ $T$ „ „ $OP$

Die Summe der Potenzen von je zwei der Puncte $P, N, O$, in Bezug auf den Kreis ist dem Quadrat ihres Abstandes gleich**), d. h. wenn man das Centrum durch $M$, den Radius durch $r$ bezeichnet, so hat man

$$MP^2 + MN^2 - 2r^2 = PN^2$$
$$MN^2 + MO^2 - 2r^2 = NO^2$$
$$MO^2 + MP^2 - 2r^2 = OP^2$$

Dabei sind $R, S, T$ die Fußpuncte, $M$ der Durchschnitt der Höhen des Dreiecks $NOP$.




Beweis. Wird der andere Durchschnitt der Kreise $BCN$ und $CDP$ durch $S$ bezeichnet, so erhält man die Gleichungen der Winkel

$2PSC = 2PDC = 2ADC$,
$2CSN = 2CBN = 2CBA$,

daher durch Addition

$2PSN = 2ADC + 2CBA = 0$,

woraus man erkennt, daß $S$ auf der Geraden $PN$ liegt. Durch $S$ gehn die Kreise $DAN, ABP$. Vergl. §. 4, 7 Anm. Nun ist (3)

$$MP^2 - r^2 = PB \,.\, PC = PN \,.\, PS$$
$$MN^2 - r^2 = CN \,.\, DN = PN \,.\, SN$$

daher durch Addition und Subtraction

---

*) Carnot géom. de pos. 137.

**) Stewart propos. geom. I, 39 nach der Angabe von Chasles Ap. hist. p. 178 d. Uebers.

$$MP^2 + MN^2 - 2r^2 = PN^2$$

$$MP^2 - MN^2 = (PS + SN)(PS - SN) = PS^2 - SN^2$$

Auf demselben Wege findet man

$$MN^2 + MO^2 - 2r^2 = NO^2$$

$$MO^2 + MP^2 - 2r^2 = OP^2$$

mithin durch Subtraction

$$MN^2 - MP^2 = NO^2 - OP^2$$

Nach (2) erkennt man aus diesen Gleichungen, daß sowohl $SM$, als auch $OM$ normal zu $PN$ sind, u. s. w.

Anmerkung. Wenn man dem Kreise beliebig viele Vierecke einschreibt, von denen je ein Paar gegenüberliegende Seiten durch einen gegebenen Punct $N$ gehn, so schneiden sich die andern gegenüberliegenden Seiten auf einer bestimmten Geraden $OP$.*) Denn $PN^2 - MP^2$ hat den unveränderlichen Werth $MN^2 - 2r^2$, also liegen die Durchschnitte $P$ auf einer Geraden, die $MN$ normal in $T$ schneidet. Die Puncte $N$ und $T$ theilen den durch $N$ gehenden Diameter harmonisch, weil $TN^2 - MT^2 = PN^2 - MP^2$, $(MN - MT)^2 - MT^2 = MN^2 - 2r^2$, $MN \,.\, MT = r^2$, $MN + r : MN - r = r + MT : r - MT$ (§. 8, 6). Fällt $AB$ mit $CD$ zusammen, so werden $BC$ und $AD$ Tangenten des Kreises in $C$ und $D$, deren Durchschnitt also auch auf der Geraden $OP$ liegt. Fällt $C$ mit $D$ zusammen, so wird $CD$ eine durch $N$ gehende Tangente des Kreises, deren Berührungspunct auf derselben Geraden $OP$ liegt.

Die Gerade $OP$ heißt die Polare des Punctes $N$ in Bezug auf den Kreis, der Punct $N$ der Pol der Geraden. Eben so ist $PN$ die Polare von $O$, $O$ der Pol von $PN$, $NO$ die Polare von $P$, $P$ der Pol von $NO$.

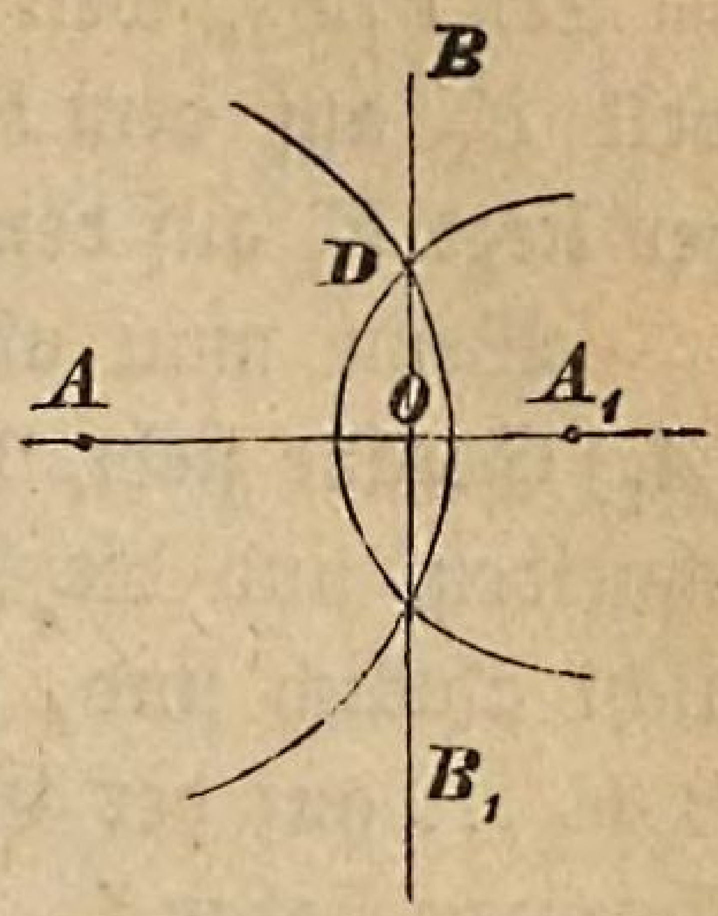
6. Jeder Punct, der in Bezug auf zwei gegebene Kreise gleiche Potenzen hat, liegt auf einer bestimmten Geraden, welche den Abstand der Centren $AA_1$ normal in $O$ so theilt, daß $AO^2 - A_1O^2$ der Differenz der Quadrate der Radien gleich ist, und durch die gemeinschaftlichen Puncte der Kreise geht.**) Gesetzt, die Puncte $B$ und $B_1$ haben in Bezug auf die Kreise $(A)$ und $(A_1)$, deren Radien $r$ und $r_1$ sind, gleiche Potenzen, so hat man (3)

---

*) Diese Gerade kommt nach ihren metrischen Eigenschaften im zweiten Buch der ebenen Oerter von Apollonius vor (Simson's Bearbeitung übers. von Camerer p. 325). Die graphischen Beziehungen des Dreiecks $NOP$ zu dem Kreis $(M)$ hat Brianchon (lignes du 2. ordre 20) angegeben. Ueber Pol und Polare vergl. Stereom. §. 1, 9. Trigon. §. 7 am Ende.

**) Gaultier 1812 (J. de l'éc. polyt. Cah. 16 p. 139) hat diese Gerade be-

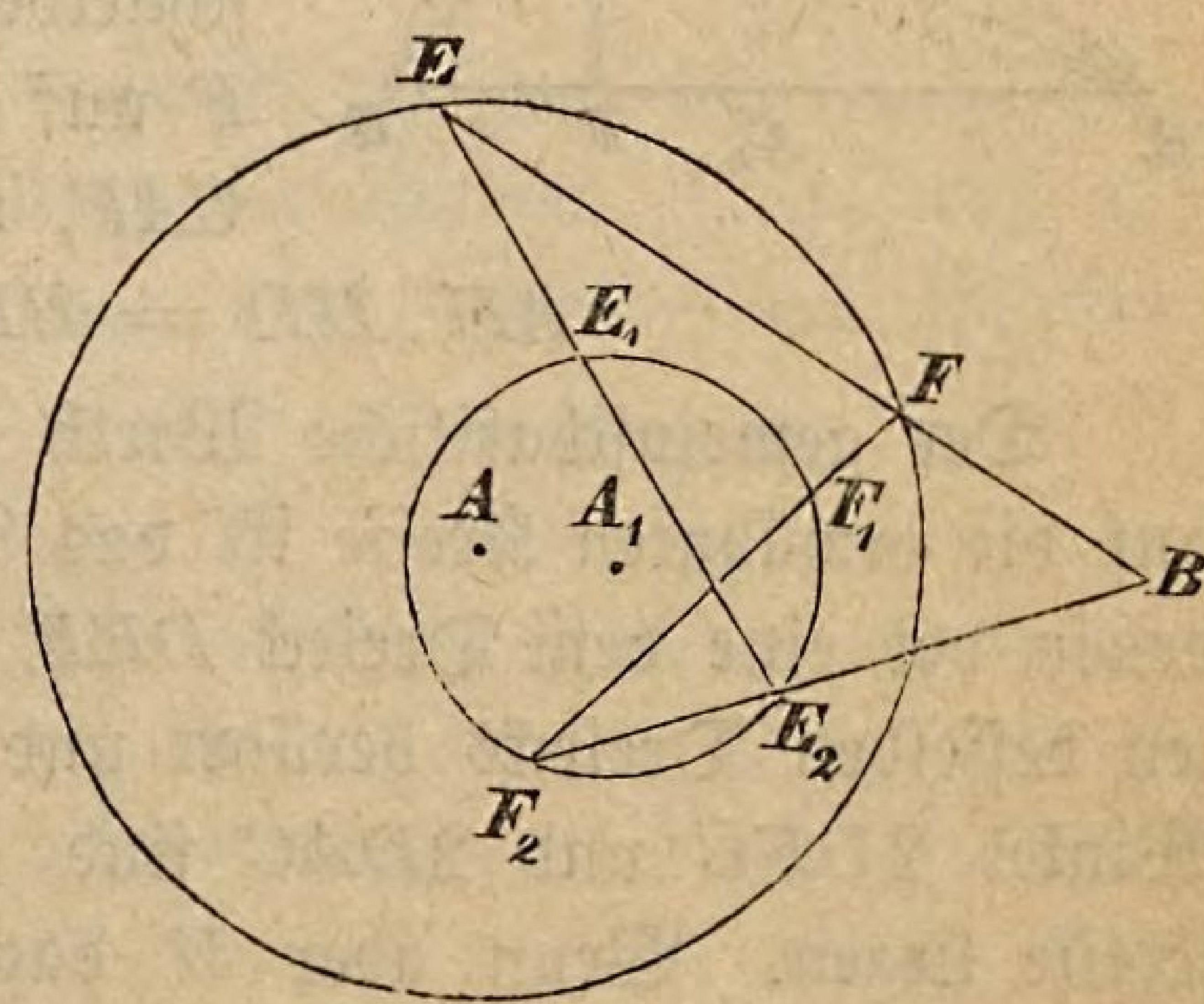
$$BA^2 - r^2 = BA_1{}^2 - r_1{}^2,\ B_1A^2 - r^2 = B_1A_1{}^2 - r_1{}^2$$
$$BA^2 - BA_1{}^2 = B_1A^2 - B_1A_1{}^2 = OA^2 - O_1A_1{}^2 = r^2 - r_1{}^2$$




woraus man schließt (2), daß $AA_1$ von $BB_1$ normal in $O$ geschnitten wird. Ist $D$ ein gemeinschaftlicher Punct der Kreise, so ist $DA^2 - DA_1{}^2 = r^2 - r_1{}^2$, folglich $D$ ein Punct der Geraden $BB_1$.

Die Puncte der Geraden $BB_1$, welche von den Kreisen eingeschlossen werden, haben die Eigenschaft, daß durch dieselben kleinste Sehnen der Kreise gehn, welche einander gleich sind. Die von den Kreisen ausgeschlossenen Puncte der Geraden $BB_1$ haben die Eigenschaft, daß durch dieselben Tangenten der Kreise gehn, welche einander gleich sind; diese Puncte sind mithin die Centren und die gleichen Tangenten sind die Radien von Kreisen, welche die gegebenen Kreise rechtwinkelig schneiden, und deren Orthogonalkreise heißen. Die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise werden von der Geraden $BB_1$ halbirt.

Wenn die gegebenen Kreise einander schneiden, so geht die Gerade $BB_1$ durch die Durchschnittspuncte der Kreise. Wenn die Kreise einander berühren, so ist die Gerade $BB_1$ die Tangente der Kreise, welche durch den gemeinschaftlichen Berührungspunct geht. Wenn die Kreise einander weder schneiden noch berühren, so findet man einen Punct der Geraden $BB_1$ mit Hülfe eines beliebigen dritten Kreises, der den Kreis $(A)$ in $E$ und $F$, den Kreis $(A_1)$ in $E_2$ und $F_2$ schneidet. Der gemeinschaftliche Punct der Geraden $EF$ und $E_2F_2$ ist der gesuchte Punct $B$, weil $BE.BF = BE_2.BF_2$ (3).




Zusatz. Wenn die Bogen $EF$ und $E_1F_1$ der Kreise $(A)$ und $(A_1)$ ähnlich und perspectivisch, also die Radien $AE$ und $A_1E_1$, $AF$ und $A_1F_1$ paarweise parallel sind (§. 12, 7), und wenn der Kreis $(A_1)$ von den Geraden $EE_1$ und $FF_1$ in $E_2$ und $F_2$ geschnitten wird, so liegen die Puncte $E$, $F$, $E_2$, $F_2$ auf einem Kreise, und die Geraden $EF$

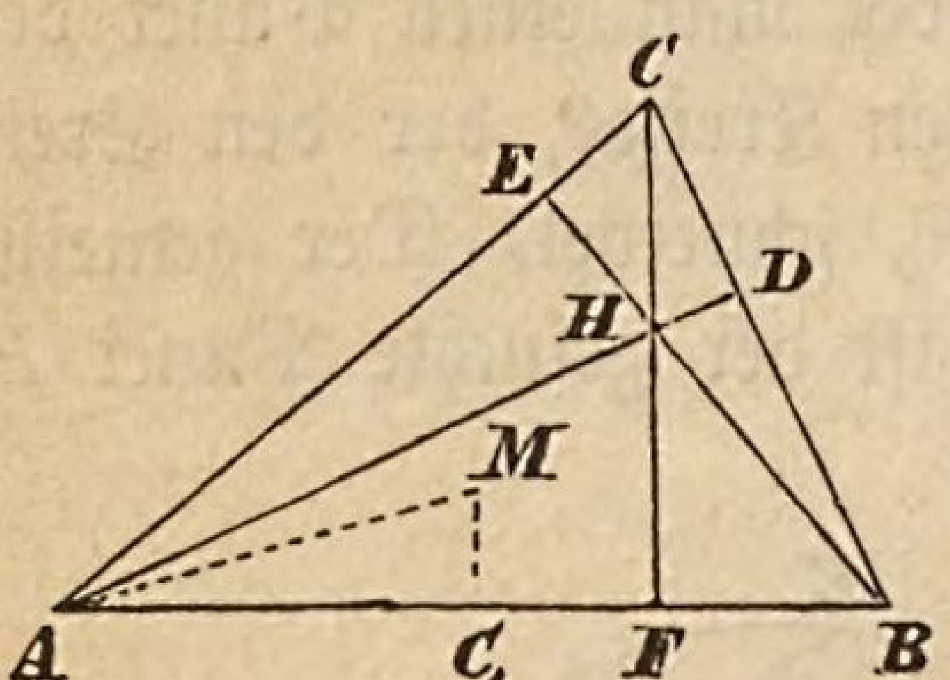
---

trachtet und axe radical genannt. Dieselbe ist von Poncelet (propr. proj. 77) als gemeinschaftliche Sehne (reale oder ideale), von Magnus (Aufgaben I §. 45) als Collineationsaxe der Kreise bezeichnet worden, und heißt bei Steiner (Crelle J. 1 p. 165) die Linie der gleichen Potenzen, bei Plücker (anal. geom. Entw. §. 93) die Chordale der Kreise.

und $E_2 F_2$ schneiden sich in einem Punct $B$, der in Bezug auf die gegebenen Kreise gleiche Potenzen hat. Denn es ist der Winkel $2EFF_2 = 2E_1F_1F_2$, weil $EF$ und $E_1F_1$ parallel sind, $2E_1F_1F_2 = 2EE_2F_2$, weil $E_2$ auf dem Kreise $E_1F_1F_2$ liegt, also $2EFF_2 = 2EE_2F_2$. Daher liegt $E_2$ auf dem Kreise $EFF_2$, und man hat $BE.BF = BE_2.BF_2$.

Wenn man also durch einen Aehnlichkeitspunct der Kreise ($A$) und ($A_1$) Gerade zieht, die die Kreise in $E$ und $E_2$, $F$ und $F_2$, $G$ und $G_2$,.. schneiden, und die Figuren $EFG$ .. und $E_2F_2G_2$ .. perspectivisch aber nicht ähnlich sind, so schneiden sich die entsprechenden Sehnen $EF$ und $E_2F_2$,.. auf der Geraden, deren Puncte in Bezug auf die Kreise gleiche Potenzen haben.*)

7. Es giebt im Allgemeinen nur einen Punct, der in Bezug auf 3 gegebene Kreise gleiche Potenzen hat. Durch diesen Punct gehn die Geraden (6), deren Puncte in Bezug auf jedes Paar von den gegebenen Kreisen gleiche Potenzen haben; durch denselben Punct gehn also die vorhandenen gemeinschaftlichen Sehnen oder Tangenten der Kreise.**) Wenn dieser Punct von den Kreisen ausgeschlossen ist, so ist er das Centrum des Kreises, der die gegebenen Kreise rechtwinkelig schneidet. Dieser Punct ist im Allgemeinen (vergl. 8) unendlich fern, wenn die Centren der Kreise auf einer Geraden liegen.




In Bezug auf die Kreise, deren Diameter die Seiten eines Dreiecks sind, hat der Durchschnittspunct der Höhen des Dreiecks gleiche Potenzen. Sind $AD$, $BE$, $CF$ die Höhen des Dreiecks $ABC$, welche sich in $H$ schneiden, so liegt $E$ auf dem Kreise $ABD$, $F$ auf dem Kreise $BCE$, $D$ auf dem Kreise $CAF$, und es ist (3)

$$AH.HD = BH.HE = CH.HF$$

Der gemeinschaftliche Werth der Potenz des Punctes $H$ in Bezug auf die erwähnten Kreise ist das Product der Diameter der Kreise, von denen der eine dem Dreieck $DEF$ umgeschrieben ist, der andere die Seiten desselben Dreiecks berührt und das Centrum $H$ hat (§. 6, 9). Die Winkel $2DFC$ und $2DAC$ sind gleich, weil $C$, $A$, $F$, $D$ auf einem Kreise liegen. Wenn aber $M$ das Centrum des Kreises $ABC$ und $C_1$ die Mitte von $AB$ ist, so ist $2ACB$ oder $2ACD$ dem Centriwinkel $2AMC_1$ gleich, und das rechtwinkelige Dreieck, welches der Abstand des

*) Poncelet propr. proj. 249.

**) Monge nach der Angabe von Poncelet propr. proj. 71. Carnot géom. de pos. 305.

Punctes $H$ von $FD$ mit $FC$ und $FD$ bildet, ist den Dreiecken $ACD$ und $AMC_1$ ähnlich. Bezeichnet man den Radius des Kreises, welcher um das Centrum $H$ dem Dreieck $DEF$ eingeschrieben ist, durch $u$, so hat man $HF : u = MA : MC_1$. Nun ist $MA$ dem Diameter des Kreises $DEF$ gleich, der durch $2v$ bezeichnet wird, und $MC_1$ ist halb so groß als $CH$ (§. 12, 8). Daher hat man $CH . HF = 4uv$.*)

8. Wenn die Centren von mehreren Kreisen auf einer Geraden liegen, und es einen Punct in endlicher Entfernung giebt, der in Bezug auf die Kreise gleiche Potenzen hat, so giebt es unendlich viel Puncte von derselben Eigenschaft. Alle diese Puncte liegen auf einer bestimmten Geraden, welche normal ist zu der Geraden, auf der die Centren liegen, und welche die gemeinschaftlichen Puncte der Kreise enthält. Sind $A, A_1, A_2, ..$ die Centren, $r, r_1, r_2, ..$ die Radien der Kreise von solcher Lage und Größe, daß für einen bestimmten Punct $O$ der Geraden $AA_1A_2$ .. die Differenzen $OA^2 - r^2$, $OA_1{}^2 - r_1{}^2$, $OA_2{}^2 - r_2{}^2, ..$ einander gleich sind, so hat $O$ in Bezug auf die Kreise gleiche Potenzen (3). Ist nun $OB$ normal zu $OA$, so hat man (2)

$$AB^2 - A_1B^2 = AO^2 - A_1O^2 = r^2 - r_1{}^2$$
$$AB^2 - r^2 = A_1B^2 - r_1{}^2, \text{ u. s. w.}$$

d. h. $B$ hat in Bezug auf dieselben Kreise gleiche Potenzen.

Von 3 und mehr Kreisen, in Bezug auf welche es Puncte von gleichen Potenzen giebt, sagt man, daß sie einen Büschel (faisceau) bilden mit 2 gemeinschaftlichen Puncten, die getrennt (real oder nicht real, imaginär) oder vereint sind, je nachdem die Kreise sich schneiden oder verfehlen oder berühren.**)

9. Wenn zwei Puncte $O$ und $P$ in Bezug auf die Kreise $(A)$, $(A_1)$, $(A_2)$ gleiche Potenzen haben, so liegen die Centren $A, A_1, A_2$, auf einer Geraden, und die Kreise $(A)$, $(A_1)$, $(A_2)$ bilden einen Büschel. Aus den Gleichungen

$$OA^2 - r^2 = OA_1{}^2 - r_1{}^2 = OA_2{}^2 - r_2{}^2$$
$$PA^2 - r^2 = PA_1{}^2 - r_1{}^2 = PA_2{}^2 - r_2{}^2$$

folgen die Gleichungen

$$OA^2 - PA^2 = OA_1{}^2 - PA_1{}^2 = OA_2{}^2 - PA_2{}^2$$

---

*) Feuerbach das geradl. Dreieck 35. Vergl. p. 60 derselben Schrift.

**) Die Serie von Geraden, die einen (endlich oder unendlich fernen) Punct gemein haben, ist von Desargues 1639 Brouillon projet (éd. Poudra p. 104) ordonnance de lignes genannt worden. Die Betrachtung der Büschel von Geraden und Curven ist von Steiner in die Geometrie eingeführt worden (System. Entw. p. 1. Crelle J. 47 p. 1). Von imaginären Puncten spricht man in Folge der complexen Werthe ihrer Coordinaten bei analytischer Behandlung der Geometrie.

welche zu erkennen geben, daß $AA_1$ und $AA_2$ normal zu $OP$ sind, mithin $A$, $A_1$, $A_2$ auf einer Geraden liegen. Dabei hat man, indem man den Durchschnitt der Geraden $AA_1$ und $OP$ durch $Q$ bezeichnet, die Gleichungen

$$r^2 - r_1{}^2 = (AQ - A_1Q)(AQ + A_1Q)$$
$$r^2 - r_2{}^2 = (AQ - QA_2)(AQ + QA_2)$$

und findet daraus nach Multiplication der erstern mit $AA_2$, der andern mit $-AA_1$ die Gleichung

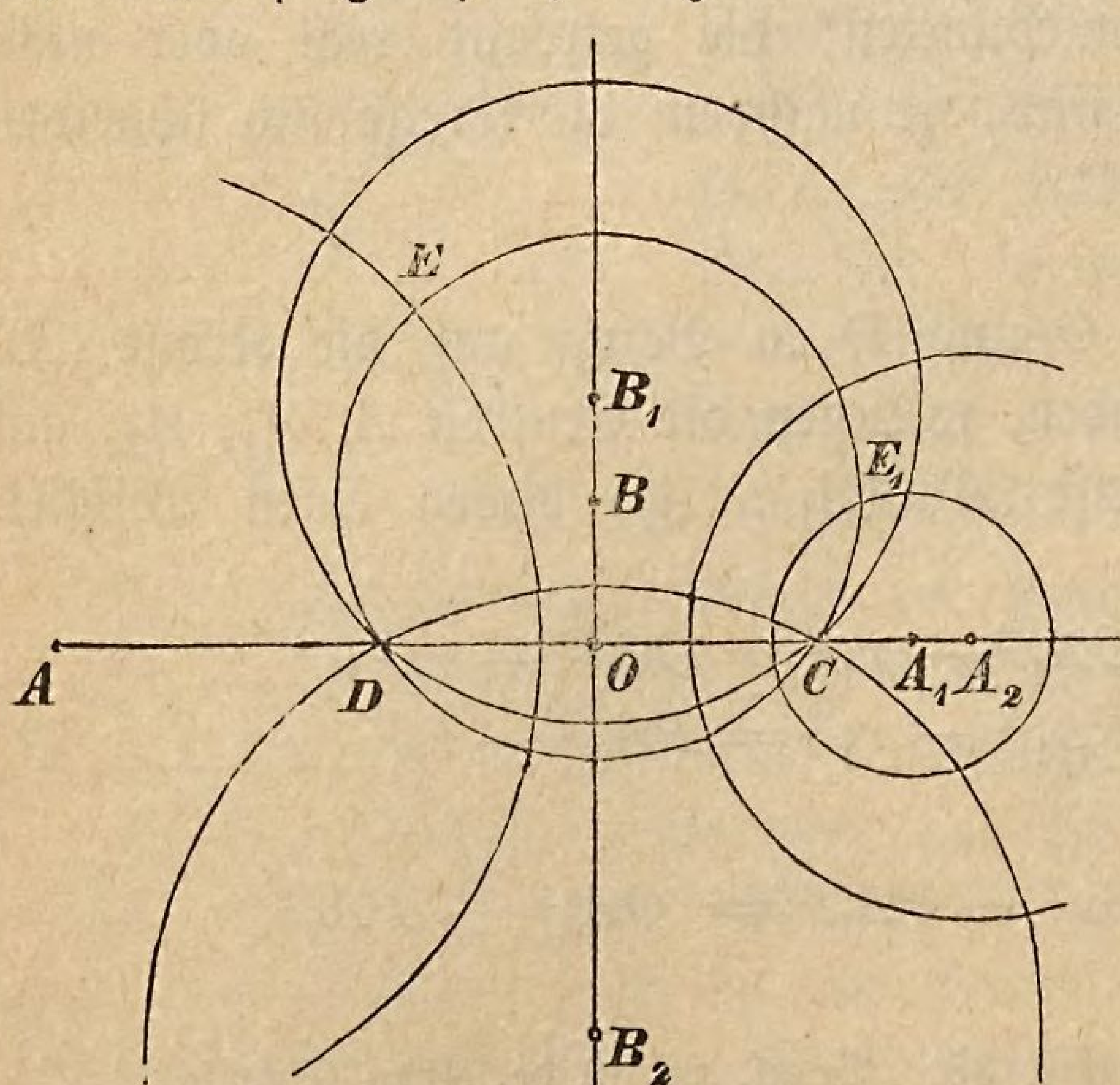
$$(AA_2 - AA_1)r^2 - AA_2 \,.\, r_1{}^2 + AA_1 \,.\, r_2{}^2$$
$$= AA_1 \,.\, AA_2(AQ + A_1Q - AQ + QA_2) = AA_1 \,.\, AA_2 \,.\, A_1A_2$$

oder indem man $-AA_2$ durch $A_2A$ ersetzt (1),

$$A_1A_2 \,.\, r^2 + A_2A \,.\, r_1{}^2 + AA_1 \,.\, r_2{}^2 + AA_1 \,.\, A_1A_2 \,.\, A_2A = 0^{*)}$$

Umgekehrt schließt man: Wenn die Puncte $A$, $A_1$, $A_2$ auf einer Geraden liegen und die Radien $r$, $r_1$, $r_2$ der Kreise $(A)$, $(A_1)$, $(A_2)$ der eben aufgestellten Gleichung genügen, so bilden die Kreise $(A)$, $(A_1)$, $(A_2)$ einen Büschel. Insbesondere bilden concentrische Kreise einen Büschel, jeder unendlich ferne Punct hat in Bezug auf dieselben gleiche Potenzen, ihre Orthogonalkreise sind gerade.

**10.** Wenn 3 Kreise, deren Centren auf einer Geraden liegen, von einem vierten Kreise rechtwinkelig geschnitten werden, so bilden sie einen Büschel. Denn das Centrum des vierten Kreises hat in Bezug auf die 3 Kreise gleiche Potenzen.




Die Kreise $(B)$, $(B_1)$, $(B_2)$, .., welche die zu einem Büschel gehörigen Kreise $(A)$, $(A_1)$, $(A_2)$, .. sämmtlich rechtwinkelig schneiden, gehören ebenfalls zu einem Büschel. Wenn die gemeinschaftlichen Puncte des einen Büschels real sind, so sind die gemeinschaftlichen Puncte des andern Büschels imaginär. Gesetzt, $(A)$ wird von $(B)$ in $E$, und die Gerade $AA_1$ von der Geraden $BB_1$ in $O$ geschnitten, so hat man

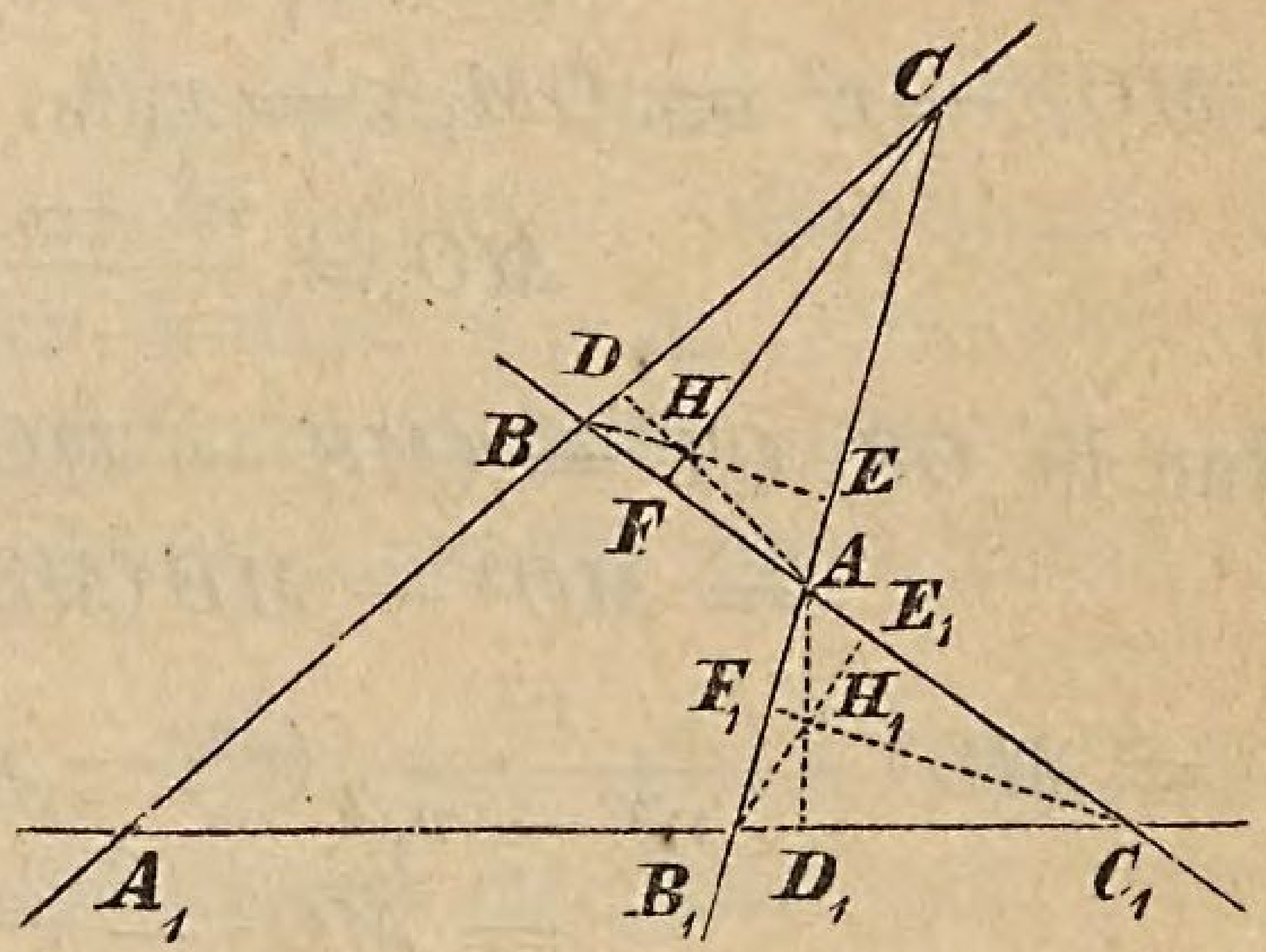
$$AB^2 = AE^2 + EB^2 = AO^2 + OB^2, \; EB^2 - OB^2 = AO^2 - AE^2.$$

---

*) Vergl. unten 22.

Ist nun $AO^2 - AE^2$ positiv, mithin $O$ außerhalb des Kreises $(A)$, so ist $EB^2 - OB^2$ positiv, d. h. $O$ von dem Kreise $(B)$ eingeschlossen. Ebenso ist $O$ von den übrigen Kreisen des einen Büschels ausgeschlossen, von den des andern Büschels eingeschlossen, weil nach der Voraussetzung $AO^2 - AE^2 = A_1O^2 - A_1E_1{}^2$ u. s. w. Daher ist die Gerade $OBB_1$.. von den Kreisen $(A)$, $(A_1)$,.. ausgeschlossen, während die Gerade $OAA_1$.. von den Kreisen $(B)$, $(B_1)$, .. geschnitten wird. Die Durchschnittspuncte $C$ und $D$ der Geraden $OA$ und des Kreises $(B)$ liegen auf sämmtlichen Kreisen $(B_1)$, $(B_2)$,.., weil jeder Punct der Geraden $OA$ in Bezug auf $(B)$, $(B_1)$,.. gleiche Potenzen hat, deren Werth für $C$ und $D$ verschwindet.

**11.** Es giebt 4 Dreiecke, die von jedesmal 3 unter 4 gegebenen Geraden gebildet werden, $ABC$, $AB_1C_1$, $BC_1A_1$, $CA_1B_1$. Die Durchschnitte ihrer Höhen $H$, $H_1$, $H_2$, $H_3$ liegen auf einer Geraden; die Kreise, von denen $A$ und $A_1$, $B$ und $B_1$, $C$ und $C_1$ Gegenpuncte sind, bilden einen Büschel; die Centren ihrer Orthogonalkreise liegen auf der Geraden $HH_1$.*)

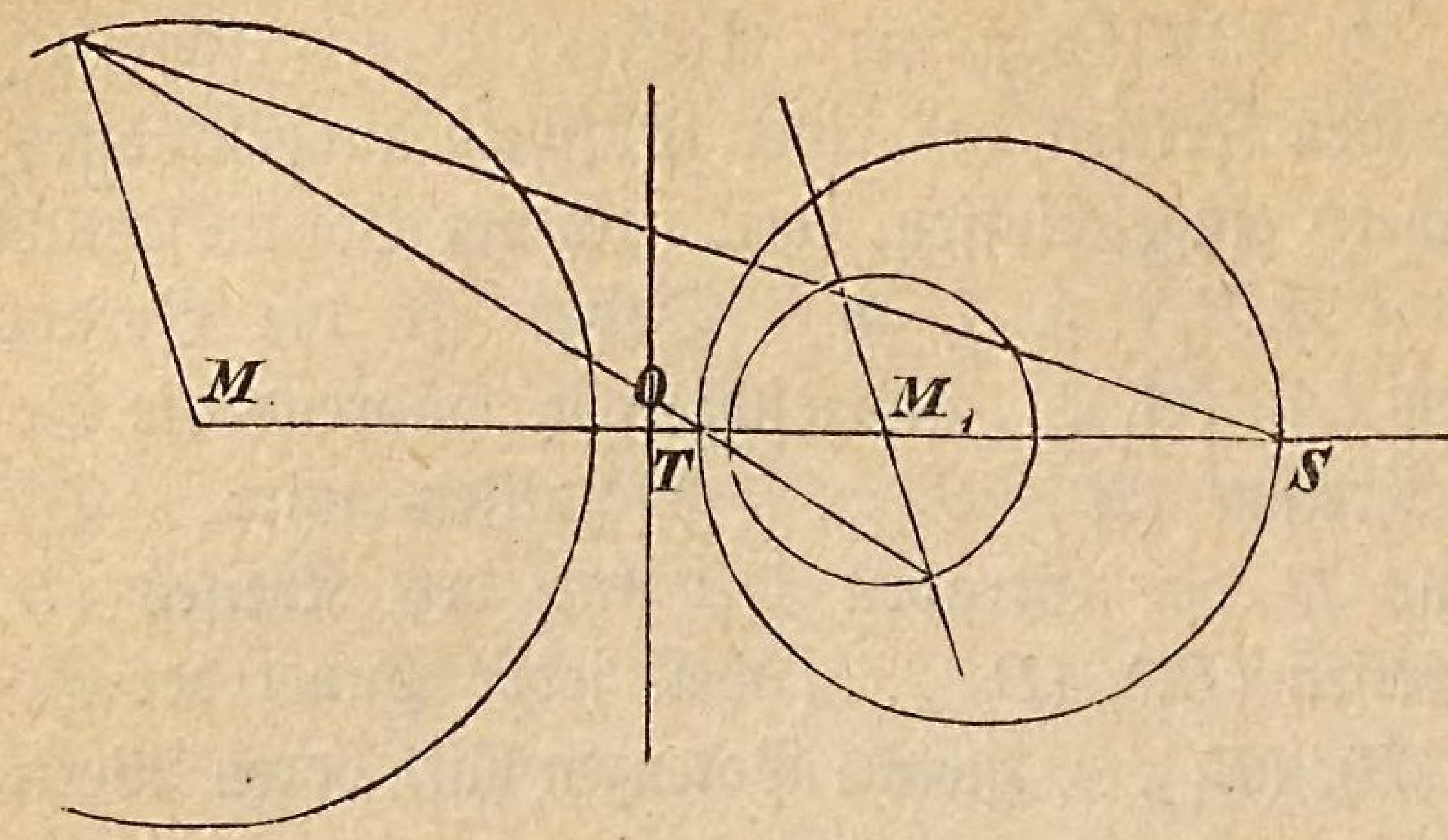



Beweis. Werden die Höhen der Dreiecke $ABC$, $AB_1C_1$ durch $AD$, $BE$, $CF$, $AD_1$, $B_1E_1$, $C_1F_1$ bezeichnet, so ist $HA.HD$ die Potenz des Punctes $H$ in Bezug auf jeden durch $A$ und $D$ gehenden Kreis, d. h. $H$ hat gleiche Potenzen in Bezug auf die Kreise $ABD$ und $AA_1D$, ferner in Bezug auf die Kreise $BCE$ und $BB_1E$, endlich in Bezug auf die Kreise $CAF$ und $CC_1F$. Nun hat $H$ gleiche Potenzen in Bezug auf die Kreise $ABD$, $BCE$, $CAF$ (7), also auch in Bezug auf die Kreise $AA_1D$, $BB_1E$, $CC_1F$. Ebenso erkennt man, daß $H_1$ gleiche Potenzen hat in Bezug auf die Kreise $AA_1D_1$, $BB_1E_1$, $CC_1F_1$, welche von den Kreisen $AA_1D$, $BB_1E$, $CC_1F$ nicht verschieden sind, u. s. w. Weil jeder unter den Puncten $H$, $H_1$, $H_2$, $H_3$ gleiche Potenzen in Bezug auf die Kreise $(AA_1)$, $(BB_1)$, $(CC_1)$ hat, so liegen die Puncte auf einer Geraden (6) und die Kreise bilden einen Büschel (8).

---

*) Der erste Theil des Satzes, nach welchem $H$, $H_1$, .. auf einer Geraden liegen, ist von Steiner (Crelle J. 2 p. 97) gegeben worden; der andere Theil, nach welchem die Kreise $(AA_1)$, .. einen Büschel bilden, rührt von Bodenmiller her nach einer Mittheilung Gudermann's (analyt. Sphärik p. 138). Vergl. §. 8, 5 und Trigon. §. 7, 11. Grunert Archiv 46 p. 328. 47 p. 1.

**12.** Zwei Kreise und der Kreis, von dem die Aehnlichkeitspuncte der beiden Kreise Gegenpuncte sind, bilden einen Büschel.*) Sind $M$ und $M_1$ die Centren der Kreise, $S$ und $T$ ihre Aehnlichkeitspuncte (§. 12, 7), und hat $O$ auf $MM_1$ gleiche Potenzen in Bezug auf die Kreise, deren Radien durch $r$ und $r_1$ bezeichnet werden, so hat man




$$MS = \frac{r}{r - r_1} MM_1, \quad MT = \frac{r}{r + r_1} MM_1$$

$$MO^2 - r^2 = OM_1{}^2 - r_1{}^2, \quad (MO - OM_1) MM_1 = r^2 - r_1{}^2$$

$$MO = \frac{r^2 - r_1{}^2 + MM_1{}^2}{2MM_1}$$

Nun ist $OS \,.\, OT = (MS - MO)(MT - MO)$

$$= MO^2 - MB(MS + MT) + MS \,.\, MT$$

$$= MO^2 - \frac{r^2}{r^2 - r_1{}^2}(r^2 - r_1{}^2 + MM_1{}^2) + \frac{r^2}{r^2 - r_1{}^2} MM_1{}^2$$

$$= MO^2 - r^2 = OM_1{}^2 - r_1{}^2$$

d. h. $O$ hat in Bezug auf den Kreis, dessen Gegenpuncte $S$ und $T$ sind, und dessen Centrum auf der Geraden $MM_1$ liegt, dieselbe Potenz, wie in Bezug auf die Kreise $(M)$ und $(M_1)$. Also bilden diese 3 Kreise einen Büschel (8).

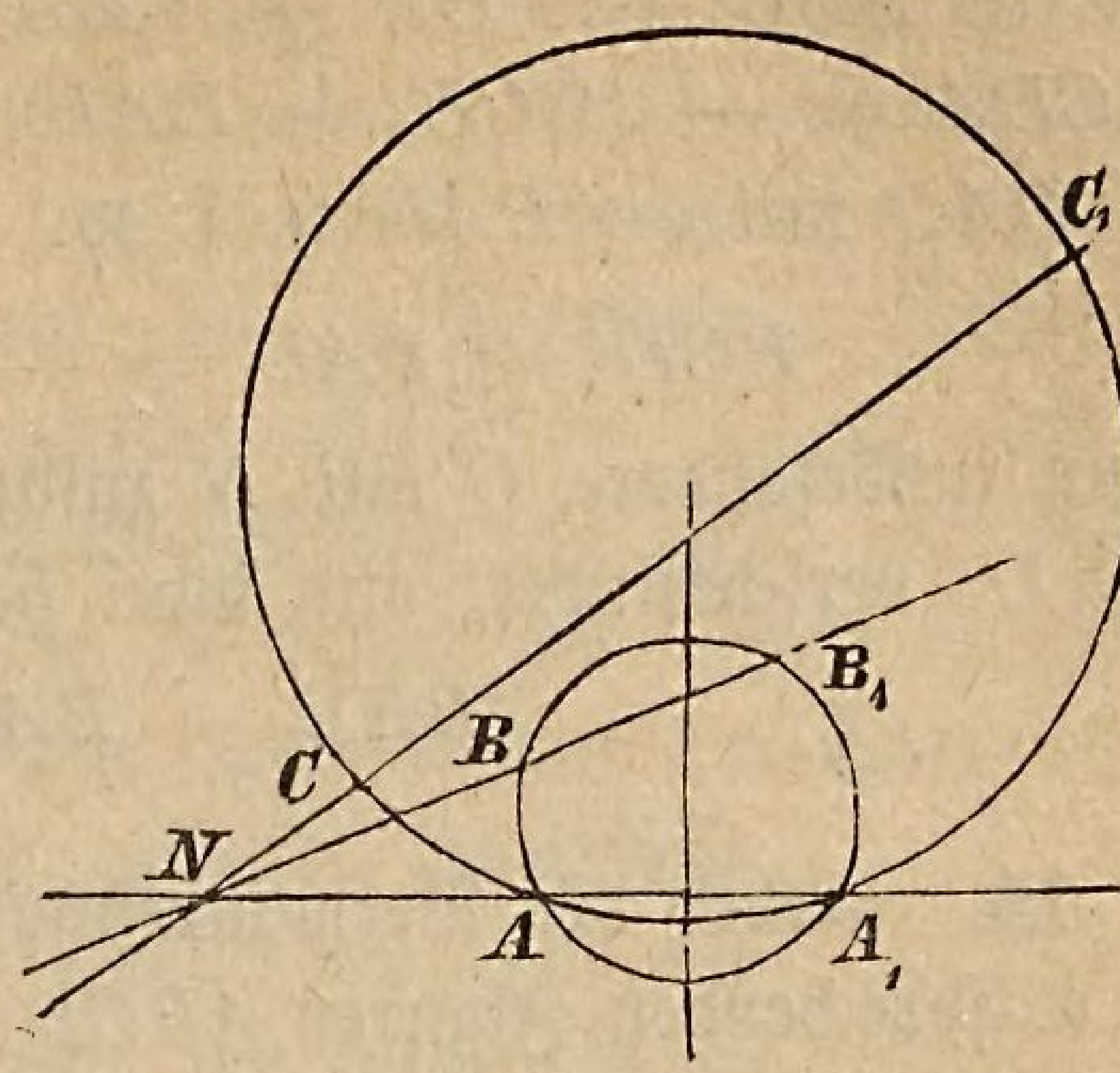
Von jedem Puncte des dritten Kreises erscheint der erste Kreis so groß als der zweite. Der Kreis, dessen Gegenpuncte $S$ und $T$ sind, schneidet die Strecke $MM_1$ normal außen und innen nach dem Verhältniß der Radien. Also hat man für jeden Punct $U$ desselben $MU : M_1 U = r : r_1$ (§. 8, 6). Daher sind die Dreiecke ähnlich, die von $MU$ und $M_1 U$, von den aus $U$ an die Kreise gehenden Tangenten, und von den Radien der Berührungspuncte gebildet werden (§. 11, 2).

**13.** Die Geraden, welche durch einen Punct $N$ gehn, bilden einen Büschel, dessen Centrum der gemeinschaftliche Punct $N$ ist (vergl. 8). Wenn nun jedem Punct einer Geraden des Büschels ein Punct derselben Geraden so entspricht, daß für alle Paare entsprechender Puncte $A$

---

*) Gerg. Ann. XI. p. 364, XX p. 305. Chasles géom. sup. 747.

und $A_1$, $B$ und $B_1$, $C$ und $C_1$, .. die Producte $NA.NA_1$, $NB.NB_1$, $NC.NC_1$, .. einander gleich sind und den Werth $p$ haben, so liegen je zwei Paare entsprechender Puncte von verschiedenen Geraden auf einem Kreise (§. 11, 4). Der Punct $N$ hat in Bezug auf alle diese Kreise $AA_1B_1B$, $AA_1C_1C$, $BB_1C_1C$, .. gleiche Potenzen, deren Werth $p$ ist. Wenn $N$ von den Strecken $AA_1$, $BB_1$, .. ausgeschlossen, mithin $p$ positiv ist, so werden die erwähnten Kreise von dem Kreise, dessen Centrum $N$ und dessen Radius $\sqrt{p}$ ist, rechtwinkelig geschnitten (6).




Zu jedem Punct $X$ wird der entsprechende Punct $X_1$ mit Hülfe der Geraden $NX$ und des Kreises $AA_1X$ gefunden. Die Puncte des Kreises, dessen Centrum $N$ und dessen Radius $\sqrt{p}$ ist, entsprechen sich selbst; den von diesem Kreise eingeschlossenen Puncten entsprechen ausgeschlossene Puncte und umgekehrt. Jedem unendlich fernen Punct entspricht der Punct $N$.

Die Dreiecke $NAB$ und $NB_1A_1$, $NAC$ und $NC_1A_1$, $NBC$ und $NC_1B_1$, $NAB_1$ und $NBA_1$, .. sind ähnlich und entgegengesetzten Sinnes (§. 11, 2), mithin hat man

$$\frac{A_1B_1}{NB_1} = \frac{AB}{NA}, \quad \frac{A_1B_1}{NB.NB_1} = \frac{AB}{NA.NB}$$

$$A_1B_1 = p\frac{AB}{NA.NB}, \quad A_1C_1 = p\frac{AC}{NA.NC}, \quad B_1C_1 = p\frac{BC}{NB.NC}$$

$$A_1B_1 : A_1C_1 : B_1C_1 = \frac{AB}{NA.NB} : \frac{AC}{NA.NC} : \frac{BC}{NA.NC}$$

Daraus ergiebt sich z. B.

$$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} : \frac{A_1D_1}{B_1D_1} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

$$\frac{AC_1}{BC_1}\,\frac{BA_1}{CA_1}\,\frac{CB_1}{AB_1} = 1,\text{*) u. s. w.}$$

Aus derselben Quelle fließen die Gleichungen der Winkel

$$ABN = -B_1A_1N, \quad CDN = -D_1C_1N$$
$$NBC = -NC_1B_1, \quad NDA = -NA_1D_1$$

*) Bodenmiller nach Gudermann's Mittheilung, nied. Sphärik p. 236.

mithin durch Addition

$$ABC + CDA = -(B_1A_1D_1 + D_1C_1B_1)$$

Nun ist $ABC + BCD + CDA + DAB = 0$ (§. 2, 9), also $ABC + CDA = -(BCD + DAB)$, und man erhält nach Vertauschung von $DAB$ mit $-BAD$ u. s. w.

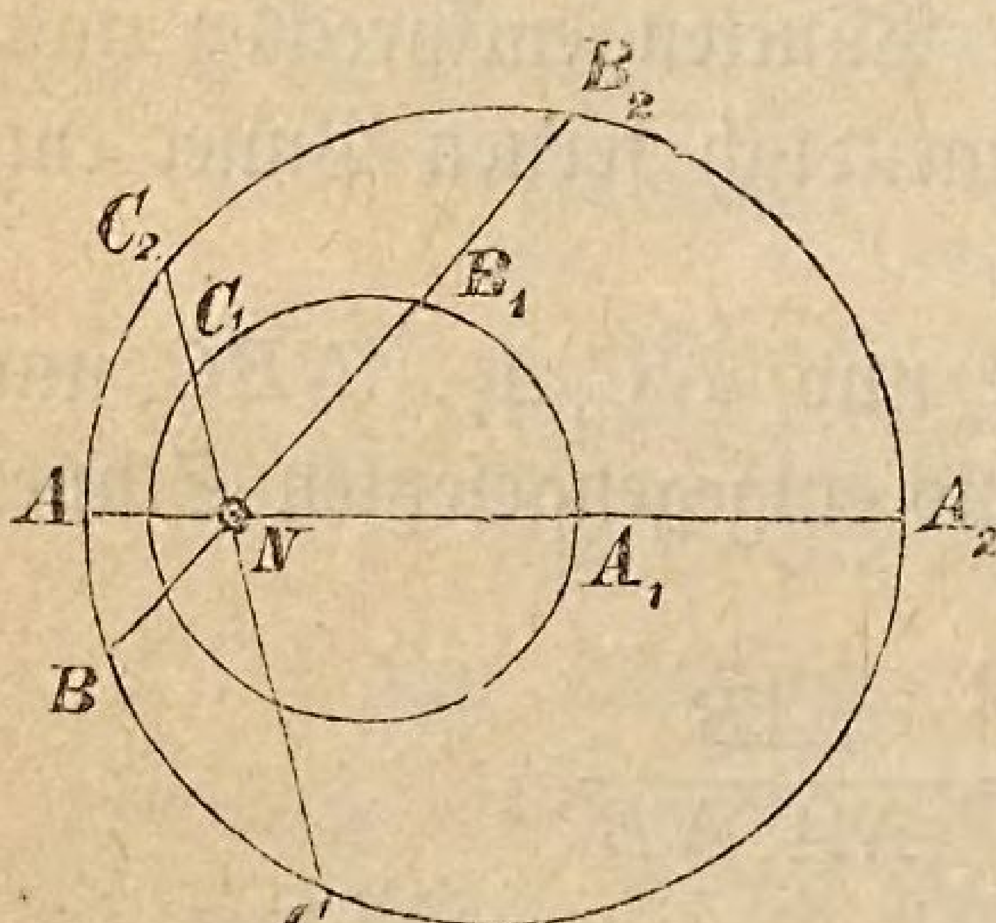
$$BCD - BAD = -(B_1C_1D_1 - B_1A_1D_1)$$

Wenn insbesondere $C$ mit $N$ zusammenfällt, so wird $C_1$ unendlich fern, $B_1C_1D_1$ verschwindet, und man hat

$$BND - BAD = B_1A_1D_1$$

**14.** Ueber die Verwandtschaft der nach dem angegebenen Gesetz sich entsprechenden Figuren $ABCD$.. und $A_1B_1C_1D_1$.. ergiebt sich Folgendes:

Einem Kreise entspricht im Allgemeinen ein Kreis. Die entsprechenden Kreise liegen perspectivisch, so daß $N$ ein Aehnlichkeitspunct derselben ist. Wenn $A$, $B$, $C$, $D$ auf einem Kreise liegen, und die Geraden $NA$, $NB$, .. denselben in $A_2$, $B_2$, .. schneiden, so hat man

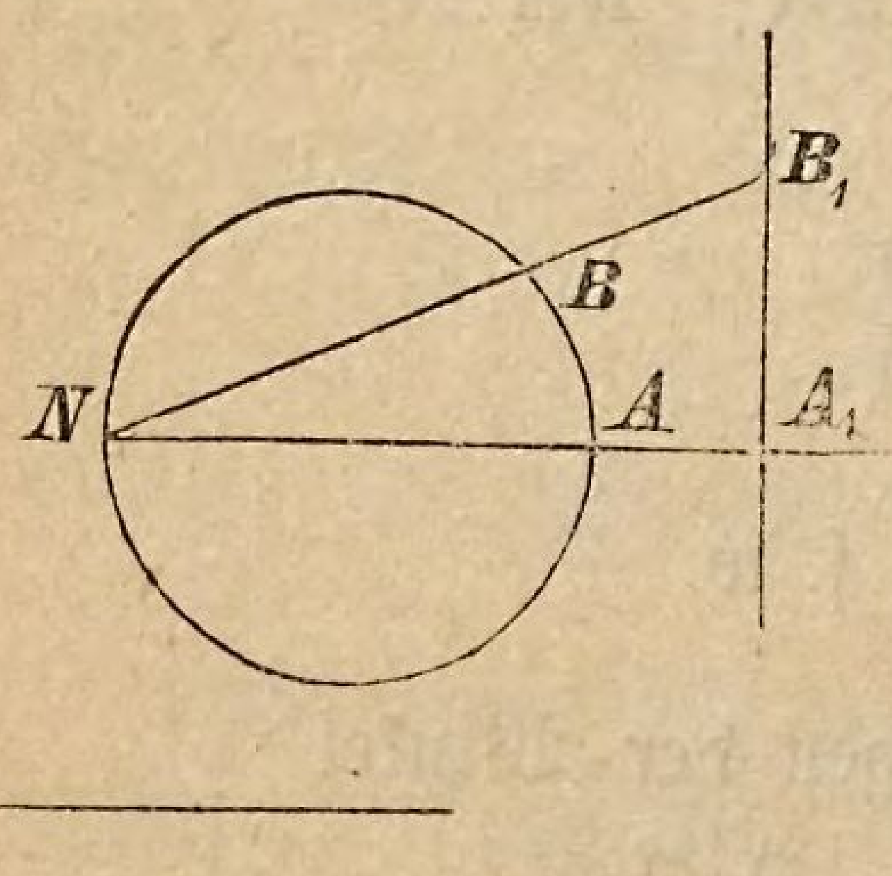


$NA.NA_2 = NB.NB_2 = .. = q$. Nun ist $NA.NA_1 = NB.NB_1 = .. = p$, folglich

$$\frac{NA_1}{NA_2} = \frac{NB_1}{NB_2} = .. = \frac{p}{q}$$

Hieraus folgt, daß die Figuren $NA_1B_1C_1$.. und $NA_2B_2C_2$.. ähnlich und einerlei Sinnes sind. Nun ist $A_2B_2C_2$.. ein Kreis, folglich ist auch $A_1B_1C_1$.. ein Kreis, und $N$ ein Aehnlichkeitspunct dieser Kreise.

Einem Kreise der durch $N$ geht, entspricht eine Gerade (ein unendlich großer Kreis), die mit der durch $N$ gehenden Tangente des Kreises parallel ist, und umgekehrt.



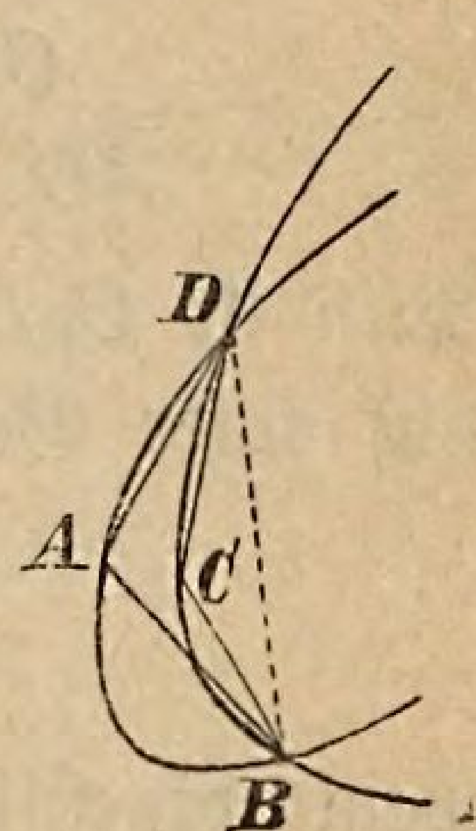
Ist $A$ der Gegenpunct von $N$, so ist der Winkel $NBA$ recht, und zufolge der Aehnlichkeit von $NAB$ und $NB_1A_1$ auch der Winkel $B_1A_1N$ recht, u. s. w.*)

Daß einem Kreise ein Kreis (oder eine Gerade) entspricht, erkennt man auch durch

*) Diese Sätze kommen zuerst im ersten Buch der ebenen Oerter von Apollonius vor. Vergl. Simson's Bearbeitung übers. von Camerer p. 47. Die obige Verwandtschaft von Figuren, in der auch eine sphärische Figur zu ihrem stereographischen Abbild steht, ist aus allgemeinen Gesichtspuncten von Magnus (Aufgaben I p. 236 und 290, Crelle's J. 8 p. 52) betrachtet, von Thomson angewandt und

Betrachtung von Winkeldifferenzen. Wenn $A$ auf dem Kreise $BCD$ liegt, so hat man $2(BCD - BAD) = 0$ (§. 4, 3); dann aber ist $2(B_1C_1D_1 - B_1A_1D_1) = 0$ (13), d. h. $A_1$ liegt auf dem Kreise $B_1C_1D_1$. Wenn $N$ auf dem Kreise $BAD$ liegt, so hat man $2(BND - BAD) = 0$; folglich ist $2B_1A_1D_1 = 0$, d. h. $A_1$ liegt auf der Geraden $B_1D_1$.

Zwei Linien der einen Figur und die entsprechenden Linien der andern Figur bilden entgegengesetzt gleiche Winkel.*) Wenn auf der Curve $BCD$ der Punct $C$ mit $D$ zusammenfällt, so geht der Winkel $BCD$ in den Winkel über, welchen die Richtung der Curve in $D$ mit der Sehne $DB$ bildet (§. 3, 5). Wenn zugleich auf der Curve $BAD$ der Punct $A$ mit $D$ zusammenfällt, so geht die Winkeldifferenz $BCD - BAD$ in den Winkel $ADC$ der in $D$ sich schneidenden Curven über. Ebenso geht die entsprechende Winkeldifferenz $B_1C_1D_1 - B_1A_1D_1$ in den Winkel $A_1D_1C_1$ der entsprechenden in $D_1$ sich schneidenden Curven über, ohne daß sie aufhörte, jener Winkeldifferenz gleich und entgegengesetzt zu sein. In dem Falle, daß die in $D$ sich schneidenden Curven nicht zum zweitenmale in $B$ sich schneiden, vergleicht man ihren Winkel mit dem Winkel der entsprechenden in $D_1$ sich schneidenden Curven, nachdem man für die Curven Kreise substituirt hat, welche die Curven in $D$ und $D_1$ berühren.




In der That wird das geradlinige Dreieck $ADC$ dem entsprechenden Dreieck $A_1D_1C_1$ ähnlich, wenn $AD$ und $CD$ verschwinden (Tangenten der Curven $AD$ und $CD$ werden). Dabei verschwinden nämlich $AC$, $A_1D_1$, $C_1D_1$, $A_1C_1$, während $NA$, $NC$, $ND$ einander gleich werden, folglich hat man (13)

$$A_1D_1 : D_1C_1 : C_1A_1 = AD : DC : CA^{**})$$

15. Wenn 4 Puncte $A$, $B$, $C$, $D$ auf einem Kreise liegen, so ist

$$AB.CD + AC.DB + AD.BC = 0$$

vorausgesetzt daß die Producte die Zeichen der Dreiecke $ACD$, $ADB$, $ABC$ (§. 9, 7) haben.***)

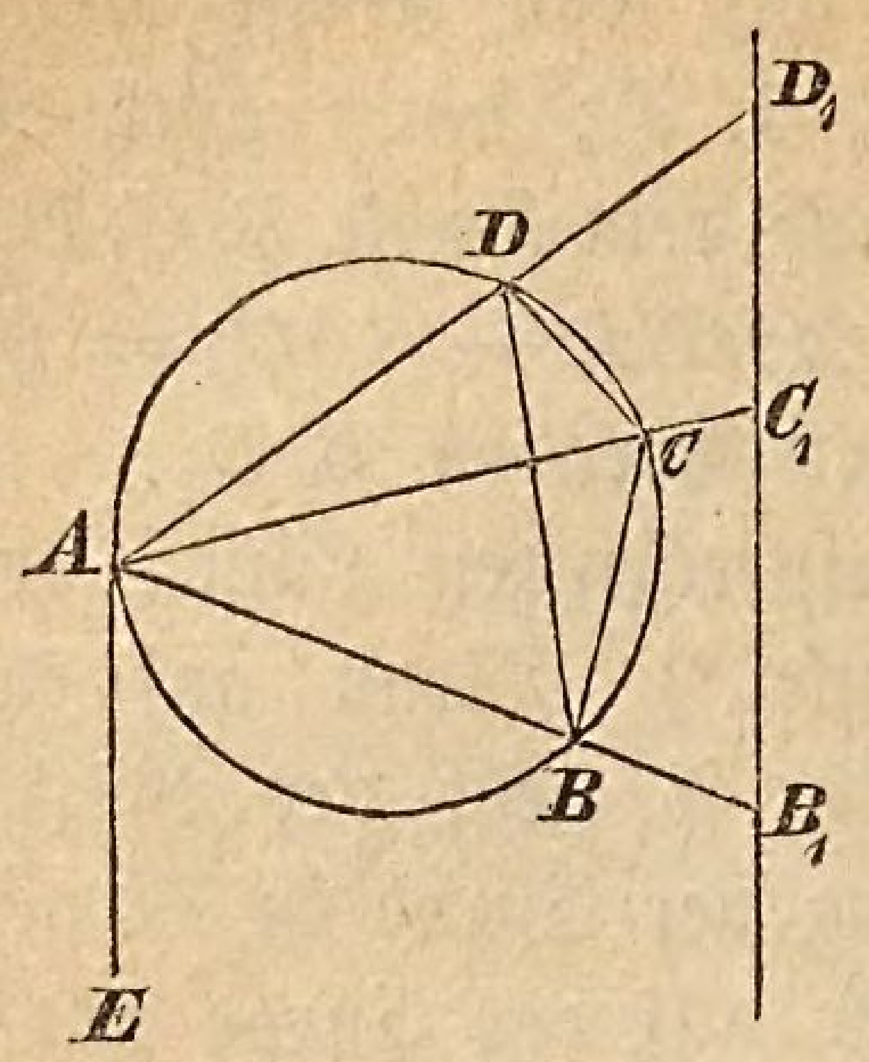
---

von Liouville erläutert (Liouville J. 12 p. 265), endlich von Möbius Kreisverwandtschaft genannt und umfassend behandelt worden (Theorie der Kreisverwandtschaft 1855). Von Möbius rühren die Relationen der Strecken und Winkeldifferenzen her, in denen der Punct $N$ nicht vorkommt. Kreisverwandte (homocyclische) Figuren sind conform. S. Stereom. §. 5, 6.

*) Diese Eigenschaft ist an den sphärischen Figuren und ihren stereographischen Abbildern von Hooke und Moivre bemerkt worden (Halley in Philos. Trans. 19 No. 219).

**) Fuß Acta Petrop. 1782, II p. 172.

***) Dieser Satz heißt der Ptolemäische Lehrsatz, weil sein Gebrauch zur Be-




Beweis. Zieht man parallel mit der Tangente des Kreises $AE$ eine Gerade, welche $AB$, $AC$, $AD$ der Reihe nach in $B_1$, $C_1$, $D_1$ schneidet, so ist der Winkel $EAB$ sowohl den Winkeln $C_1B_1A$, $D_1B_1A$, als auch den Winkeln $ACB$, $ADB$ gleich, folglich sind die Dreiecke $ABC$, $ABD$ den Dreiecken $AC_1B_1$, $AD_1B_1$ ähnlich, und man hat

$$AB.AB_1 = AC.AC_1 = AD.AD_1$$

mithin (13)

$$\frac{CD}{AC.AD} : \frac{DB}{AD.AB} : \frac{BC}{AB.AC} = C_1D_1 : D_1B_1 : B_1C_1$$

Nun ist $C_1D_1 + D_1B_1 + B_1C_1 = 0$, weil die Puncte $B_1$, $C_1$, $D_1$ auf einer Geraden liegen (1); folglich (Algebra §. 1, 7) die Summe

$$\frac{CD}{AC.AD} + \frac{DB}{AD.AB} + \frac{BC}{AB.AC} = 0$$

wenn die Glieder der Reihe nach die Zeichen der Strecken $C_1D_1$, $D_1B_1$, $B_1C_1$, also auch der Dreiecke $ACD$, $ADB$, $ABC$ haben. Durch Multiplication mit $AB.AC.AD$ findet man

$$AB.CD + AC.DB + AD.BC = 0$$

Weil jeder der gegebenen Puncte vom Dreieck der übrigen Puncte ausgeschlossen ist, so müssen von den 3 Paaren gegenüberliegender Strecken $AB$ und $CD$, $AC$ und $DB$, $AD$ und $BC$, ein Paar unverlängert sich schneiden, während die andern Paare unverlängert sich nicht schneiden. Das Product der sich schneidenden Strecken ist negativ zu nehmen, wenn man die Producte der sich nicht schneidenden Strecken positiv genommen hat.

Bei einem dem Kreise eingeschriebenen Viereck, dessen Perimeter sich selbst nicht schneidet, ist das Product der Diagonalen der Summe der Producte der gegenüberliegenden Seiten gleich.

Anmerkung. Für 5 Puncte eines Kreises $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ hat man in gleicher Weise*)

$$\frac{BC}{AB.AC} + \frac{CD}{AC.AD} + \frac{DE}{AD.AE} + \frac{EB}{AE.AB} = 0$$

---

rechnung der zu den Centriwinkeln von 0 bis 180° gehörigen Sehnen eines Kreises von Ptolemäus (Almagest I, 9) berichtet worden ist. Die unbeschränkte Aufstellung des Satzes für irgend 4 Puncte des Kreises rührt von Möbius her (Kreisverw. 26 und 44).

*) Carnot géom. de pos. 215.

Die obigen Gleichungen behalten ihre Richtigkeit, wenn der Radius des Kreises unendlich wird und der Kreis in eine Gerade übergeht. Dann ist $CD = AD - AC$, u. s. w., folglich

$$AB \,.\, CD + AC \,.\, DB + AD \,.\, BC$$
$$= AB\,(AD - AC) + AC\,(AB - AD) + AD\,(AC - AB) = 0\text{*)}$$

16. Bei 4 beliebigen Puncten $A$, $B$, $C$, $D$ verhalten sich die Producte $AB \,.\, CD$, $AC \,.\, DB$, $AD \,.\, BC$ zu einander der Reihe nach wie die Seiten eines bestimmten Dreiecks.**)

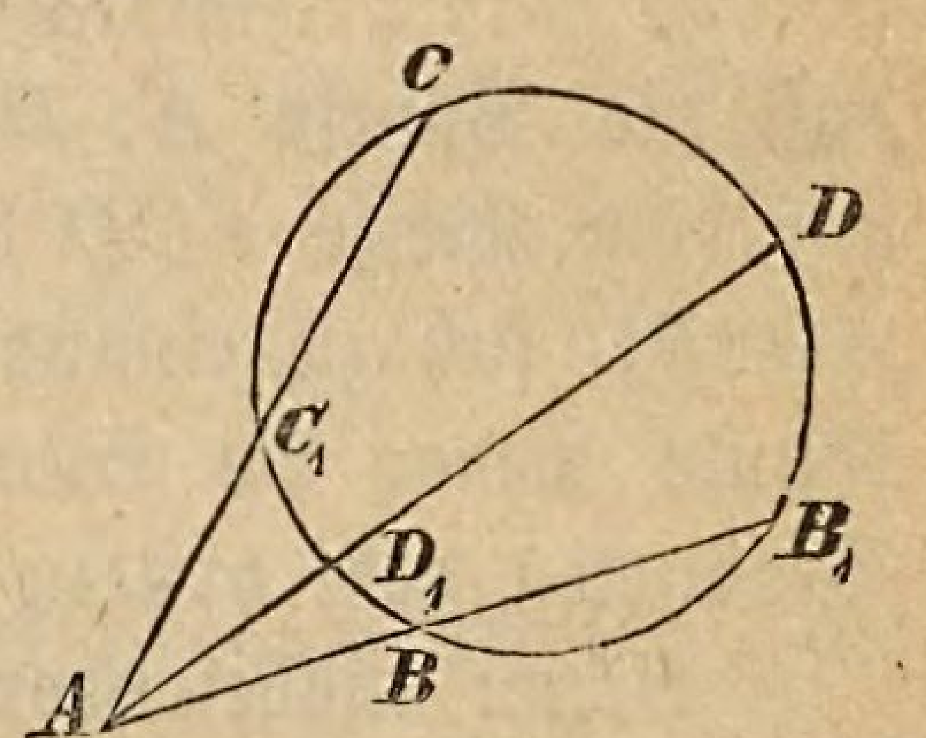
Beweis 1. Der Kreis $BCD$ wird von $AB$, $AC$, $AD$ in $B_1$, $C_1$, $D_1$ geschnitten, so daß (13)

$$AB \,.\, AB_1 = AC \,.\, AC_1 = AD \,.\, AD_1$$
$$\frac{CD}{AC.AD} : \frac{DB}{AD.AD} : \frac{BC}{AB.AC} = C_1D_1 : D_1B_1 : B_1C_1$$

oder

$$AB \,.\, CD : AC \,.\, DB : AD \,.\, BC = C_1D_1 : D_1B_1 : B_1C_1$$

Die Winkel des Dreiecks $B_1C_1D_1$ sind aus denselben Gründen

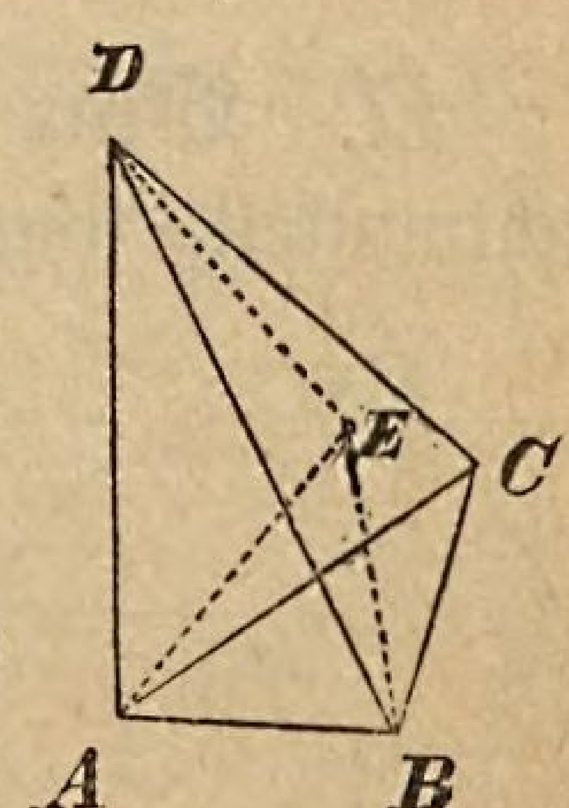



$$C_1B_1D_1 = CAD - CBD$$
$$D_1C_1B_1 = DAB - DCB$$
$$B_1D_1C_1 = BAC - BDC.$$

In der That beträgt die Summe der Winkeldifferenzen $180^0$.

Beweis 2. Macht man das Dreieck $ABE$ einerlei Sinnes und ähnlich mit $ACD$, so ist

$$AE : AD = AB : AC = BE : CD.$$




Dabei ist der Winkel $EAD = BAC$, weil $BAE = CAD$ gemacht ist. Also sind auch die Dreiecke $AED$ und $ABC$ ähnlich und einerlei Sinnes (§. 11, 2), d. h.

$$ED : BC = AD : AC.$$

Aus den Gleichungen $AB \,.\, CD = AC \,.\, BE$, $AD \,.\, BC = AC \,.\, ED$ folgt nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors $AC$

$$AB \,.\, CD : AC.DB : AD \,.\, BC = BE : DB : ED$$

*) Diese Identität ist von Euler benutzt worden (Nov. Comm. Petrop. I p. 49).

**) Möbius Kreisverwandtschaft 16 und 45. Durch Rechnung hatte Bretschneider die entsprechenden Resultate gefunden (Grunert Archiv 2 p. 240, Geometrie §. 616. Vergl. den Aufsatz des Verf. in Crelle J. 54 p. 167.

Für die Winkel des Dreiecks $BED$ findet man die Gleichungen

$$BDE = ACB - ADB = CAD - CBD$$
$$DEB = CBA - CDA = DAB - DCB$$
$$EBD = BAC - BDC = BAC - BDC$$

Denn $BDE = BDA + ADE = BDA + ACB$. Hiervon subtrahirt man die Gleichung $BDA + DAC + ACB + CBD = 0$, und setzt $-ADB$ an die Stelle von $BDA$, $CAD$ an die Stelle von $-DAC$. U. s. w.

Anmerkung. Wenn $A$ auf den Kreis $BCD$ fällt, so fallen $B_1$, $C_1$, $D_1$ mit $A$ zusammen. Die unendlich nahen Puncte $B_1$, $C_1$, $D_1$ liegen auf einer Geraden, so daß $C_1D_1 + D_1B_1 + B_1C_1 = 0$ in der oben (1) angegebenen Bedeutung.

Der zweite Beweis ruht auf denselben Gründen, wie der alte Beweis des Ptolemäischen Satzes. Wenn $A$ auf dem Kreise $BCD$ liegt, so ist $2(CAD - CBD) = 0$, folglich $2BDE = 0$, d. h. $E$ liegt auf der Geraden $BD$, u. s. w.

Umgekehrt schließt man aus der Gleichung

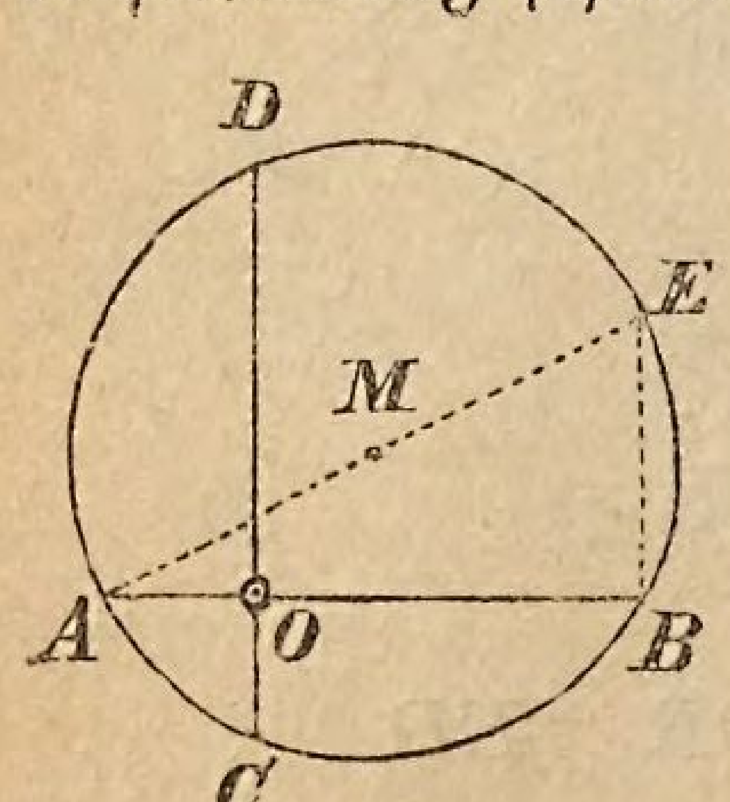
$$AB.CD + AC.DB + AD.BC = 0$$

daß die Puncte $A$, $B$, $C$, $D$ auf einem Kreise liegen. Wenn $A$ nicht auf dem Kreise $BCD$ läge, so würden die Producte $AB.CD$, $AC.DB$, $AD.BC$ sich zu einander verhalten wie die Seiten eines Dreiecks; also könnte weder die Summe noch die Differenz von zweien unter diesen Producten dem dritten gleich sein.

Wenn insbesondere $A$, $B$, $C$ auf einer Geraden liegen, so schließt man aus der obigen Gleichung, daß $D$ auf derselben Geraden liegt. Läge $D$ nicht auf der Geraden $AB$, so würde $E$ auf der Geraden $AD$, also nicht auf $BD$ liegen, u. s. w.

17. Wenn zwei Sehnen $AB$, $CD$ eines Kreises ($M$) in $O$ sich rechtwinkelig schneiden, so ist*)

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = 4AM^2$$
$$AB^2 + CD^2 = 8AM^2 - 4OM^2$$




Beweis. Nach dem Pythagoreischen Lehrsatz ist $AO^2 + CO^2 = AC^2$, $BO^2 + DO^2 = BD^2$. Die Summe der Bogen $AC$, $BD$ ist ein Halbkreis (§. 4, 5). Macht man nun den Bogen $CE = BD$, so ist der Bogen $AE$ ein Halbkreis, mithin $AC^2$

*) Der erste von diesen Sätzen ist das 11te Lemma bei Archimedes; der andere ist von Carnot (géom. de pos. 134) nebst mehrern Folgerungen gegeben worden.

$+ CE^2 = AE^2$, d. h. $AC^2 + BD^2 = 4AM^2$. Ferner ist $AO.OB = CO.OD = AM^2 - OM^2$ (3), $AB^2 = (AO + OB)^2 = AO^2 + 2AO.OB + BO^2$, u. s. w., folglich

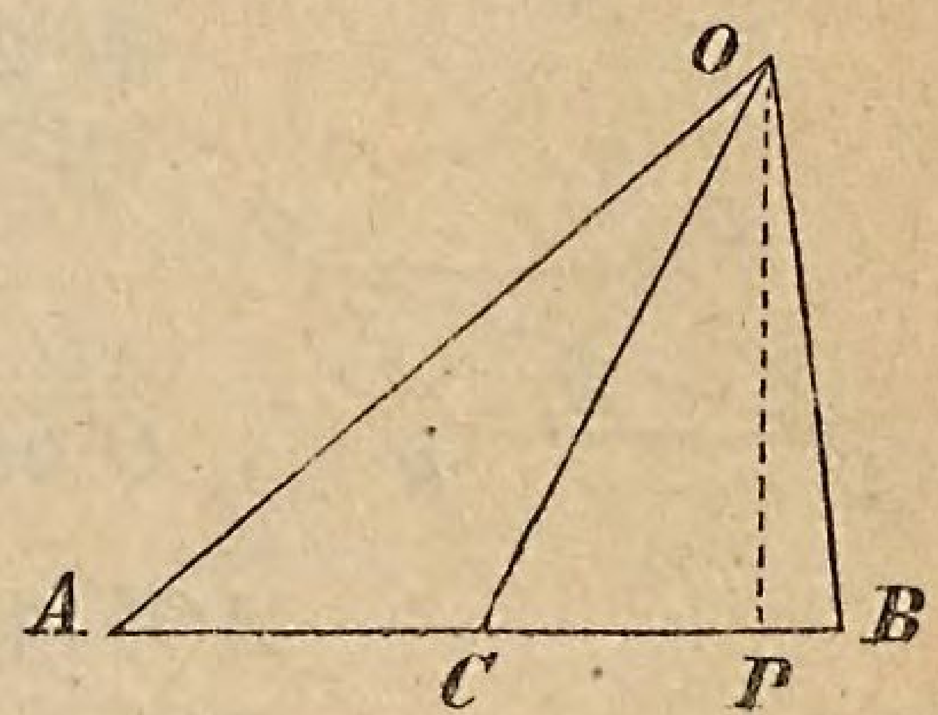
$$AB^2 + CD^2 = AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 + 4AM^2 - 4OM^2$$

woraus die Behauptung sich ergiebt.

Anmerkung. Der Satz und sein Beweis behalten ihre Richtigkeit, wenn die Sehnen außerhalb des Kreises sich schneiden. Die Summe $AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2$ ist unabhängig von der Länge der normalen Sehnen $AB$ und $CD$. Die Summe $AB^2 + CD^2$ bleibt unverändert, wenn für die normalen Sehnen $AB$, $CD$ der Abstand ihres Durchschnittspunctes $O$ vom Centrum sich gleich bleibt.

18. Wenn $C$ die Mitte von $A$ und $B$, und $O$ ein beliebiger Punct ist, so hat man

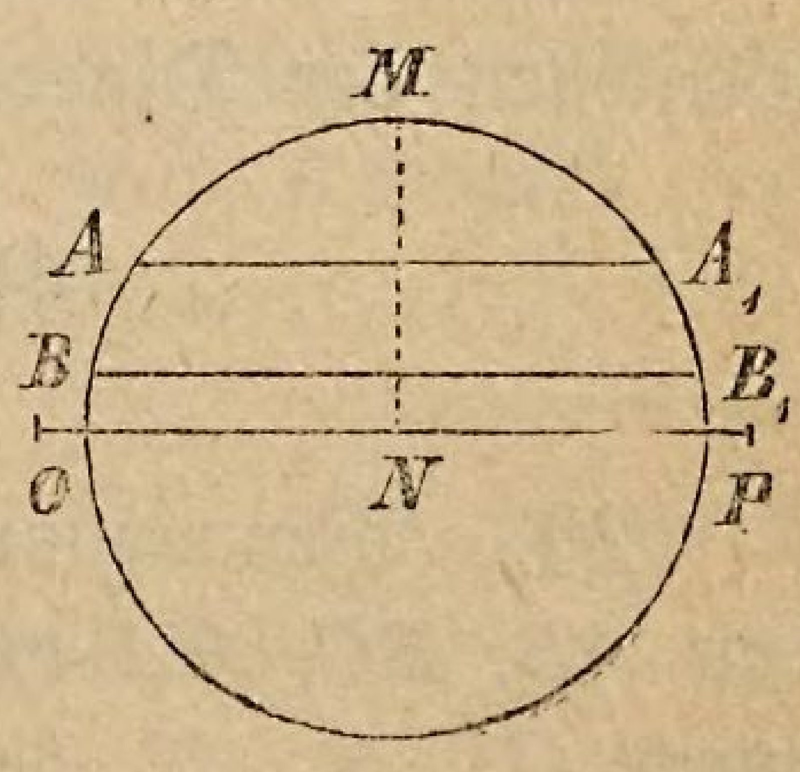
$$AO^2 + BO^2 = 2AC^2 + 2CO^2$$




Beweis. Zieht man $OP$ normal zu $AB$, so ist $AP^2 + BP^2 = 2AC^2 + 2CP^2$ (1), folglich $AP^2 + PO^2 + BP^2 + PO^2 = 2AC^2 + 2CP^2 + 2PO^2$, d. i. $AO^2 + BO^2 = 2AC^2 + 2CO^2$ nach dem Pythagoreischen Lehrsatz.

Zusätze. Jeder Punct, dessen Quadratabstände von zwei gegebenen Puncten eine gegebene Summe haben, liegt auf einem Kreise, dessen Centrum die Mitte der gegebenen Puncte ist.*) Wenn $AO^2 + BO^2$ von gegebener Größe ist, so ist $2AC^2 + 2CO^2$, folglich auch $CO$ von gegebener Größe.

Wenn $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, .. parallele Sehnen des Kreises ($N$) sind, $O$ ein Punct auf dem parallelen Diameter, so sind die Summen $OA^2 + OA_1{}^2$, $OB^2 + OB_1{}^2$, .. von gleicher Größe.**) Ist das Centrum $N$ die Mitte von $OP$, und der Radius $NM$ normal zu $OP$, so hat man




$$OA^2 + PA^2 = OB^2 + PB^2 = .. = 2OM^2.$$

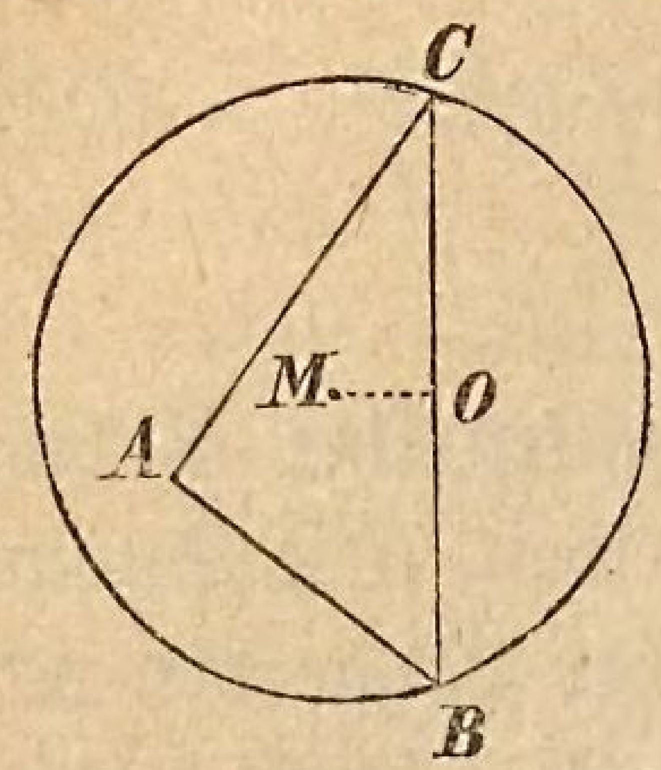
Nun sind die Dreiecke $PNA$ und $ONA_1$ gleich und ähnlich, d. h. $PA = OA_1$, u. s. w.

---

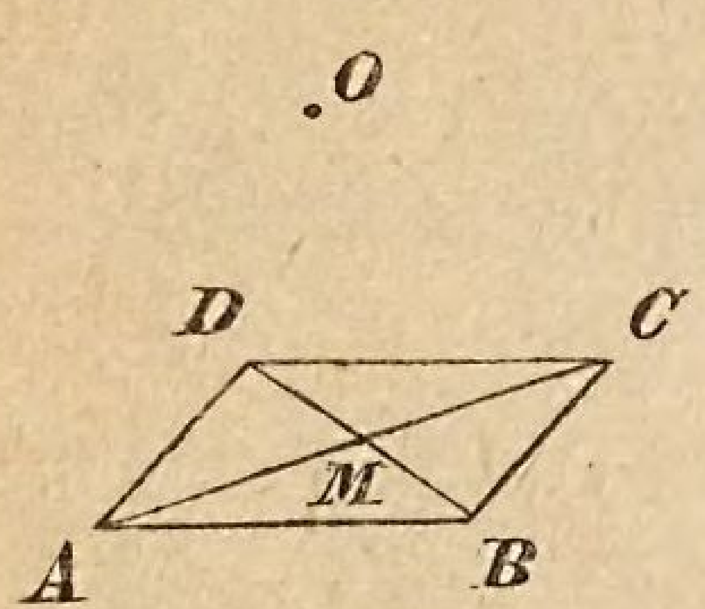
*) Apollonius im 2ten Buch der ebenen Oerter: Simson's Bearbeitung übers. von Camerer p. 263 ff. Vergl. unten 22.

**) Lahire 1730 Mém. de Paris Tome 9 p. 341 Lemma 1.

Der Kreis ($M$) werde von den Schenkeln eines rechten Winkels, dessen Scheitel $A$ ist, in $B$ und $C$ geschnitten. Wenn der rechte Winkel um seinen Scheitel $A$ sich dreht, so bewegt sich die Mitte $O$ der eingeschlossenen Sehne $BC$ auf einem bestimmten Kreise, dessen Centrum die Mitte von $AM$ ist.*) Denn man hat $AO = BO$ (§, 6, 7), und $MOB = 90^0$, folglich $AO^2 + MO^2 = BO^2 + MO^2 = MB^2$, woraus die Behauptung sich ergiebt. Der Kreis, welchen $O$ durchläuft, fällt mit seinem Centrum zusammen, oder hört auf real zu sein, wenn $AM$ so groß oder größer wird, als die halbe Diagonale des dem Kreis ($M$) umgeschriebenen Quadrats.




**19.** Wenn $ABCD$ ein Parallelogramm und $M$ das Centrum desselben ist, so hat man (18) $AB^2 + BC^2 = 2AM^2 + 2MB^2$. Nun ist $4AM^2 = AC^2, \ldots$, folglich




$$2AB^2 + 2BC^2 = AC^2 + BD^2.$$

Wenn man ferner einen beliebigen Punct durch $O$ bezeichnet, so ist

$$AO^2 + CO^2 = 2AM^2 + 2MO^2$$
$$BO^2 + DO^2 = 2BM^2 + 2MO^2$$

folglich

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = \tfrac{1}{2}AC^2 + \tfrac{1}{2}BD^2 + 4MO^2$$

Für alle Puncte $O$ eines Kreises, der mit dem Parallelogramm das Centrum gemein hat, ist die Summe $AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2$ von derselben Größe.

Wenn insbesondere $ABCD$ ein Rectangel ist, so ist wegen der Gleichheit der Diagonalen

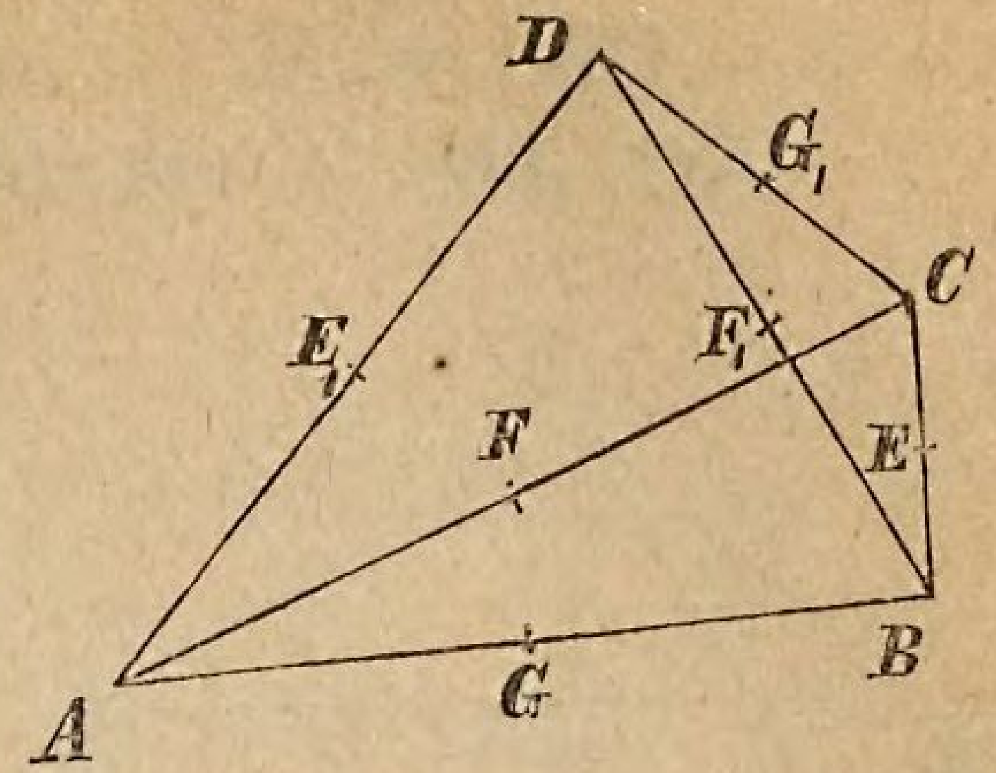
$$AO^2 + CO^2 = BO^2 + DO^2$$

**20.** Wenn man in einem gemeinen Viereck $ABCD$ die Mitten von $AB$, $BC$, $CA$ durch $G$, $E$, $F$, und die Mitten von $CD$, $AD$, $BD$ durch $G_1$, $E_1$, $F_1$ bezeichnet, so ist $EFE_1F_1$ ein Parallelogramm (§. 8,

---

*) Anonym in Crelle J. 9 p. 102. Vergl. Crelle J. 19 p. 205 und Heinen Crelle J. 18 p. 181.

3), u. s. w. Folglich $2EF^2 + 2FE_1{}^2 = EE_1{}^2 + FF_1{}^2$ (19), oder

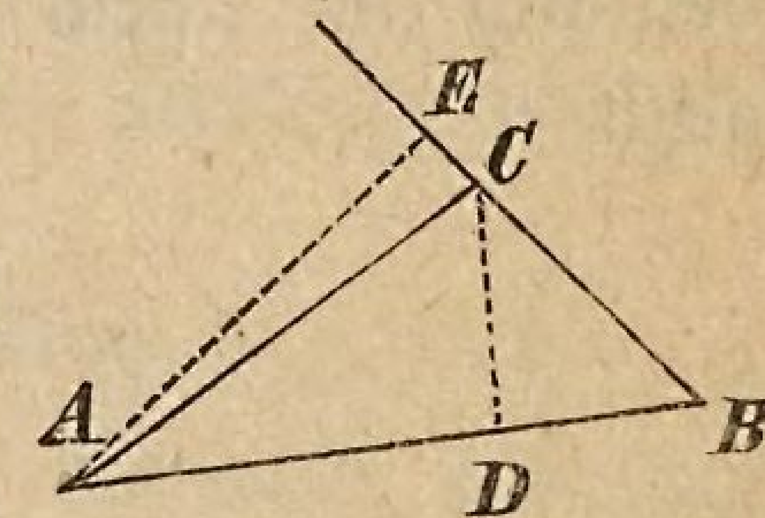



$$AB^2 + CD^2 = 2EE_1{}^2 + 2FF_1{}^2$$
$$BC^2 + DA^2 = 2FF_1{}^2 + 2GG_1{}^2$$
$$AC^2 + BD^2 = 2GG_1{}^2 + 2EE_1{}^2$$

Aus diesen Gleichungen findet man ohne Weiteres:

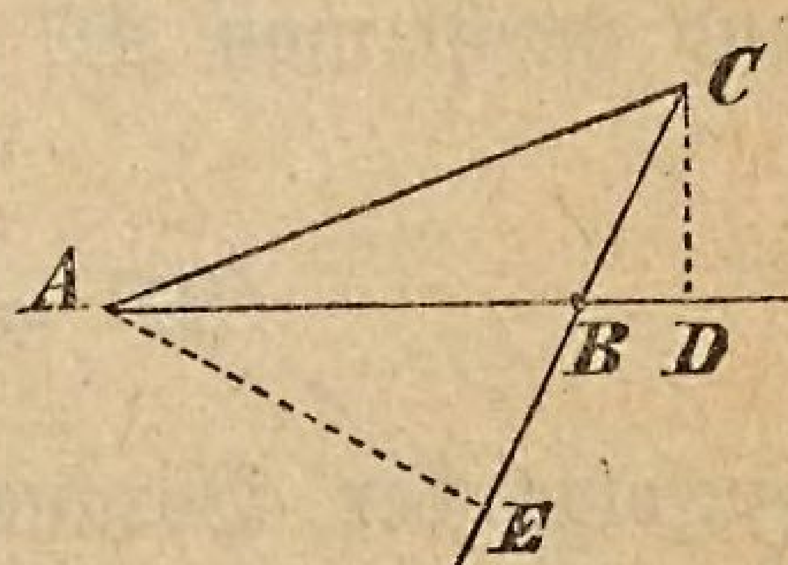
$$AB^2 + CD^2 + 2GG_1{}^2 = BC^2 + DA^2 + 2EE_1{}^2 = AC^2 + BD^2 + 2FF_1{}^2$$
$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4FF_1{}^2 \text{*)}$$
$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 + AC^2 + BD^2 = 4EE_1{}^2 + 4FF_1{}^2 + 4GG_1{}^2$$

**21.** Bei einem Dreieck ist das Quadrat der einen Seite, je nachdem dieselbe einem spitzen oder stumpfen Winkel gegenüberliegt, kleiner oder größer als die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten. Die Differenz ist das doppelte Product von einer dieser Seiten mit dem Stück, welches von ihr durch die Normale aus dem Ende der andern Seite abgeschnitten wird.**)




Beweis. Wenn $CD$ und $AE$ normal zu $AB$ und $BC$ sind, so ist (2)

$$AB^2 + BC^2 - CA^2 = AB^2 + DB^2 - AD^2$$
$$= BE^2 + BC^2 - CE^2.$$




Nun ist $AB = AD + DB$, $BC = BE + EC$ (1), folglich

$$AB^2 + DB^2 - DA^2 = 2AB.DB$$
$$BE^2 + BC^2 - CE^2 = 2BC.BE$$

Wenn der Winkel $B$ spitz ist, so hat $DB$ mit $AB$, $BE$ mit $BC$ einerlei Richtung, und die Producte $2AC.DB$, $2BC.BE$ sind positiv. Wenn aber der Winkel $B$ stumpf ist, so sind die Strecken $AB$ und $DB$, $BC$ und $BE$ entgegengesetzt, und die Producte $2AB.DB$, $2BC.BE$ negativ (1). Die Gleichheit der Producte $AB.DB$ und $BC.BE$ wird durch die Aehnlichkeit der Dreiecke $BDC$ und $BEA$ bestätigt.

**22.** Wenn $C$ auf der Geraden $AB$ so liegt, daß $AC : AB = m$, und wenn $D$ einen beliebigen Punct bedeutet, so hat man***)

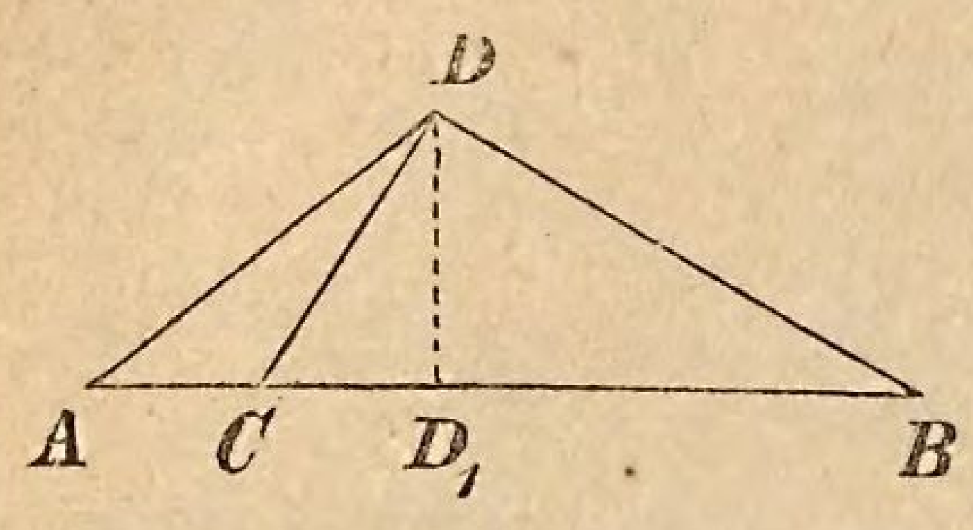
---

*) Euler 1750 (Nov. Comm. Petrop. 1 p. 66). Die beigeordneten Gleichungen findet man in Gerg. Ann. 2 p. 310.

**) Eucl. II, 12 und 13.

***) Stewart de quibusdam theorem. generalibus . . . Edinburg. 1746. Vergl. Chasles Ap. hist. p. 172 d. Uebers.

$$CD^2 = (1 - m)AD^2 + mBD^2 - (1 - m)mAB^2$$
$$BC.AD^2 + CA.BD^2 + AB.CD^2 + AB.BC.CA = 0$$



Beweis. Die Formeln $AC^2 + AD^2 - CD^2$ und $AB^2 + AD^2 - BD^2$ haben die Werthe $2AC.AD_1$ und $2AB.AD_1$, wenn $DD_1$ normal zu $AB$ (21), und das Verhältniß $m$. Aus der Gleichung

$$AC^2 + AD^2 - CD^2 = m(AB^2 + AD^2 - BD^2)$$

findet man für $CD^2$ die erste der obigen Formeln, nachdem man $m^2AB^2$ für $AC^2$ gesetzt hat. Die andere entspringt aus der ersten, wenn man $m$ durch $AC:AB$, $1 - m$ durch $CB:AB$ ersetzt und beachtet, daß $CB = - BC$ (1) u. s. w.

Zusatz. Die Puncte $D$, welche in Bezug auf zwei gegebene Puncte $A$ und $B$ so liegen, daß $AD^2 + kBD^2$ einen gegebenen Werth hat, befinden sich auf einem bestimmten Kreise.*) Setzt man $m = k(1 - m)$, folglich

$$m = \frac{k}{1+k}, \quad 1 - m = \frac{1}{1+k}$$

und macht man $AC = \frac{k}{1+k}AB$, so erhält man

$$CD^2 = \frac{AD^2 + kBD^2}{1+k} - \frac{k}{(1+k)^2}AB^2$$

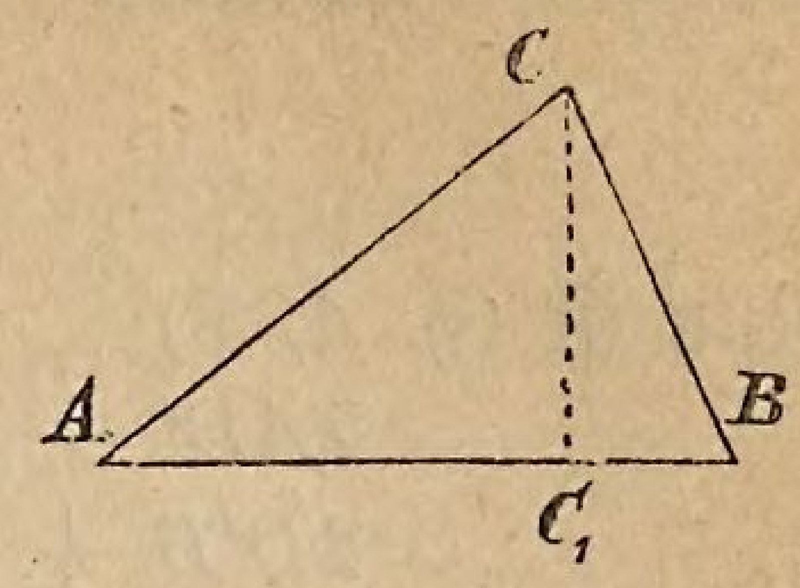
Zufolge der Voraussetzung ist dieser Werth von $CD^2$ unveränderlich. Der Fall $k = 1$ ist oben (18) betrachtet worden. In dem Falle $k = - 1$ ist das Centrum des Kreises unendlich fern, und der Kreis von einer Geraden, welche $AB$ normal schneidet, nicht verschieden (2).

23. Die Fläche eines Dreiecks kann durch die Seiten desselben ausgedrückt werden. Zieht man im Dreieck $ABC$ die Höhe $C_1C$ normal zu $AB$, und hat die Fläche des Dreiecks $\triangle$ Quadrateinheiten, so ist (§. 10, 4)

---

*) Apollonius im 2ten Buch der ebenen Oerter (Simson's Bearbeitung übers. von Camerer p. 263 ff.) hat bemerkt, daß $O$ auf einem bestimmten Kreise liegt, wenn $A, B, C, ..$ gegebene Puncte, $\alpha, \beta, \gamma, ..$ gegebene Zahlen sind, und die Formel $\alpha AO^2 + \beta BO^2 + \gamma CO^2 + ..$ einen gegebenen Werth hat. Daß das Centrum des Kreises der Schwerpunct der Puncte $\alpha A, \beta B, \gamma C, ..$ ist, hat Fermat (opp. p. 151) hinzugefügt. Vergl. Stereom. §. 11, 8.

$\triangle = \frac{1}{2}AB.C_1C, \quad 16\triangle^2 = 4AB^2.C_1C^2$




Zugleich ist (21)

$$(AB^2 + BC^2 - CA^2)^2 = 4AB^2.C_1B^2$$
$$C_1C^2 + C_1B^2 = BC^2$$

folglich

$$16\triangle^2 + (AB^2 + BC^2 - CA^2)^2 = 4AB^2.BC^2$$

Haben die Seiten $BC$, $CA$, $AB$ der Reihe nach $a$, $b$, $c$ Längeneinheiten, so findet man

$$\begin{aligned}16\triangle^2 &= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2\\ &= 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2\\ &= 4c^2a^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2\\ &= 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4\\ &= a^2(-a^2+b^2+c^2) + b^2(a^2-b^2+c^2) + c^2(a^2+b^2-c^2)\end{aligned}$$

Nach den Regeln über die Multiplication ist $4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2$ das Product der Factoren $2ab+a^2+b^2-c^2$, $2ab-a^2-b^2+c^2$, oder $(a+b)^2 - c^2$, $c^2 - (a-b)^2$, welche wiederum Producte von je 2 Factoren sind. Also ist auch

$$16\triangle^2 = (a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$$

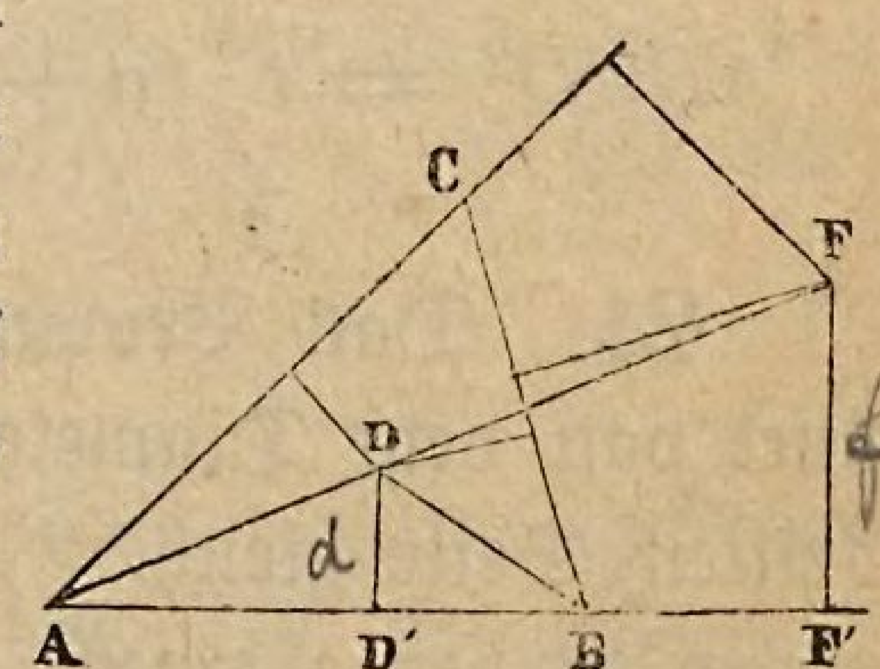
Setzt man $a + b + c = 2s$, d. h. den halben Perimeter des Dreiecks $= s$, so wird

$$\begin{aligned}-a + b + c &= 2s - 2a\\ a - b + c &= 2s - 2b\\ a + b - c &= 2s - 2c\end{aligned}$$

und nach Division durch 16 erhält man*)

$$\triangle^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

Um diese Formel geometrisch zu beweisen, bezeichne man durch $D$ und $F$ die auf der Halbirenden des Winkels $A$ liegenden Centren der Kreise, welche die Seiten des Dreiecks $ABC$ berühren, und die Normalen $DD'$, $FF'$ zu $AB$ durch $d$, $f$, so daß $\triangle = sd$ (§. 13, 9). Die Dreiecke $ADD'$ und $AFF'$, $D'BD$ und $F'FB$ sind ähnlich d. h.




$$d:f = AD':AF', \quad df = D'B.BF'$$

*) Dieser Satz nebst einem geometrischen Beweis kommt zuerst in Heron's geodätischer Schrift περὶ διόπτρας vor. Der folgende geometrische Beweis ist ebenfalls alten Ursprungs und in Leonardo Practica geometriae (1220) ed. Boncompagni p. 40 enthalten. Vergl. den Aufsatz des Verf. in den Leipziger Berichten 1865 p. 3.

Durch Multiplication findet man

$$d^2 = \frac{AD'.D'B.BF'}{AF'}$$

Nun ist (§. 4, 8)

$$2AD' + BC = CA + AB, \quad AD' = s - a$$
$$2D'B + CA = AB + BC, \quad D'B = s - b$$
$$2AF' - BC = CA + AB, \quad AF' = s$$

und $BF' = s - c$, folglich

$$d^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} \text{ u. s. w.}$$

Zusatz. Das Product der Radien von den Kreisen, welche die Seiten des Dreiecks berühren, hat den Werth $\triangle^2$.*) Bezeichnet man diese Radien durch $d, f, g, h$, so hat man (§. 13, 9)

$$(a + b + c)d = 2\triangle, \quad (-a + b + c)f = 2\triangle$$
$$(a - b + c)g = 2\triangle, \quad (a + b - c)h = 2\triangle$$

folglich

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\,dfgh = 16\triangle^4$$
$$dfgh = \triangle^2$$

Wenn das Viereck $ABCD$, dessen Seiten $AB$, $CD$ in $E$ sich schneiden, einem Kreis mit dem Radius $r$ umgeschrieben ist, so hat man bei der §. 4, 10 gegebenen Bezeichnung

$$EBC^2 = r^2(e+b+c)^2 = ebc\,(e+b+c)$$
$$EAD^2 = r^2(e-d-a)^2 = eda(e-d-a)$$
$$(e-d-a)\,bc = (e+b+c)\,da$$
$$e = \frac{bcd + cda + dab + abc}{bc - da}, \quad e+b+c = \frac{(a+b+c+d)bc}{bc-da}$$
$$r^2 = \frac{bcd + cda + dab + abc}{a+b+c+d}$$
$$ABCD^2 = r^2\,(a+b+c+d)^2 = (bcd+\ldots)(a+b+c+d)\text{**)}$$

**24.** Das Product von zwei Seiten eines Dreiecks ist dem Product von dem Diameter des umgeschriebenen Kreises mit der Höhe zur dritten Seite gleich.***) Ist $AD$ normal zu $BC$, und $AE$ ein Diameter des dem Dreieck $ABC$ umgeschriebenen Kreises, so sind die recht-

---

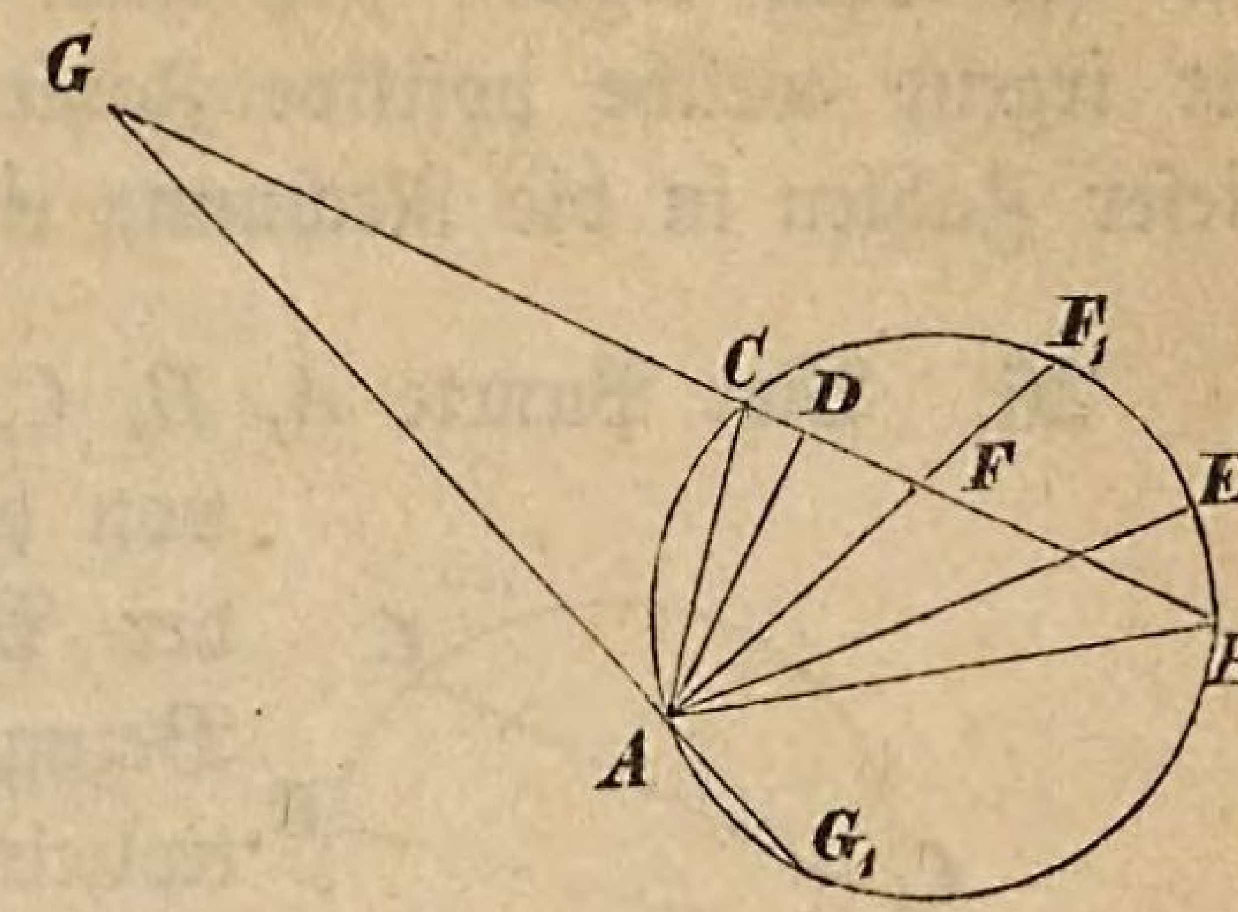
*) Mahieu 1807 und L'Huilier 1809. Vergl. Gerg. Ann. 1 p. 150.

**) Amthor Brief Dresden 1871.

***) Diese Bemerkung ist in der indischen Astronomie von Brahmagupta (Anfang des 7ten Jahrh. n. Chr.) enthalten. Vergl. Chasles ap. hist. p. 475 d. Uebers. Die Arbeiten der indischen Mathematiker werden auf griechische Originale zurückgeführt.

winkeligen Dreiecke $ABD$ und $AEC$ ähnlich, weil die Winkel $2DBA$ und $2CEA$ gleich sind. Daher hat man

$$AB:AD = AE:AC, \quad AB.AC = AD.AE$$




Dasselbe Product kann auf andere Weise ausgedrückt werden, indem man die den Winkel $BAC$ und seinen Nebenwinkel Halbirenden zieht, welche die Gerade $BC$ in $F$ und $G$, den Kreis in $F_1$ und $G_1$ schneiden.*) Dann sind die Dreiecke $ACF$ und $AF_1B$ ähnlich, weil die Winkel $ACF$ und $AF_1B$, $FAC$ und $BAF_1$ gleich sind. Daher hat man $AC:AF = AF_1:AB$, folglich

$$AB.AC = AF.AF_1 = AF(AF + FF_1)$$
$$= BF.FC + AF^2$$

weil $AF.FF_1 = BF.FC$ (3). Ebenso sind die Dreiecke $ACG$ und $AG_1B$ ähnlich, mithin

$$AB.AC = G_1A.AG = (G_1G - AG)AG$$
$$= BG.CG - AG^2$$

woraus man schließt, daß

$$FG^2 = AG^2 + AF^2 = BG.CG - BF.FC$$

25. Der gefundene Ausdruck für das Product von zwei Seiten eines Dreiecks (24) enthält zugleich den Ausdruck für den Radius des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises durch die Seiten des Dreiecks. Weil $BC.DA$ die doppelte Fläche des Dreiecks ist, so ist das Product der drei Seiten des Dreiecks gleich dem Product der vierfachen Fläche des Dreiecks mit dem Radius des umgeschriebenen Kreises. Bezeichnet man wie oben die Seiten des Dreiecks, die Fläche desselben und den Radius des umgeschriebenen Kreises durch $a$, $b$, $c$, $\triangle$, $r$, so hat man

$$abc = 4\triangle r, \quad r = \frac{abc}{4\triangle} \; **)$$

Hieraus folgt, daß die Flächen von Dreiecken, welche demselben Kreise eingeschrieben sind, sich verhalten wie die Producte ihrer Seiten.

Weil $r$ größer als der Diameter $2d$ des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises ist (4), so hat man***)

---

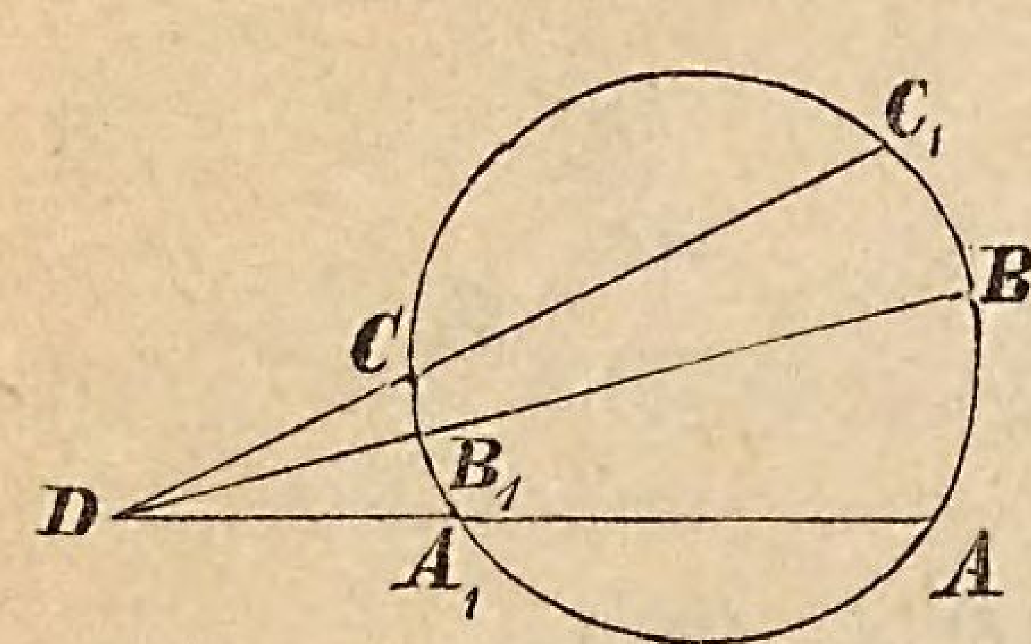
*) Schooten exercit. math. 1657 p. 65.
**) Brahmagupta. S. Chasles a. a. O. p. 470.
***) Lehmus Sammlung 1820 p. 27. Crelle math. Aufsätze I p. 162.

$$\frac{abc}{4\triangle} > \frac{4\triangle}{a+b+c}$$

$$abc > (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

In der That ergiebt sich eine positive Differenz der beiden Producte für irgend welche positive Zahlen $a$, $b$, $c$, wenn man die Differenzen dieser Zahlen in die Rechnung einführt.

**26.** Vier Puncte $A, B, C, D$ bestimmen 4 Dreiecke. Wenn man von den Flächen dieser Dreiecke eine jede mit der Potenz des umgeschriebenen Kreises in Bezug auf den übrig gebliebenen Punct multiplicirt, so erhält man gleiche Producte; ihr gemeinschaftlicher Werth ist die Fläche des Dreiecks, dessen Seiten die Producte $DA.BC$, $DB.CA$, $DC.AB$ sind. Bezeichnet man die Potenzen von $D$, $A$, $B$, $C$ in Bezug auf die Kreise $ABC$, $BCD$, $CDA$, $DAB$ durch $p$, $p_1$, $p_2$, $p_3$, und die nach (23) zu berechnende Fläche des Dreiecks, dessen Seiten die Producte $DA.BC, \ldots$ sind, durch $\varepsilon$, so ist*)




$$p.ABC = p_1.BCD = p_2.CDA = p_3.DAB = \varepsilon$$

Beweis. Werden $DA$, $DB$, $DC$ von dem Kreise $ABC$ in $A_1$, $B_1$, $C_1$ geschnitten, so hat man (13)

$$DA.DA_1 = DB.DB_1 = DC.DC_1 = p$$

$$A_1B_1 = p\frac{AB}{DA.DB} = \frac{p}{DA.DB.DC}DC.AB$$

u. s. w. Bezeichnet man $DA.DB.DC$ durch $q$, so ist

$$A_1B_1 = \frac{p}{q}DC.AB, \quad B_1C_1 = \frac{p}{q}DA.BC, \quad C_1A_1 = \frac{p}{q}DB.CA$$

$$A_1B_1C_1 = \frac{p^2}{q^2}\varepsilon$$

weil die Seiten von $A_1B_1C_1$ zu den Seiten, welche die Fläche $\varepsilon$ einschließen, das Verhältniß $p:q$ haben (§. 11, 2). Nun sind die Dreiecke $ABC$ und $A_1B_1C_1$ demselben Kreise eingeschrieben, folglich (25)

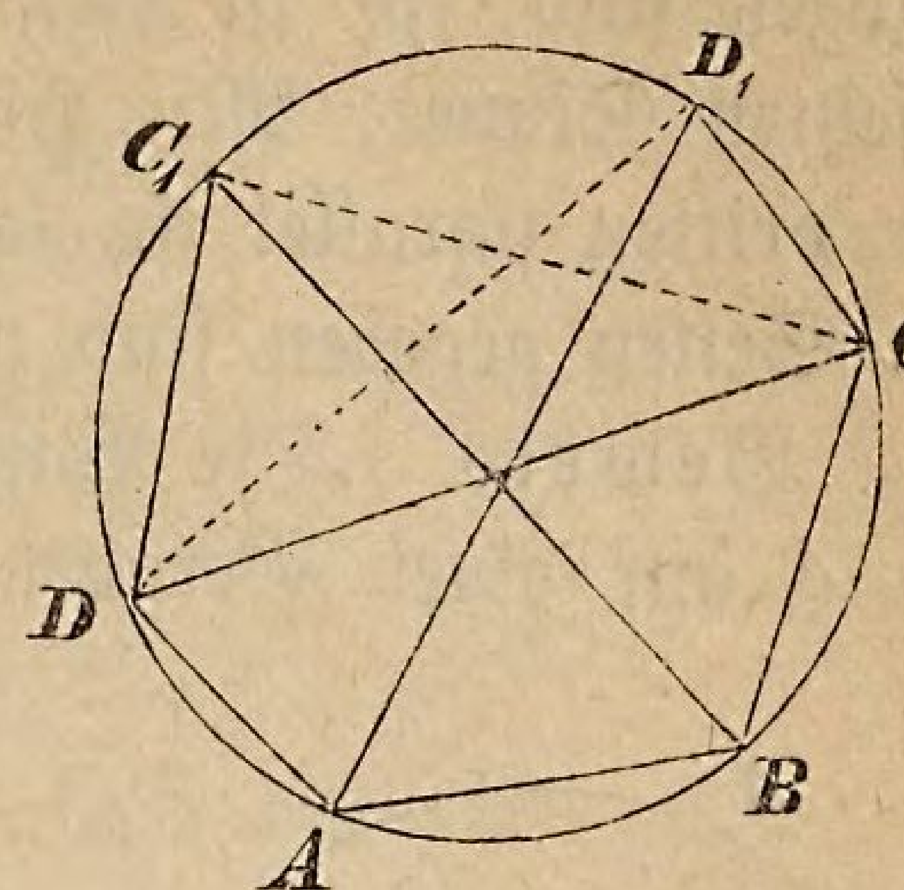
$$\frac{ABC}{A_1B_1C_1} = \frac{AB.BC.CA}{A_1B_1.B_1C_1.C_1A_1} = \frac{q^2}{p^3}$$

$$p.ABC = \varepsilon$$

Durch gegenseitige Vertauschung von $A, B, C, D$ erleidet $\varepsilon$ keine Veränderung, folglich erhält man auf gleiche Weise $p_1.BCD = \varepsilon$, u. s. w.

*) Staudt Crelle J. 57 p. 88.

27. Aus den Seiten eines dem Kreise eingeschriebenen Vierecks $ABCD$ kann man noch zwei andere demselben Kreise eingeschriebene Vierecke bilden, $ABC_1D$, $ABCD_1$, indem man einer Seite der Reihe nach jede von den übrigen Seiten gegenüberstellt. Die Flächen der 3 Vierecke sind gleich, weil sie von der Fläche des Kreises durch dieselben Segmente sich unterscheiden. Je zwei von diesen Vierecken haben eine Diagonale von derselben Größe. Sind nämlich $a$, $b$, $c$, $d$ die Seiten, so giebt es in den 3 Vierecken die Diagonalen $f$, $g$, $h$, von denen die erste ($DB$) mit $b$ und $c$, die andere ($AC_1$, $D_1B$) mit $c$ und $a$, die dritte ($AC$) mit $a$ und $b$ ein Dreieck bildet.




Wenn nun das Viereck $ABCD$ concav ist, so sind auch $ABC_1D$ und $ABCD_1$ concav, und man hat nach dem Ptolemäischen Lehrsatz (15)

$$hf = ca + bd$$
$$fg = ab + cd$$
$$gh = bc + ad$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{f} : \frac{1}{g} : \frac{1}{h} = bc + ad : ca + bd : ab + cd$$
$$f^2g^2h^2 = (ab + cd)(bc + ad)(ca + bd)$$
$$f^2 = \frac{(ca + bd)(ab + cd)}{bc + ad}$$
$$g^2 = \frac{(ab + cd)(bc + ad)}{ca + bd}$$
$$h^2 = \frac{(bc + ad)(ca + bd)}{ab + cd} \text{*)}$$

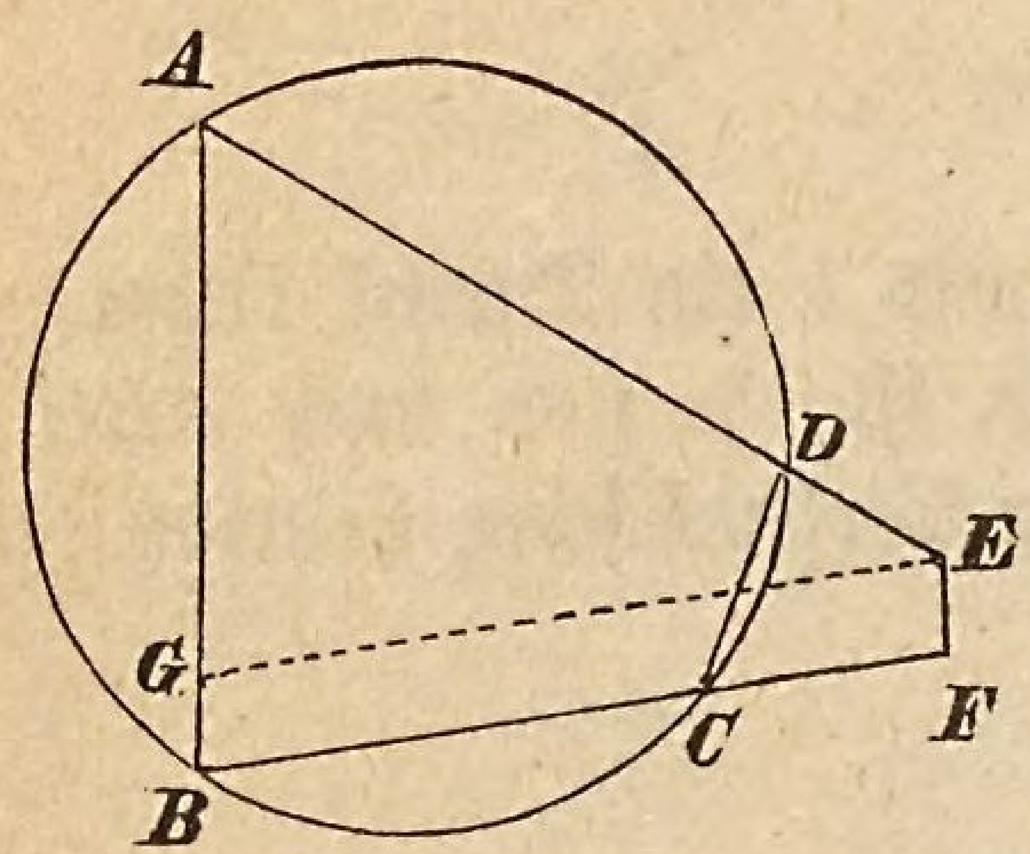
Wenn dagegen der Perimeter des Vierecks $ABCD$ sich selbst schneidet, so ist dies auch bei den Vierecken $ABC_1D$ und $ABCD_1$ der Fall. Die kleinste Seite z. B. $AB$ wird in keinem dieser Vierecke von der gegenüberliegenden Seite innen geschnitten. Dann hat man aber nach dem Ptolemäischen Lehrsatz $ca + h_1f_1 = bd$, u. s. w., indem man die Diagonalen auf gleiche Art wie oben durch $f_1$, $g_1$, $h_1$ bezeichnet. Mithin ergeben sich wiederum die obigen Formeln, nur mit dem Unterschiede, daß die kleinste Seite ($a$) negativ zu nehmen ist. In den abgeleiteten Formeln für $f_1{}^2$, $g_1{}^2$, $h_1{}^2$ ist es gleichgültig, welche von den vier Seiten negativ genommen wird.

---

*) Brahmagupta. S. Chales ap. hist. p. 485 d. Uebers. Die dritte Diagonale kommt bei Girard vor. Vgl. unten (30).

28. Wenn in einem dem Kreis eingeschriebenen Viereck $ABCD$ die gegenüberliegenden Seiten $DA$, $BC$ in $E$, $F$ von den Geraden geschnitten werden, die durch $C$, $D$ parallel mit den Diagonalen $DB$, $AC$ gezogen sind, so ist das Viereck $CDEF$ ähnlich $ABCD$ und entgegengesetzten Sinnes. Mit Hülfe des Vierecks $ABFE$, dessen erste Seite mit der dritten parallel ist, kann das Viereck $ABCD$ construirt werden, dessen Seiten gegeben sind und durch dessen Eckpuncte ein Kreis geht.*)

Beweis. Die Winkel $2CDE$, $2CDA$, $2CBA$ sind gleich, weil $D$, $E$, $A$ auf einer Geraden, $C$, $D$, $A$, $B$ auf einem Kreise liegen. Die Winkel $2DEC$, $2ADB$, $2ACB$ sind gleich, weil $EC$ und $BD$ parallel sind, und $A$, $B$, $D$, $C$ auf einem Kreise liegen. Daher sind die Dreiecke $CDE$ und $ABC$ ähnlich und entgegengesetzten Sinnes. Dasselbe ergiebt sich auf gleiche Weise für die Dreiecke $CDF$ und $ABD$. Hieraus erkennt man die Aehnlichkeit der Vierecke $CDEF$ und $ABCD$ (§. 12, 1). Daher sind die entsprechenden Winkel $CD^{\wedge}EF$ und $AB^{\wedge}CD$ entgegengesetzt gleich, also die Strecken $EF$ und $AB$ parallel und von einerlei Richtung.




Aus der Aehnlichkeit der Figuren $CDEF$ und $ABCD$ folgt, wenn man die Seiten $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ der Reihe nach durch $a$, $b$, $c$, $d$ bezeichnet,

$$CF = \frac{c}{a}d, \quad FE = \frac{c}{a}c, \quad ED = \frac{c}{a}b$$

Demnach hat das Viereck $ABFE$ die Seiten

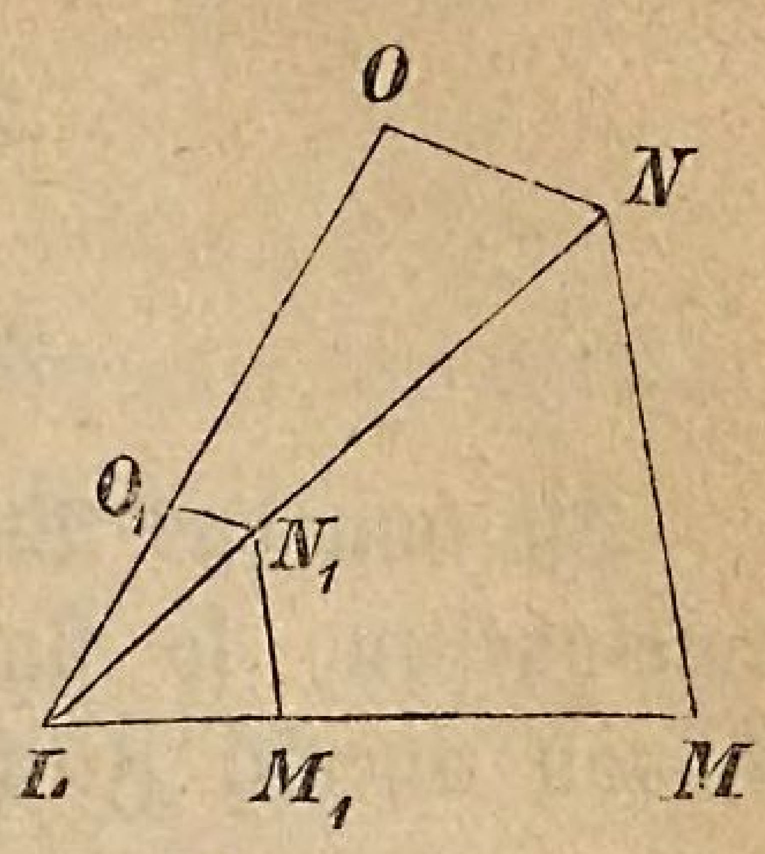
$$AB = a, \quad BF = b \mp \frac{c}{a}d, \quad FE = \frac{c}{a}c, \quad EA = d \mp \frac{c}{a}b$$

wovon die untern Zeichen für das concave Viereck $ABCD$ gelten, während die obern Zeichen zu nehmen sind, wenn die Seiten $BC$ und $DA$ dieses Vierecks sich unverlängert schneiden. Zieht man noch unter der Voraussetzung $c < a$ die Gerade $EG$ parallel mit $FB$, so hat das Dreieck $AEG$ die Seiten

$$AG = a - \frac{c}{a}c, \quad GE = b \mp \frac{c}{a}d, \quad EA = d \mp \frac{c}{a}b$$

*) Nach Lamé examen des diff. méthodes . . p. 16. Diese Aufgabe ist seit dem Ende des 16ten Jahrhunderts vielfach behandelt worden. Vgl. Chasles aperçu hist. p. 496 d. Uebers. Kunze Planim. 2te Aufl. p. 239. Camerer nach Klingenstjerna in der Uebers. von Simson's Bearbeitung der ebenen Oerter des Apollonius p. 427.

Sind nun die Strecken $a$, $b$, $c$, $d$ gegeben, so lassen sich im Allgemeinen zwei Vierecke $ABCD$ construiren, deren Seiten $a$, $b$, $c$, $d$ sind, und um welche je ein Kreis beschrieben werden kann, davon das eine concav ist, während der Perimeter des andern sich selbst schneidet. Man construire zunächst aus den Strecken $a$, $b$, $c$, $d$, wovon $c < a$, ein beliebiges Viereck $LMNO$, dazu in perspectivischer Lage das ähnliche Viereck $LM_1N_1O_1$, worin $LM_1 = c$, folglich




$$M_1N_1 = \frac{c}{a}b, \quad N_1O_1 = \frac{c}{a}c, \quad O_1L = \frac{c}{a}d$$

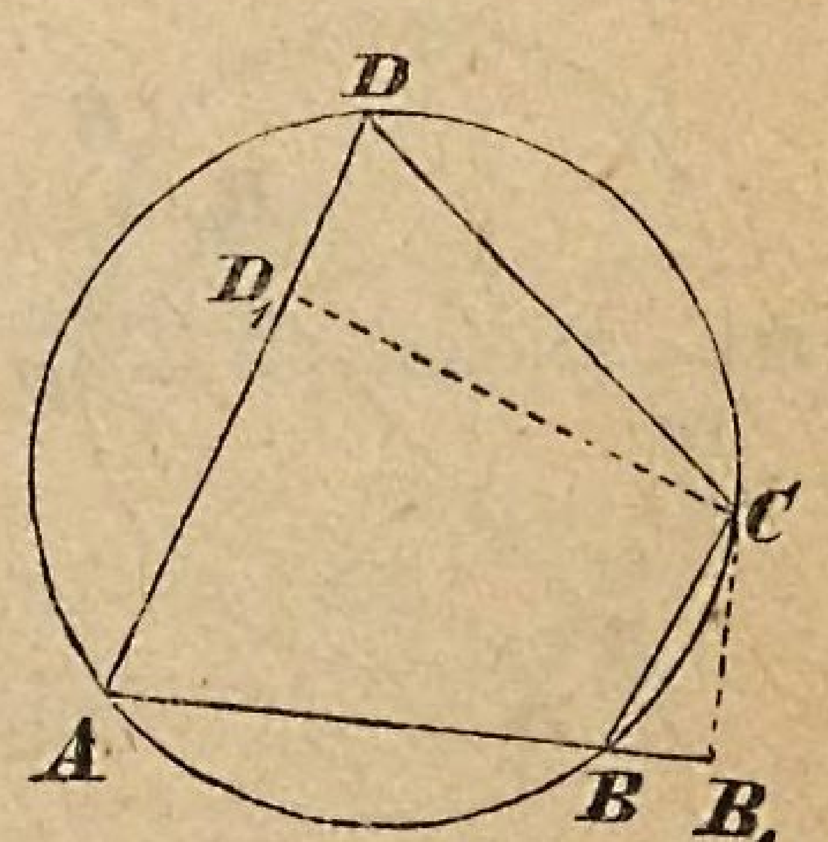
ist. Dann construire man, wenn es möglich ist, die Dreiecke $AGE$ aus den Seiten

$$a - N_1O_1, \quad b \mp O_1L, \quad d \mp M_1N_1$$

mache $AB = a$ in der Richtung $AG$, vollende die Parallelogramme $EGBF$, mache $BC = b$ in der Richtung $BF$ und $AD = d$ in der Richtung $AE$. Um jedes der gefundenen Vierecke $ABCD$ läßt sich ein Kreis beschreiben, und in jedem ist $CD = c$.

Bezeichnet man nämlich den Durchschnitt von $BC$ und $DA$ durch $H$, so hat man $EH : EF = AE : AG$, $FH : EF = BF : AG$ zur Berechnung von $EH$ und $FH$, $DH$ und $CH$. Mit Hülfe der obigen Werthe von $CF, \ldots, AG, \ldots$ findet man $DH : CH = BF : AE = BH : AH$, und $DH : FH = AD : CF$. Die Gleichung $DH \,.\, AH = BH \,.\, CH$ lehrt, daß der Kreis $ABC$ durch $D$ geht. Weil endlich $CD : EF = DH : FH = AD : CF$, so ist $CD = c$.

29. Die Fläche eines dem Kreise eingeschriebenen Vierecks kann auf ähnliche Art wie die Fläche eines Dreiecks (23) durch die Seiten ausgedrückt werden. Zieht man $CB_1$ und $CD_1$ normal zu $AB$ und $AD$, so sind die Dreiecke $CBB_1$ und $CDD_1$ ähnlich, wenn $A, B, C, D$ auf einem Kreise liegen, mithin die Winkel $2ABC$ und $2ADC$ gleich sind. Demnach hat man




$$BB_1 : B_1C : CB = DD_1 : D_1C : CD$$

und für die Flächen

$$2ABC = AB \,.\, B_1C = AB \,.\, BC \,.\, \frac{B_1C}{BC}$$

$$2DAC = DA \,.\, D_1C = CD \,.\, DA \,.\, \frac{B_1C}{BC}$$

Dabei haben die Formeln $AB^2 + BC^2 - CA^2$ und $CD^2 + DA^2 - AC^2$ die absoluten Werthe (21)

$$2AB\,.\,BB_1 = 2AB\,.\,BC\,.\,\frac{BB_1}{BC}$$

$$2DA\,.\,DD_1 = 2CD\,.\,DA\,.\,\frac{BB_1}{BC}$$

Ist nun das Viereck $ABCD$ concav, und hat seine Fläche $v$ Quadrateinheiten, so sind die Dreiecke $ABC$ und $DAC$, deren Summe $v$ ist, von einerlei Zeichen, folglich

$$16v^2 = 4(AB\,.\,BC + CD\,.\,DA)^2\,.\,\frac{B_1C^2}{BC^2}$$

Die Formeln $AB^2 + ..$ und $CD^2 + ..$ sind von entgegengesetzten Zeichen, weil die Winkel $ABC$ und $CDA$ zu $180^0$ sich ergänzen (21), folglich

$$(AB^2 + BC^2 - CD^2 - DA^2)^2 = 4(AB\,.\,BC + CD\,.\,DA)^2\,.\,\frac{BC_1^{\,2}}{BC^2}$$

Nun ist $B_1C^2 + BB_1^{\,2} = BC^2$, also nach Bezeichnung der Seiten des Vierecks durch $a$, $b$, $c$, $d$

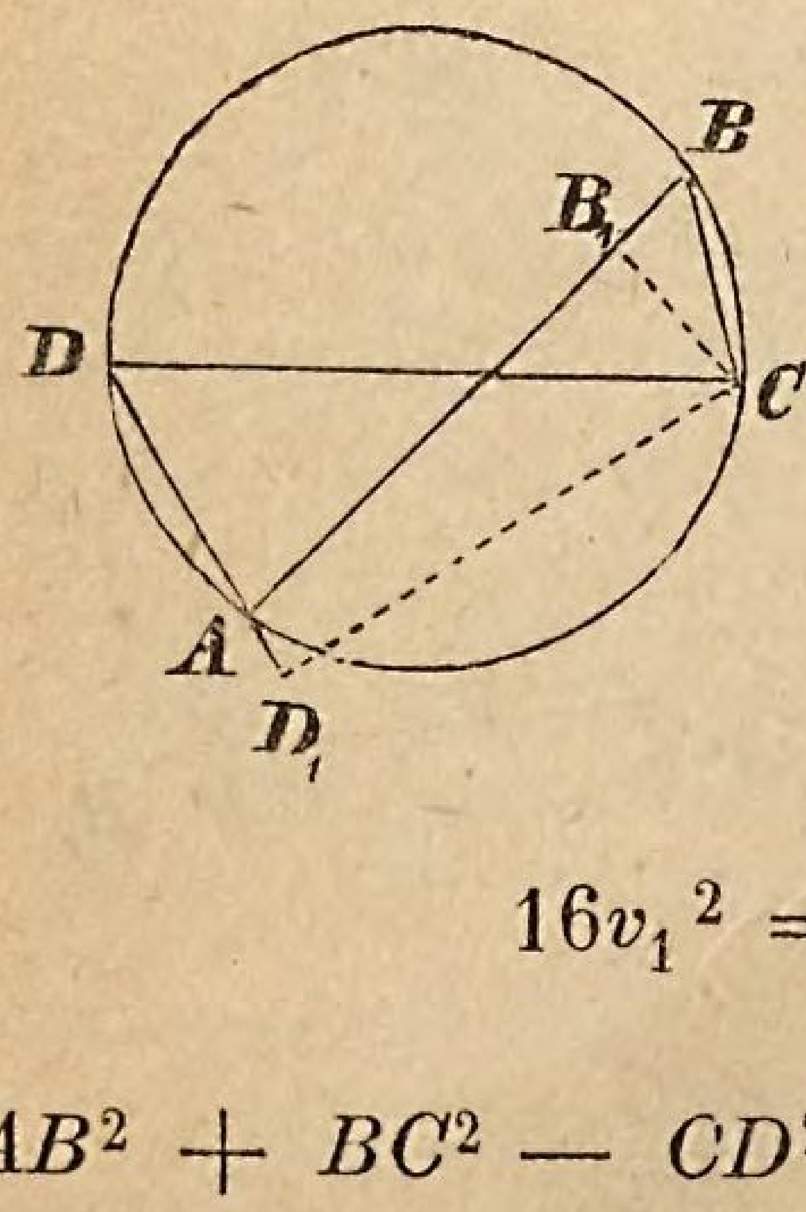
$$16v^2 = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$
$$= 8abcd + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2$$
$$- a^4 - b^4 - c^4 - d^4$$

Indem man die Differenz der Quadrate zerlegt, findet man

$$16v^2 = (-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)$$

Setzt man noch $a + b + c + d = 2s$, so erhält man*)

$$v^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d)$$




Wenn dagegen der Perimeter des Vierecks $ABCD$ sich selbst schneidet, so sind die Dreiecke $ABC$ und $DAC$ von entgegengesetzten Zeichen (§. 9, 7), während die Formeln $AB^2 + ..$ und $CD^2 + ..$ einerlei Zeichen haben. Bezeichnet man die Fläche des Vierecks durch $v_1$, so hat ma in diesem Falle

$$16v_1^{\,2} = 4(AB\,.\,BC - CD\,.\,DA)^2\,.\,\frac{B_1C^2}{BC^2}$$

$$(AB^2 + BC^2 - CD^2 - DA^2)^2 = 4(AB\,.\,BC - CD\,.\,DA)^2\,.\,\frac{BB_1^{\,2}}{BC^2}$$

---

*) Brahmagupta, Snellius. Vgl. Chasles aperçu hist. p. 480 d. Uebers.

folglich

$$16v_1{}^2 = 4(ab - cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$
$$= -8abcd + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2$$
$$- a^4 - b^4 - c^4 - d^4$$
$$= (-a + b + c - d)(a - b + c - d)(a + b - c - d)(a + b + c + d)$$

Setzt man noch die Differenz einer Seite und der Summe der übrigen Seiten z. B. $a + b + c - d = 2s_1$, so erhält man

$$v_1{}^2 = (s_1 - a)(s_1 - b)(s_1 - c)(s_1 + d)$$

Die Formeln für die Flächen $v$ und $v_1$ der Vierecke, welche die Seiten $a$, $b$, $c$, $d$ haben und um welche ein Kreis sich beschreiben läßt, sind demnach eine aus der andern ableitbar; aus der einen entspringt die andere, wenn eine Seite ihr Zeichen wechselt. Dabei ist unmittelbar wahrzunehmen, daß*)

$$v^2 - v_1{}^2 = abcd$$

Wenn $d$ verschwindet, so gehn $v$ und $v_1$ in die Formel für die Fläche des Dreiecks über, dessen Seiten $a$, $b$, $c$ sind (23).

**30.** Die Radien der Kreise, in welche sich Vierecke beschreiben lassen, deren Seiten $a$, $b$, $c$, $d$ sind, können auf ähnliche Art gefunden werden wie der Radius des Kreises, in den mit drei gegebenen Seiten ein Dreieck sich beschreiben läßt (25). Bezeichnet man die gesuchten Radien durch $r$ oder $r_1$, je nachdem das Viereck nur concave Winkel hat oder nicht, und behält man die angenommenen Bezeichnungen (27 ff.), so ist

$$4rv = 4r.ABC + 4r.DAC$$
$$= abh \quad + cdh$$

Nun ist $ab + cd = fg$, folglich

$$r = \frac{fgh}{4v} \text{**)}$$

$$r^2 = \frac{(ab + cd)(bc + ad)(ca + bd)}{(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)}$$

Für ein Viereck der zweiten Art hat man

$$4r_1v_1 = 4r_1.ABC - 4r_1.DAC = abh_1 - cdh_1$$

Abgesehn vom Zeichen ist $ab - cd = f_1g_1$, folglich

$$r_1 = \frac{f_1g_1h_1}{4v_1}$$

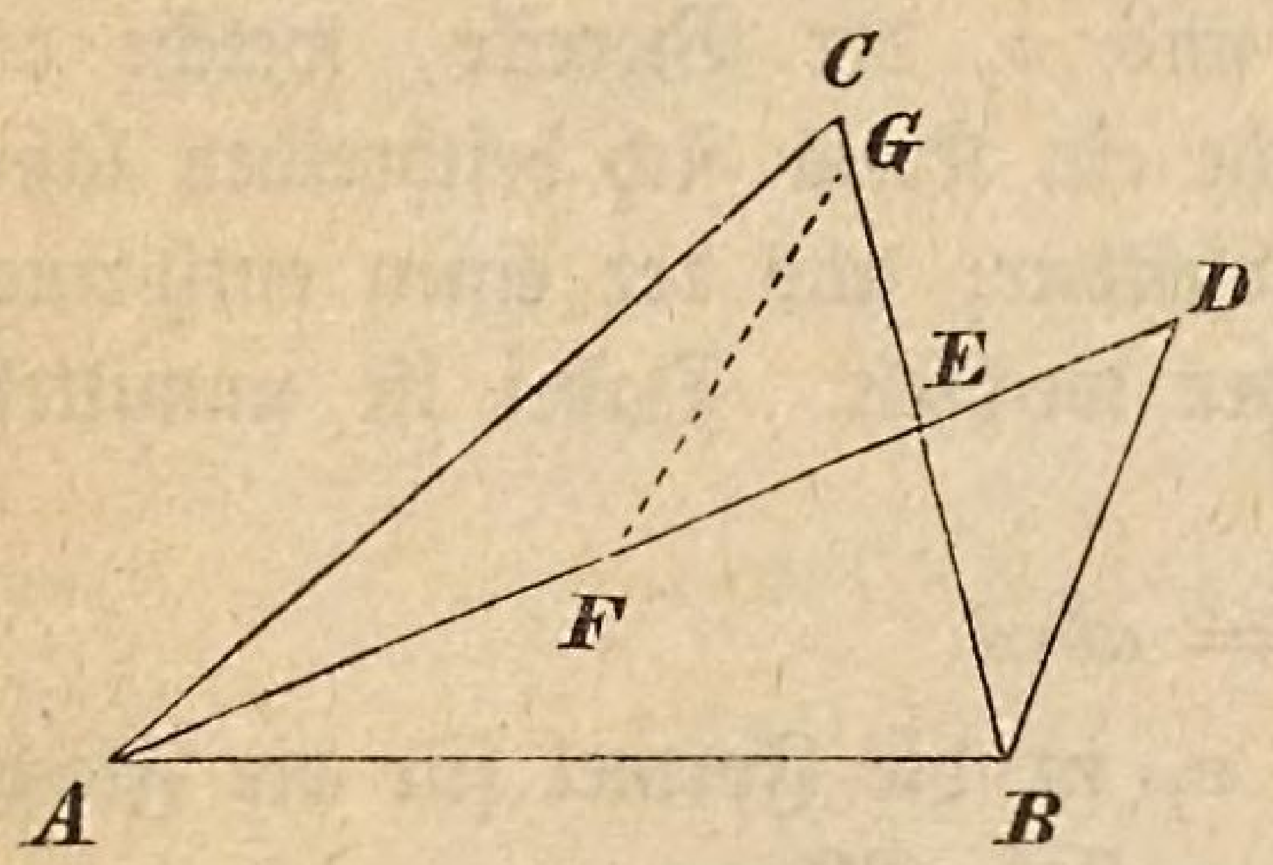
$$r^2 = \frac{(ab - cd)(bc - ad)(ca - bd)}{(-a + b + c - d)(a - b + c - d)(a + b - c - d)(a + b + c + d)}$$

*) Vergl. Möbius in Crelle J. 3 p. 17.

**) Girard 1626. Vergl. Chasles aperçu hist. p. 492 d. Uebers. Ueber die

## §. 15. Perimeter und Fläche der Figuren.*)

**1.** Wenn zwei isoperimetrische Dreiecke (d. h. von gleichem Umfang) gleiche Basen haben, so hat dasjenige die kleinere Fläche, in welchem an der Basis der größte Winkel liegt.**) Ist $AD + DB = AC + CB$, und $DBA$ der größte unter den an $AB$ liegenden Winkeln, o ist die Fläche $ABD < ABC$.




Beweis. Es sei der Winkel $DBA > CBA > BAC$, so ist $BAC > BAD$, sonst läge $C$ im Dreieck $ABD$, und $AC + CB$ wäre kleiner als $AD + DB$ (§. 3, 2) gegen die Voraussetzung. Daher schneiden sich $AD$ und $CB$ innen in $E$, so daß $EB < AE$ (§. 3, 1). Macht man $EF = EB$ in der Richtung $EA$ und $EG = ED$ in der Richtung $EC$, so ist $FG = DB$ (§. 5, 1), folglich $AF + FG + GE + EB = AF + DB + ED + FE = AD + DB = AC + CB$. Nun ist $AC < AF + FC$, folglich $AC + CB < AF + FC + CE + EB$, daher $AF + FG + GE + EB < AF + FC + CE + EB$, $FG + GE < FC + CE$. Hieraus folgt (§. 3, 2), daß das Dreieck $FEG$ ein Theil des Dreiecks $AEC$ ist, folglich $DEB < AEC$, $ABD < ABC$.

**2.** Unter den Dreiecken auf derselben Basis hat das gleichschenkelige bei gleichem Perimeter die größte Fläche, bei gleicher Fläche den kleinsten Perimeter.

---

Radien der Kreise, in welche sich mit mehr gegebenen Seiten Polygone beschreiben lassen, und über die Flächen solcher Polygone hat Möbius (a. a. O.) allgemeine Untersuchungen angestellt.

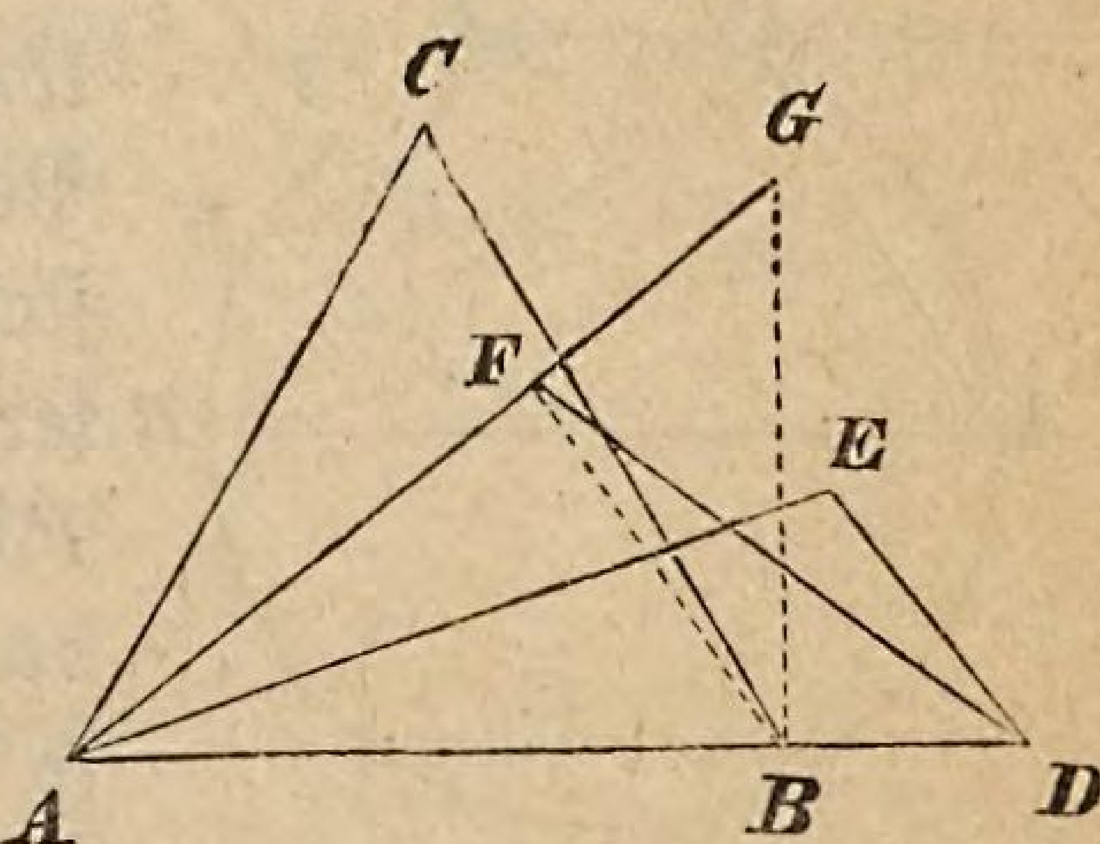
*) Die ersten Sätze über isoperimetrische Figuren, namentlich der Satz vom Kreise und der entsprechende von der Kugel, werden der Pythagoreischen Schule zugeschrieben. Die zugehörige Eigenschaft der Halbkugel wird von Archimedes (Sph. et Cyl. II, 10) bewiesen. Zenodor (früher mit Zenodot verwechselt und ins 5te Jh. vor Chr. gesetzt, wahrscheinlich aber nach Archimedes zu setzen) hatte die Elementarsätze über isoperimetrische Figuren in einer Schrift vereint. Von derselben hat Theon im Commentar zum Almagest (ed. Halma p. 33) einen Auszug gemacht, mit welchem Pappus (Collect. V) vielfach zusammentrifft. Nach diesen Quellen ist Zenodor's Abhandlung deutsch wiedergegeben worden von Nokk im Programm des Freiburger Lyceum 1860. Eine neue Begründung dieser Lehre und beträchtliche Erweiterungen hat L'Huilier de relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum 1782 gegeben. Am gründlichsten ist dieser Gegenstand von Steiner in 2 Abhandlungen Crelle J. 24 p. 93 und 189) beleuchtet worden.

**) Pappus V. 5 und Steiner p. 96.

Beweis. Ist $AD + DB = AC + CB$, so liegt $D$ außerhalb des Dreiecks $ACB$. Ist $AC = CB$, folglich der Winkel $CBA = BAC$, so ist von den Winkeln $DBA$ und $BAD$ einer kleiner, der andere größer als $CBA$, mithin (1) die Fläche $ABD < ABC$.

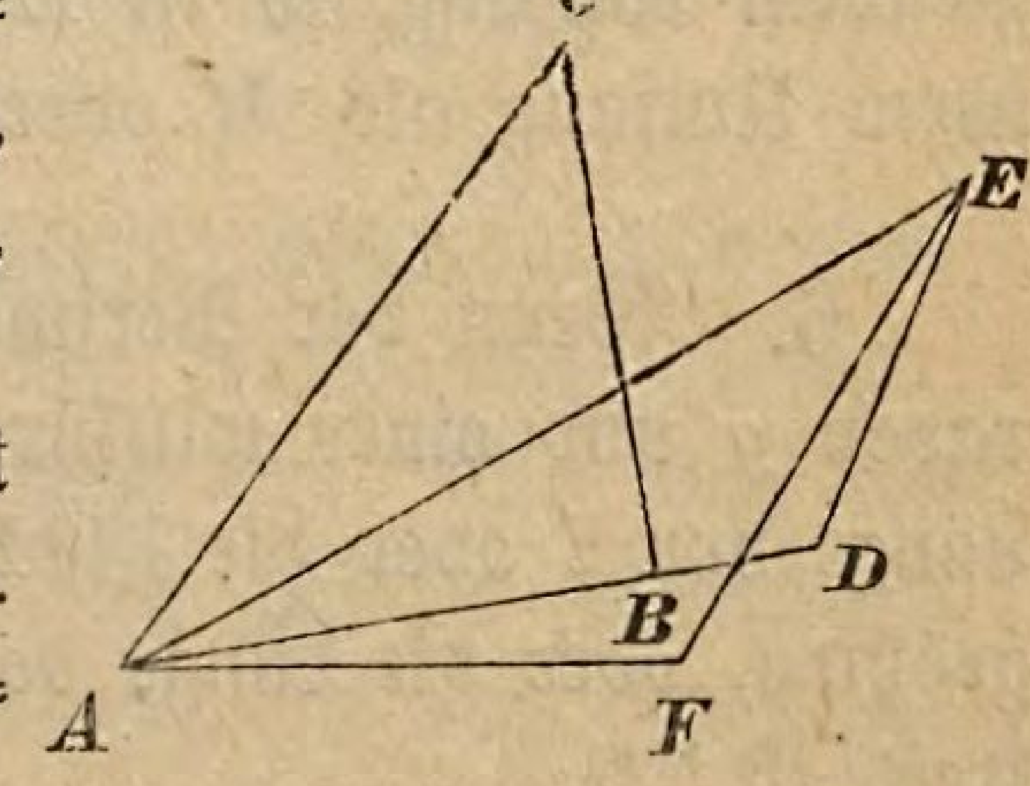
Ist das gleichschenkelige Dreieck $ABC$ dem Dreieck $ABD$ gleich, und das gleichschenkelige Dreieck $ABE$ mit $ABD$ von gleichem Umfang, so ist $ABD < ABE$, folglich $ABC < ABE$, woraus man schließt, daß $ABC$ einen kleinern Perimeter hat als $ABE$ oder $ABD$.

3. Unter den isoperimetrischen Dreiecken hat das gleichseitige die größte Fläche. Unter den gleichen Dreiecken hat das gleichseitige den kleinsten Perimeter.




Beweis. Ist $ABC$ gleichseitig und von gleichem Umfang mit $ADE$, dessen größte Seite $AD$ ist; macht man $ADF$ gleichschenkelig und von gleichem Umfang mit $ADE$, so ist $AF + FD + DA = AC + CB + BA$, $3AF < 3AB$, und der Winkel $FBA < AFB$. Verlängert man $AF$ um $FG$, so daß $FBG$ und $FBD$ gleichen Umfang haben, so ist der Winkel $DBF > BFG$, folglich die Fläche $FBD < FBG$ (1). Nun ist $ADE < ADF$ (2), $ADF < ABG$, $ABG < ABC$ (2); folglich $ADE < ABC$. Die andere Behauptung wird wie in (2) bewiesen mit Hülfe des gleichseitigen Dreiecks, welches mit dem gemeinen Dreieck gleichen Umfang hat.*)

4. Unter den Dreiecken, welche die Summe von 2 Seiten gleich haben, ist dasjenige das größte, in dem diese Seiten einander gleich sind und einen rechten Winkel einschließen.




Beweis. Ist $AB = BC$, $CBA = 90^0$, $AD + DE = AB + BC = AF + FE$, $AF = FE$, so ist $ABC > AFE$ (§. 9, 2), $AFE > ADE$ (2), folglich $ABC > ADE$.

Unter den isoperimetrischen Vierecken hat demnach das Quadrat die größte Fläche. Unter den gleichen Vierecken hat das Quadrat den kleinsten Perimeter.

Unter den isoperimetrischen Kreissectoren hat derjenige die größte

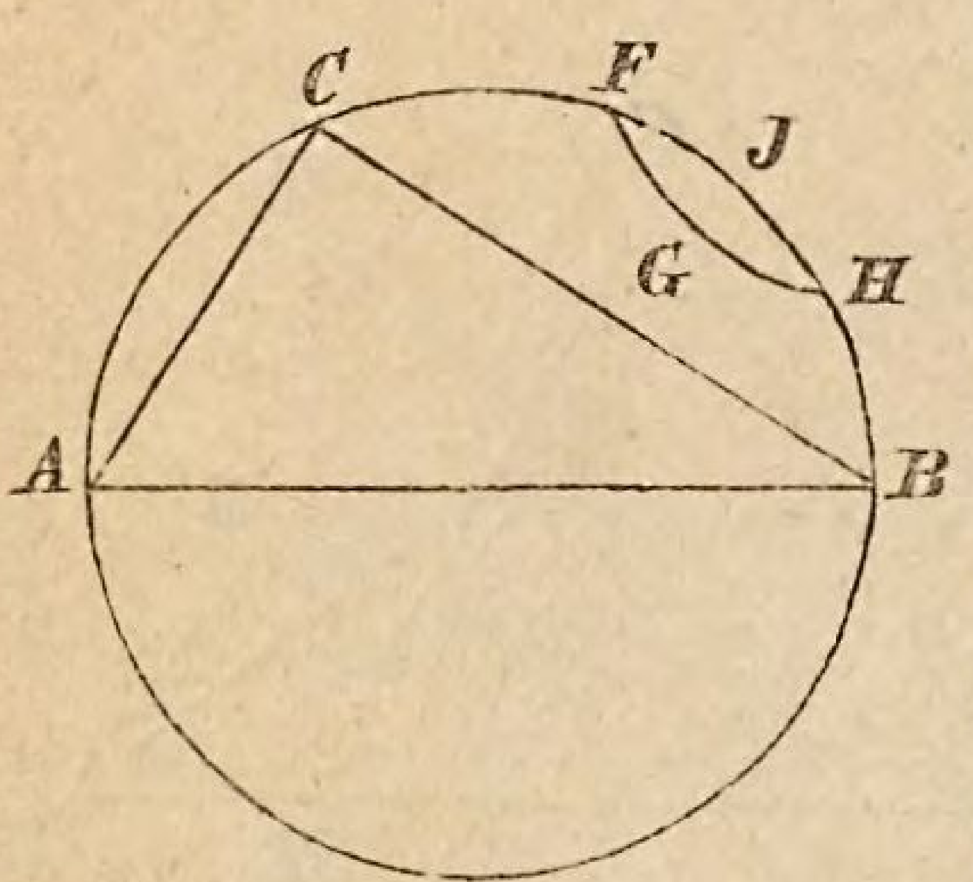
---

*) Steiner p. 99.

Fläche, dessen Bogen dem Diameter gleich ist.*) Denn der Sector ist halb so groß als das rechtwinkelige Dreieck, dessen Catheten so lang sind als der Bogen und der Diameter (§. 10, 4). Bei gegebener Summe der Catheten wird das Dreieck am größten, wenn die Catheten einander gleich werden.

5. Unter allen isoperimetrischen Figuren hat der Kreis die größte Fläche. Unter allen gleichen Figuren hat der Kreis den kleinsten Perimeter.**)

Beweis. Figuren von gegebenem Perimeter können nicht beliebig große Fläche haben, weil jede Diagonale kleiner ist als der halbe Perimeter (§. 3, 2). Die größten unter diesen Figuren können von innen betrachtet nirgends convex erscheinen; sonst könnte man die Figur vergrößern, ohne den Perimeter zu vergrößern, indem man z. B. statt des convexen Theils $FGH$ des Perimeters den gleichen und ähnlichen concaven Theil $FJH$ setzte. Sind $A$ und $B$ Puncte, welche den Perimeter einer größten Figur halbiren, so muß die Gerade $AB$ die Fläche derselben halbiren; sonst könnte man die Figur vergrößern, ohne den Perimeter zu vergrößern, indem man den größern Theil dem andern gleich und ähnlich machte. Sind $C$, $D$, . . andere Puncte des Perimeters, so müssen die Winkel $ACB$, $ADB$, . . recht sein; sonst könnte man ohne Aenderung des Perimeters die Figur vergrößern, indem man diese Winkel recht machte (§. 9, 2). Die Scheitel der rechten Winkel $ACB$, $ADB$, . . liegen auf dem Kreise, dessen Gegenpuncte $A$ und $B$ sind (§. 4, 3). Also kann eine Figur von größter Fläche bei gegebenem Perimeter von einem Kreise nicht verschieden sein.




Ist der Kreis $K$ der Figur $L$ gleich, und $L$ mit dem Kreise $M$ von gleichem Umfang, so ist $L < M$, folglich $K < M$, mithin $K$ von kleinerm Umfang als $M$ oder $L$.

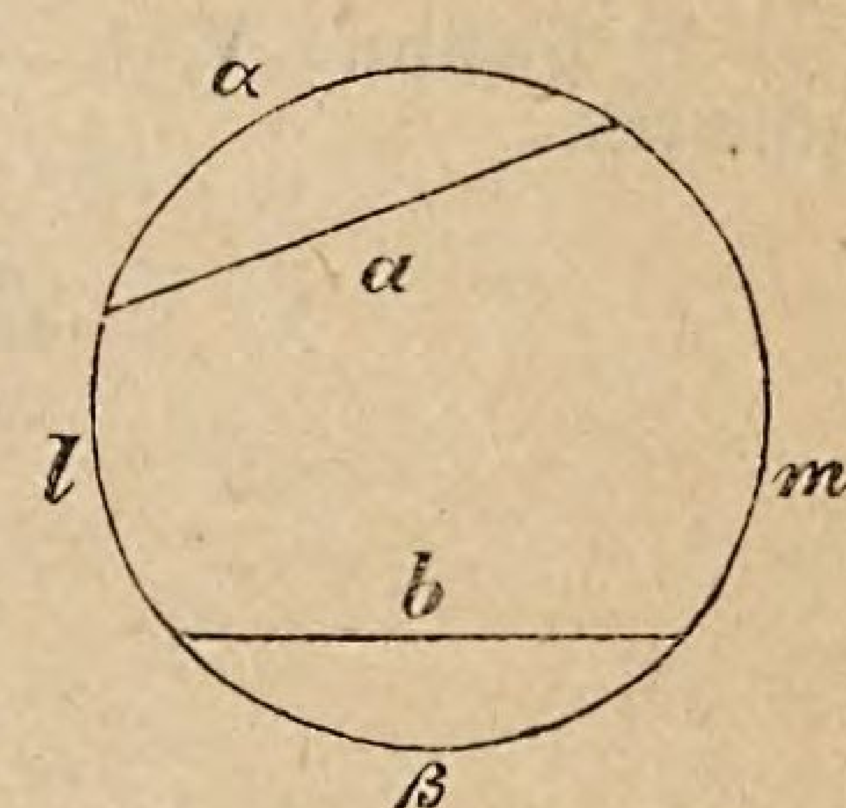
6. Wenn der Perimeter einer Figur aus einer unbegrenzten Geraden $g$ und einer willkürlichen Linie $l$ besteht, und wenn entweder die Länge von $l$ oder die Fläche der Figur gegeben ist, so ist die Fläche am größten, oder die Länge von $l$ am kleinsten, wenn die Figur ein Halbkreis ist.***)

*) Steiner p. 114.
**) Pappus V, 2. Steiner p. 105.
***) Steiner p. 109. Vgl. Pappus V, 17.

Beweis. Der Halbkreis $P$ und die andere mit ihm zu vergleichende Figur $Q$, bei der die angegebenen Bedingungen erfüllt sind, werden durch die gleichen und ähnlichen Figuren ergänzt, welche mit ihnen zur Geraden $g$ symmetrisch liegen (§. 7, 4.) Nun ist bei gleichem Perimeter $2P > 2Q$, bei gleicher Fläche der Perimeter von $2P$ kleiner als der von $2Q$ (5), folglich u. s. w.

7. Wenn der Perimeter einer Figur aus einer Strecke $a$ und einer willkürlichen Linie $l$ besteht, und wenn entweder die Länge von $l$ oder die Fläche der Figur gegeben ist, so ist die Fläche am größten, oder der Perimeter am kleinsten, wenn die Figur ein Kreissegment ist.

Beweis. Das von $a$ und $l$ umschlossene Kreissegment $P$ werde durch das Kreissegment $a\alpha$ zum Kreise $K$ ergänzt, und eine andere von $a$ und $l$ umschlossene Figur durch $Q$ bezeichnet. Nun ist bei gleichem Perimeter $K > Q + a\alpha$, bei gleicher Fläche der Perimeter von $K$ kleiner als der von $Q + a\alpha$ (5). Durch Subtraction von $a\alpha$ findet man $P < Q$ u. s. w.*)




Durch Addition von Kreissegmenten erkennt man ebenso, daß unter allen Figuren, deren Perimeter aus zwei Strecken $a$, $b$, und einer oder zwei willkürlichen Linien $l$, $m$ besteht, das Kreissegment die größte Fläche oder den kleinsten Perimeter hat, je nachdem der Perimeter oder die Fläche der Figuren gegeben ist.

Ebenso schließt man, daß unter den aus gegebenen Seiten gebildeten Polygonen diejenigen, welche Kreisen eingeschrieben sind und deren Perimeter sich selbst nicht schneiden, größte Flächen umspannen.**)

8. Unter den Polygonen von derselben Seitenzahl hat das gemeine reguläre bei gleichem Perimeter die größte Fläche, bei gleicher Fläche den kleinsten Perimeter.***)

Beweis. Ein Polygon kann in ein größeres Polygon von derselben Seitenzahl und von demselben Perimeter verwandelt werden, wenn zwei aufeinanderfolgende Seiten ungleich sind (2). Also muß das größte unter den isoperimetrischen Polygonen von gleicher Seitenzahl gleichseitig sein. Das größte unter den Polygonen, die von gegebenen

---

*) Steiner p. 110.
**) Moula 1737 Comm. Petrop. 9 p. 138 und Cramer Mém. de Berlin 1752 p. 283. Vergl. die Einleitung zu L'Huilier's Werk.
***) Pappus V, 10.

Seiten umschlossen werden können, ist dasjenige, welchem ein Kreis umgeschrieben werden kann (7).

Die andere Behauptung wird wie oben (2) bewiesen.

9. Die Flächen der isoperimetrischen regulären Polygone vom Dreieck an bis zum Kreis bilden eine steigende Reihe; die Perimeter der gleichen regulären Polygone vom Dreieck an bis zum Kreis bilden eine fallende Reihe.*)

Beweis. Das reguläre $n$Eck kann als irreguläres $(n+1)$Eck betrachtet werden, in welchem ein Winkel $180^0$ beträgt. Das irreguläre $(n+1)$Eck ist kleiner als das isoperimetrische reguläre $(n+1)$Eck (8), u. s. w.

---

*) Pappus V, 1. Steiner p. 112. Der Letztere hat den einfachen Beweis gefunden.

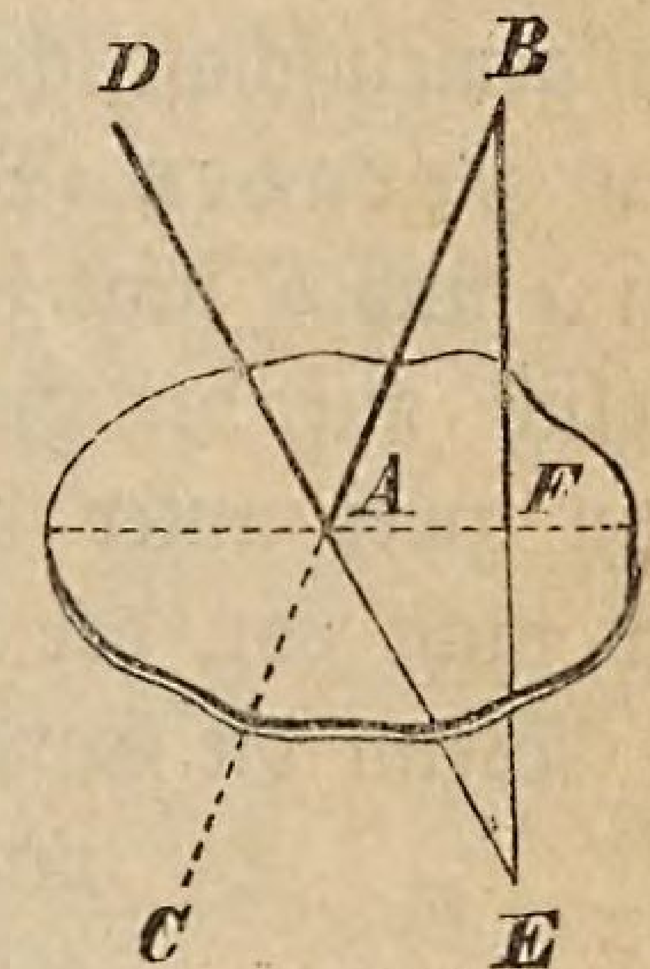
# Fünftes Buch.

# Stereometrie.

## §. 1. Durchschnitt von Ebenen und Geraden.

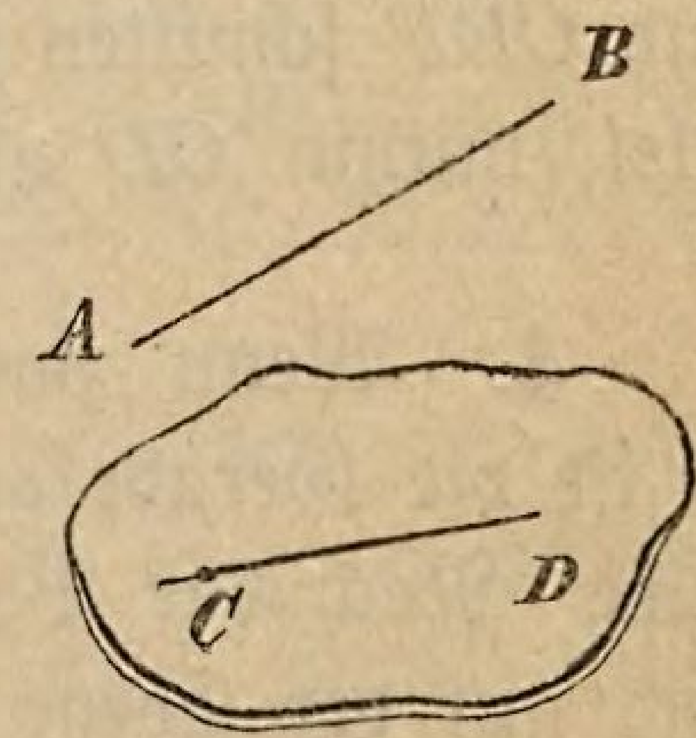
1. Wenn zwei Ebenen einen Punct gemein haben, so haben sie eine durch den gemeinschaftlichen Punct gehende Gerade gemein.*)

Beweis. Durch den gemeinschaftlichen Punct $A$ der Ebenen werden auf der ersten Ebene die Geraden $BC$, $DE$ gezogen, welche die zweite Ebene schneiden, weil sie die durch $A$ gehenden Geraden der zweiten Ebene schneiden (Plan. §. 1, 3). Durch die Puncte $B$ und $E$, welche auf verschiedenen Seiten der zweiten Ebene liegen, ist eine Gerade bestimmt, welche die zweite Ebene in $F$ schneidet. Weil die Gerade $BE$ mit der ersten Ebene zwei Puncte gemein hat, so liegt sie auf der ersten Ebene (Planim. §. 1, 4). Daher ist $F$ ein gemeinschaftlicher Punct, und die Gerade $AF$ eine gemeinschaftliche Gerade der beiden Ebenen, in der sie sich schneiden. Außerhalb der Geraden $AF$ können die beiden Ebenen einen Punct nicht gemein haben, ohne ganz zusammenzufallen.




2. Eine Gerade und eine Ebene haben einen Punct gemein, in dem sie im Allgemeinen sich schneiden. Wenn die Gerade mit einer Geraden der Ebene parallel ist, so ist sie mit der Ebene parallel d. h. sie schneidet sie nicht und hat mit ihr einen unendlich fernen Punct gemein, ihre Richtung ist in der Ebene enthalten.

Beweis. Durch die Gerade $AB$ und einen beliebigen Punct $C$ der Ebene ist eine Ebene bestimmt (Planim. 1, 4), welche die gegebene Ebene in der Geraden $CD$ schneidet (1). Die Geraden $AB$ und $CD$ der Ebene $ABC$ haben im Allgemeinen einen Punct gemein, in dem sie sich schneiden, in dem also auch die gegebene Ebene von der Geraden



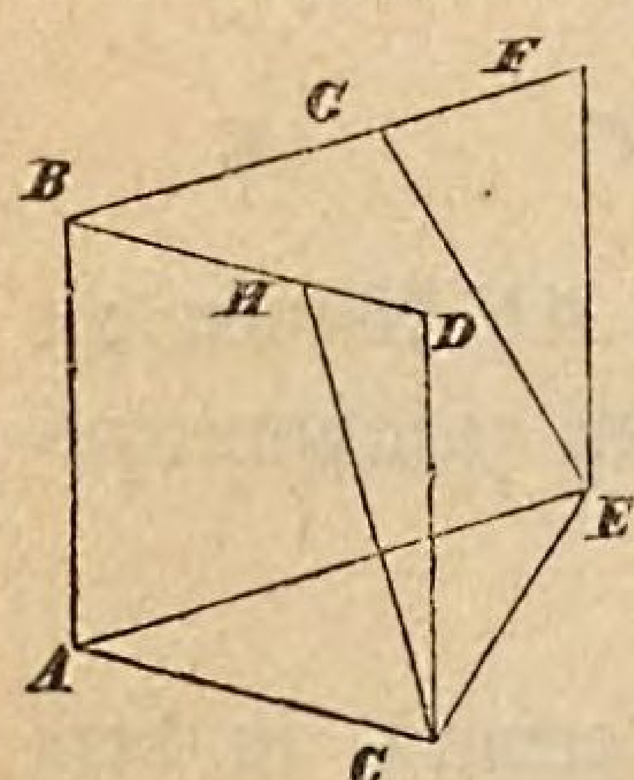

*) Eucl. XI, 3. Der obige genauere Ausdruck dieses Fundamentalsatzes findet sich in Staudt's Geom. d. Lage 20.

*AB* geschnitten wird. Außer diesem Punct kann die Gerade mit der Ebene einen andern Punct nicht gemein haben, ohne ganz mit ihr zusammenzufallen.

Wenn die Gerade *AB* irgend eine Gerade *CD* der Ebene, die zugleich der Ebene *ABC* angehört, nicht schneidet oder mit ihr parallel ist, so kann sie mit der Ebene einen endlich fernen Punct nicht gemein haben, weil *AB* mit *CD* keinen endlich fernen Punct gemein hat, und die Ebene *ABC* mit der gegebenen Ebene keinen Punct neben *CD* gemein hat. Der gemeinschaftliche unendlich ferne Punct von *AB* und *CD*, ihre Richtung (Planim. §. 2) ist das Gemeinschaftliche der Geraden und der Ebene.

3. Wenn von den drei Geraden *a*, *b*, *c* je zwei auf einer Ebene liegen, so haben sie einen (endlich oder unendlich fernen) Punct gemein, den gemeinschaftlichen Punct der drei Ebenen, und bilden einen Büschel von Geraden (Planim. §. 14, 8). Denn ein gemeinschaftlicher Punct von *a* und *b* liegt sowohl auf der Ebene *ac*, als auch auf der Ebene *bc*, folglich auf der Geraden *c*, welche diese Ebenen gemein haben. Und wenn zwei unter den drei Geraden sich nicht schneiden, so können sie auch nicht von der dritten Geraden geschnitten werden.

Wenn die Geraden *AB* und *CD* parallel sind und die Ebenen *ABE* und *CDE* in der Geraden *EF* sich schneiden, so ist *EF* mit *AB* und *CD* parallel, jede Gerade *EG* des Winkels *FEA* schneidet *AB*. Denn die Ebene *GEC* schneidet die Ebene *DCA* in einer Geraden *CH* des Winkels *DCA*, von welcher *AB* geschnitten wird (Planim. §. 2, 6). Also wird *AB* auch von *EG* geschnitten.




Wenn von den Geraden *CD*, *EF* jede mit der Geraden *AB* parallel ist, so sind auch *CD* und *EF* parallel.*) Gesetzt, die Ebenen *ABC* und *CEF* schnitten sich in der Geraden *CD'*, so wäre *CD'* mit *AB* parallel, mithin *CD* nicht mit *AB* parallel gegen die Voraussetzung.

4. Wenn zwei Ebenen $\alpha$, $\beta$ mit einer Geraden *c* parallel sind, so ist die Gerade $\alpha\beta$, welche sie gemein haben, mit der Geraden *c* parallel. Nach der Voraussetzung giebt es auf der Ebene $\alpha$ eine Gerade *a* und auf der Ebene $\beta$ eine Gerade *b*, die beide mit *c* parallel sind (2). Daher sind die Geraden *a* und *b* parallel (3), und von den drei Ge-

*) Eucl. XI, 9 hat den Beweis mit Hülfe einer normalen Ebene geführt. Bolyai und Lobatschewsky haben gezeigt, daß dieser Satz unabhängig ist von der Summe der Winkel eines geradlinigen Dreiecks.

raden $a$, $b$, $\alpha\beta$ liegen je zwei auf einer Ebene, folglich ist $\alpha\beta$ mit $a$, $b$ und $c$ parallel.

Nach der Annahme, welche der gemeinen Geometrie zu Grunde liegt (Planim. §. 2, 7), schließt man: Wenn von zwei Ebenen $\alpha$, $\beta$ jede mit zwei nicht parallelen Geraden $c$, $d$ parallel ist (wenn sie zwei verschiedene Richtungen gemein haben), so sind sie parallel, d. h. sie schneiden sich nicht, sie haben eine unendlich ferne Gerade gemein und einerlei Stellung.*) Hätten die Ebenen eine endlich ferne Gerade gemein, so müßte dieselbe sowohl mit $c$ als auch mit $d$ parallel sein. Also wären $c$ und $d$ parallel, gegen die Voraussetzung.

In der gemeinen Geometrie wird die Linie der unendlich fernen Puncte einer Ebene als Gerade vorgestellt, weil mit ihr jede Gerade derselben Ebene nur einen (unendlich fernen) Punct gemein hat. Wie von dem unendlich fernen Punct einer Geraden nicht die Entfernung, wohl aber die Richtung, in der er liegt, sich angeben läßt, so kann von der unendlich fernen Geraden einer Ebene nicht die Richtung, sondern nur die Stellung, in der sie sich befindet, angegeben werden. Parallele Ebenen haben einerlei Stellung, gleichwie parallele Gerade einerlei Richtung haben.

Unter der Voraussetzung, daß eine Gerade zwei getrennte unendlich ferne Puncte hat, liegt die gemeinschaftliche Gerade der Ebenen, die einen unendlich fernen Punct der Geraden $c$ und einen unendlich fernen Punct der Geraden $d$ gemein haben, in endlicher Ferne und ist einerseits mit $c$, andrerseits mit $d$ parallel.

5. Wenn zwei Ebenen $\alpha$, $\beta$ parallel sind und mit einer dritten Ebene $\gamma$ je einen Punct gemein haben, so werden sie von ihr in parallelen Geraden geschnitten. Denn die Durchschnitte (1) $\alpha\gamma$ und $\beta\gamma$ liegen auf der Ebene $\gamma$ und haben einen endlich fernen Punct eben so wenig gemein, als die Ebenen $\alpha$, $\beta$.

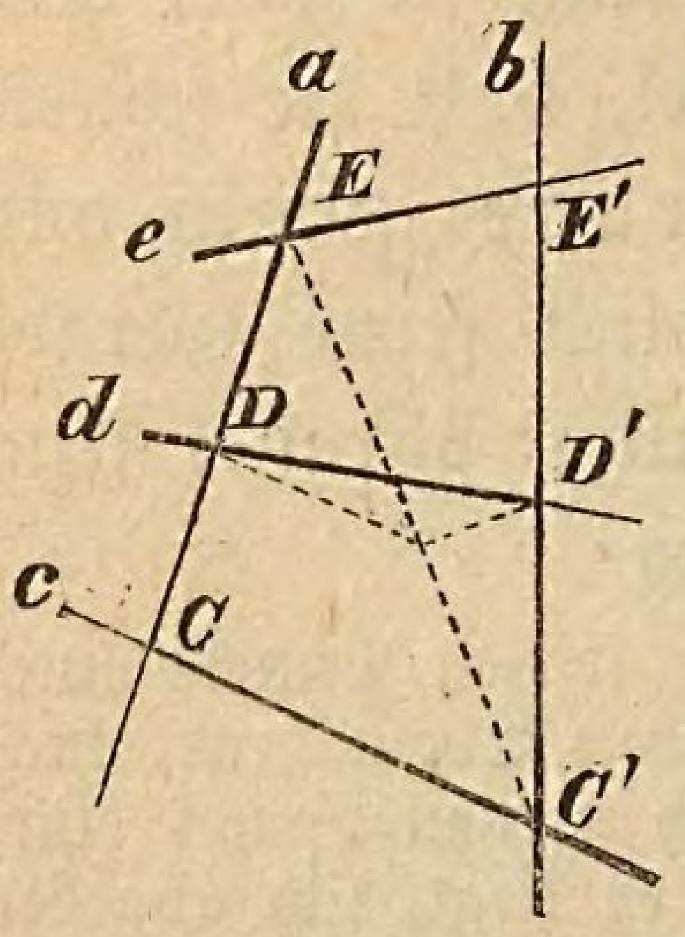
Wenn zwei Ebenen $\alpha$, $\beta$ parallel sind, und eine derselben von einer Geraden $c$ oder von einer Ebene $\gamma$ geschnitten wird, so wird auch die andere von der Geraden oder von der Ebene geschnitten. Wird $\beta$ von der Geraden $c$ geschnitten, und ist $D$ ein Punct von $\alpha$, der nicht zugleich auf $c$ liegt, so werden $\alpha$ und $\beta$ von der Ebene $Dc$ in parallelen Geraden geschnitten. Die Gerade $c$, welche eine derselben, die auf $\beta$ liegende schneidet, schneidet auch die andere auf $\alpha$ liegende, mithin die Ebene $\alpha$ (Planim. §. 2, 7). Wenn $\beta$ von der Ebene $\gamma$ geschnitten wird, und $c$ eine Gerade von $\gamma$ ist, welche die Ebene $\beta$ schneidet, so wird $\alpha$ von $c$, also auch von $\gamma$ geschnitten.

Wenn die Ebenen $\alpha$, $\beta$ parallel sind, und eine derselben mit einer Geraden $c$ oder mit einer Ebene $\gamma$ parallel ist, so ist auch die andere mit der Geraden oder mit der Ebene parallel. Wird $\alpha$ von $c$ nicht geschnitten, so wird $\beta$ von $c$ nicht geschnitten, u. s. w.

Wenn 3 Gerade $a$, $b$, $c$ einen Punct gemein haben und mit einer

*) Eucl. XI, 15. Die unendlich ferne Gerade ist von Desargues mit dem Büschel von Ebenen (s. Planim. §. 14, 8), neuerlich von Poncelet (propr. proj. 107) eingeführt worden. Den Ausdruck „Stellung einer Ebene" verdankt man Staudt Geom. d. Lage 40.

Ebene $\delta$ parallel sind, so liegen sie auf einer Ebene, die mit der gegebenen Ebene parallel ist. Denn die Ebene der Geraden $a$, $b$ ist mit $\delta$ parallel (4). Würde die Ebene $ab$ von der Geraden $c$ geschnitten, so würde auch $\delta$ von $c$ geschnitten, gegen die Voraussetzung.




Zwei Gerade $a$, $b$ werden von drei parallelen Ebenen $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ oder von drei Geraden $c$, $d$, $e$ die mit einer Ebene parallel sind, nach demselben Verhältniß geschnitten, die eine in $C$, $D$, $E$, die andere in $C'$, $D'$, $E'$, so daß*)

$$CD : DE : CE = C'D' : D'E' : C'E'$$

Zieht man nämlich die Gerade $C'E$, welche von $\delta$ in $D''$ geschnitten wird, so sind $CC'$ und $DD''$, $D''D'$ und $EE'$ parallel. Hieraus ergiebt sich die Behauptung nach Planim. §. 8, 2.

6. Drei Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ haben einen Punct gemein, in dem die Geraden, welche sie paarweise gemein haben, sich schneiden. Denn die Gerade, welche zwei der Ebenen gemein haben, hat mit der dritten Ebene einen Punct gemein, der den drei Ebenen angehört.

Wenn die drei Ebenen mit einer Geraden parallel sind (einen unendlich fernen Punct, eine Richtung gemein haben), so sind die Geraden, welche sie paarweise gemein haben, parallel (4).

Wenn von den drei Ebenen zwei parallel sind, so ist von den parallelen Geraden, die sie paarweise gemein haben, eine unendlich fern (4 und 5).

Wenn die drei Ebenen zwei Puncte gemein haben, so haben sie eine Gerade gemein, in der sie sich schneiden, und bilden einen Büschel von Ebenen (Planim. §. 14, 8). Diese Gerade ist unendlich fern, wenn die drei Ebenen parallel sind.

7. Zwei Gerade $a$, $b$, welche nicht auf einer Ebene liegen, haben keinen Punct gemein; auch ihre unendlich fernen Puncte sind verschieden. Durch jeden beliebigen Punct $C$ des Raumes geht eine Ebene, die mit den beiden Geraden parallel ist. Man findet dieselbe, indem man durch den Punct $C$ die Geraden zieht, welche einzeln mit $a$ und $b$ parallel sind.

Durch jeden Punct $C$ des Raumes geht auch eine Gerade, welche mit jeder von beiden Geraden $a$, $b$ einen Punct gemein hat. Denn die Ebenen $Ca$ und $Cb$ schneiden sich in einer Geraden $CD$ (1), die sowohl

---

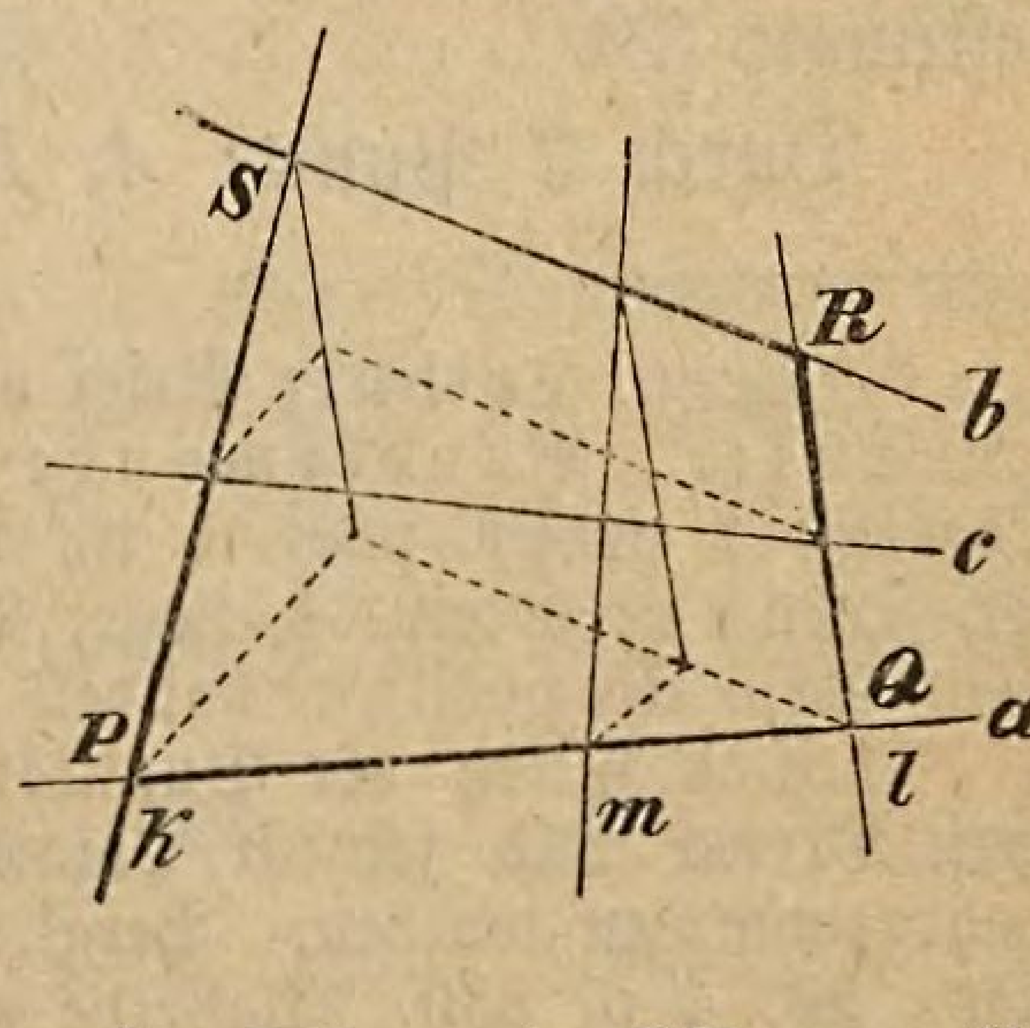
*) Eucl. XI, 16. 17.

mit $a$ als auch mit $b$ auf einer Ebene liegt, folglich entweder beide zugleich schneidet, oder eine schneidet und mit der andern parallel ist. Ist $C$ unendlich fern, so haben die Ebenen $Ca$ und $Cb$ bestimmte Stellungen; ihre gemeinschaftliche Gerade ist die Gerade von bestimmter Richtung, welche mit $a$ und $b$ je einen Punct gemein hat.

Wenn sowohl $a$ als $b$ mit den Geraden $k$ und $l$ je einen Punct gemein haben, so können $k$ und $l$ nicht auf einer Ebene liegen; sonst müßten $a$ und $b$ auf derselben Ebene liegen.*)

8. Drei Gerade $a$, $b$, $c$, von denen je zwei nicht auf einer Ebene liegen, können mit unendlich vielen Geraden $k$, $l$, $m$, . . je einen Punct gemein haben; denn durch jeden Punct von $a$ geht eine Gerade, die mit $a$, $b$, $c$ je einen Punct gemein hat (7). Je zwei unter den Geraden $k$, $l$, $m$, . . liegen nicht auf einer Ebene; je drei unter denselben Geraden haben aber nicht nur mit $a$, $b$, $c$, sondern noch mit unendlich viel andern Geraden je einen Punct gemein. Beide Serien von Geraden $a$, $b$, $c$, . . und $k$, $l$, $m$, . . liegen auf einer durch irgend drei Gerade der einen oder der andern Serie bestimmten geradlinigen Fläche**), die den Namen **geradliniges Hyperboloid** (hyperbolisches Hyperboloid, à une nappe) erhalten hat.

Wenn eine Gerade der Serie $a$, $b$, $c$, . . unendlich fern ist, so haben die Geraden $k$, $l$, $m$, . . mit einer Ebene $\eta$, auf welcher die unendlich ferne Gerade liegt, je einen unendlich fernen Punct gemein und sind mit ihr parallel. Auf jeder Ebene, die mit $\eta$ parallel ist, liegt eine Gerade der Serie $k$, $l$, $m$, . ., also auch auf der unendlich fernen Ebene, mithin ist eine Gerade der Serie $k$, $l$, $m$, . . unendlich fern, folglich sind auch die Geraden der Serie $a$, $b$, $c$, . . mit einer Ebene $\vartheta$ parallel. Die Fläche, auf der beide Serien von Geraden liegen, heißt ein **geradliniges** (hyperbolisches) **Paraboloid**; sie ist durch drei Gerade bestimmt, von denen je zwei nicht auf einer Ebene liegen, und die mit einer Ebene parallel sind. Am einfachsten ist dieselbe Fläche durch ein unebenes (gauche) Viereck $PQRS$ bestimmt; jede Ebene, die mit $PQ$ und $RS$ parallel ist, schneidet $QR$ und $SP$ in Puncten, durch welche eine Gerade der Serie $PQ$, $RS$, . . geht; jede Ebene, die mit $QR$ und $SP$ parallel




*) Vergl. Steiner Crelle J. 2 p. 268.
**) Der Beweis dieser Eigenschaft beruht auf metrischen Beziehungen. Vergl. unten Trigon. §. 7, 16.

ist, schneidet $PQ$ und $RS$ in Puncten, durch welche eine Gerade der Serie $QR$, $SP$, . . geht.

9. In der neuern Geometrie hat man mehr und mehr die Sätze, welche nur die gegenseitige Lage der Figuren und ihrer Elemente betreffen, von den Sätzen unterschieden, welche die Größe derselben und quantitative Beziehungen von Raumgrößen in Betracht nehmen. Die Sätze der ersten Art handeln von graphischen (descriptiven) Eigenschaften, die Sätze der andern Art von metrischen Relationen der räumlichen Objecte. Man kann deshalb die gesammte Geometrie auch in zwei Gebiete trennen, in eine Geometrie der Lage (situs, situation), und eine Geometrie des Maßes.*)

Schon die ersten graphischen Sätze, welche die Lage von Puncten, Geraden, Ebenen betreffen, lassen eine gewisse paarweise Zusammengehörigkeit, ein Gesetz der Dualität (Reciprocität, Polarität) erkennen, von der Art daß aus einem Satze der ihm zugeordnete (reciproke, polare) Satz entsteht, wenn Puncte und Ebenen mit einander vertauscht werden.**) Nämlich:

Durch 2 Gerade $a$, $b$, die auf einer Ebene liegen, ist ein Punct $ab$ bestimmt. Durch 2 Gerade $a$, $b$, die einen Punct gemein haben, ist eine Ebene $ab$ bestimmt (Planim. §. 1 und 2).

Durch 2 Puncte $A$, $B$ ist eine Gerade $AB$ bestimmt. Durch 2 Ebenen $\alpha$, $\beta$ ist eine Gerade $\alpha\beta$ bestimmt.

Durch 2 Richtungen ist eine Stellung, durch 2 Stellungen eine Richtung bestimmt (4).

Durch eine Gerade $a$ und einen Punct $B$, der nicht auf der Geraden liegt, ist eine Ebene $aB$ bestimmt. Durch eine Gerade $a$ und eine Ebene $\beta$, welche die Gerade nicht enthält, ist ein Punct $a\beta$ bebestimmt (2).

Durch 3 Puncte $A$, $B$, $C$, die nicht auf einer Geraden liegen, ist

---

*) Vergl. Leibniz Brief an Huygens 1679 Sept. 8, mehrere Abhandlungen von Euler, Vandermonde u. A. (Reuß Repert. Comm. p. 33), insbesondere Poncelet propr. proj. 5 ff., der die Ausdrücke „graphisch und metrisch" gebraucht hat, Staudt Geom. d. Lage, Chasles Aperçu hist. p. 207 d. Uebers. Carnot's Géométrie de position handelt nur von metrischen Relationen.

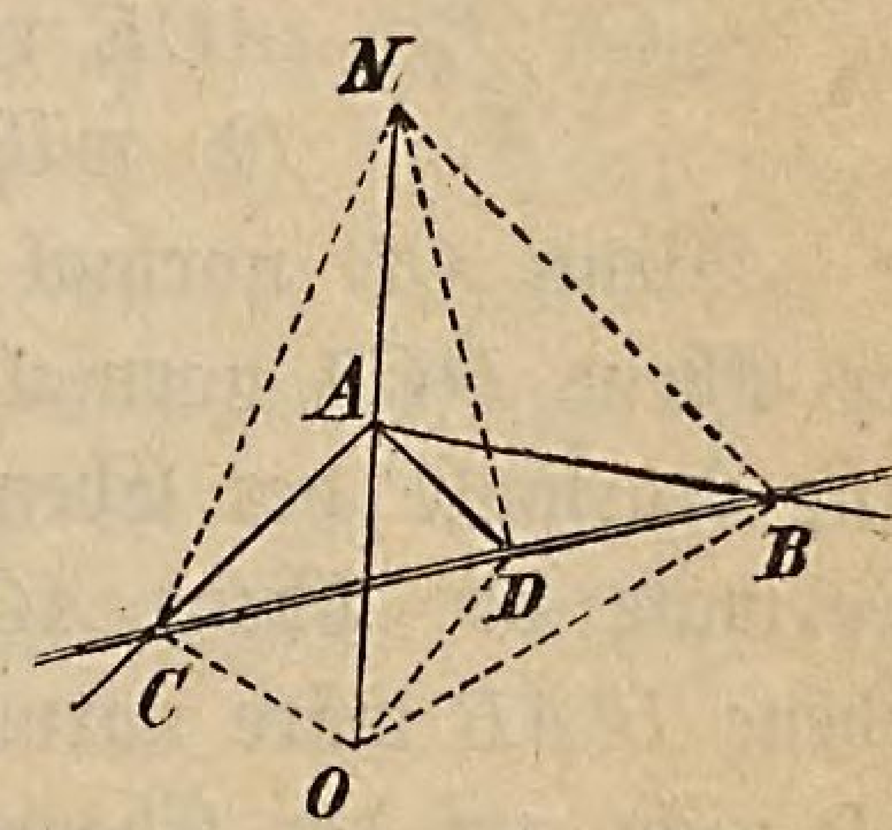
**) Das Gesetz der Dualität ist zuerst in metrischer Beziehung bei dem sphärischen Dreieck und seinem Polardreieck (§. 4) von Vieta, Lansberg, Snellius wahrgenommen worden. Vergl. Chasles Ap. hist. p. 52 d. Uebers. und Klügel math. W. 4 p. 850. Dasselbe wurde umfassend in graphischer Beziehung bei planen und räumlichen Figuren erst im Anfang des 19ten Jahrhunderts erkannt. Wesentlich war dabei die Einführung der Benennungen „Pol einer Geraden" durch Servois 1811, „Polare eines Puncts" und „Dualität" durch Gergonne 1813, „Reciprocität" durch Monge, Poncelet und Plücker. Vergl. Chasles Ap. hist. p. 398 und 405 d. Uebers. Die obigen Dualisirungen finden sich bei Gergonne (Ann. 16 p. 209) und Staudt Geom. d. Lage 66.

eine Ebene $ABC$ bestimmt. Durch 3 Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, die nicht eine Gerade enthalten, ist ein Punct $\alpha\beta\gamma$ bestimmt (6).

Bei diesen Sätzen ist es gleichgültig, ob die Puncte, Geraden, Ebenen in endlicher oder unendlicher Ferne liegen.

## §. 2. Winkel und Abstände von Ebenen und Geraden.

**1.** Wenn eine Gerade zu zwei sich schneidenden Geraden einer Ebene normal ist, so ist sie eine Normale der Ebene, d. h. zu jeder Geraden der Ebene normal.*) Wenn die Winkel $NAB$, $NAC$ recht sind, und die Gerade $AD$ auf der Ebene $ABC$ liegt, so ist auch der Winkel $NAD$ recht und $AN$ eine Normale der Ebene $ABC$.




Beweis. Man zieht auf der Ebene $ABC$ durch je einen beliebigen Punct der Schenkel $AB$ und $AC$ des Winkels, in welchem $AD$ liegt, die Gerade $BC$, welche $AD$ in $D$ schneidet. Auf der die Geraden $AB$, $AC$ normal schneidenden Geraden theilt man entgegengesetzt gleiche Strecken ab, $AN$ und $AO$. Dann sind (Planim. §. 5)
die Dreiecke $NAB$ und $OAB$ gleich und ähnlich, d. h. $NB = OB$;
die Dreiecke $NAC$ und $OAC$ gleich und ähnlich, d. h. $NC = OC$;
die Dreiecke $NBC$ und $OBC$ gleich und ähnlich, d. h. W. $NBC = OBC$;
die Dreiecke $NBD$ und $OBD$ gleich und ähnlich, d. h. $ND = OD$;
die Dreiecke $NAD$ und $OAD$ gleich und ähnlich, d. h. W. $NAD = DAO$.
Demnach ist der Winkel $NAD$ recht.

Anmerkung. Wenn die Ebenen $\beta$, $\gamma$ zu einer Geraden $a$ normal stehn, so können sie sich nicht schneiden. Eucl. XI, 14. Denn eine beliebige Ebene $\delta$, welche die Gerade $a$ enthält, schneidet die Ebenen $\beta$, $\gamma$ in Geraden, die zu der Geraden $a$ normal sind und sich nicht schneiden.

**2.** Wenn drei Gerade $AB$, $AC$, $AD$ eine Gerade $AN$ in demselben Punct normal schneiden, so liegen sie auf einer Ebene. Eucl. XI, 5

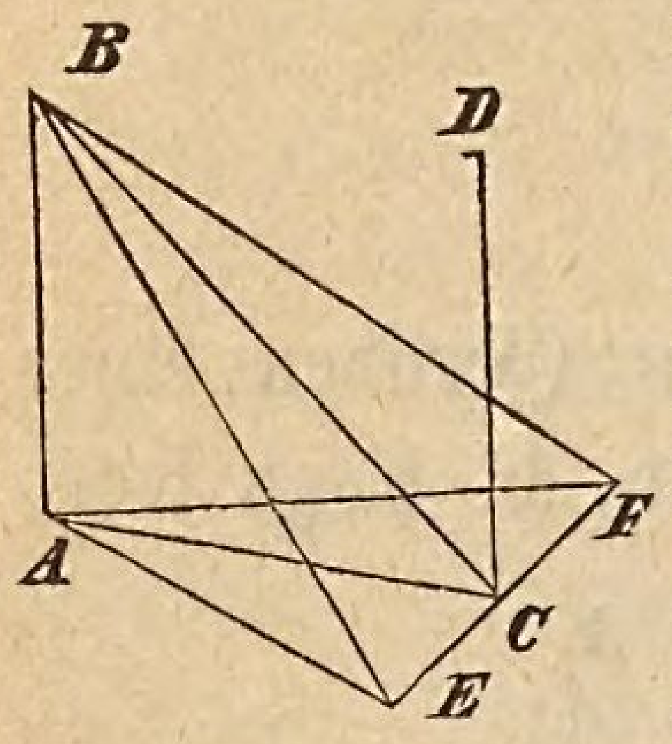
---

*) Eucl. XI, 4. Der Euclid'sche Beweis ist weitläufiger als der hier gegebene, der in einer Abhandlung von Crelle (Crelle J. 45 p. 35) vorkommt. Ein anderer Beweis ist von Legendre (géom. V, 4) auf Sätze gegründet worden, die diesem Gebiete von Betrachtungen fern stehn.

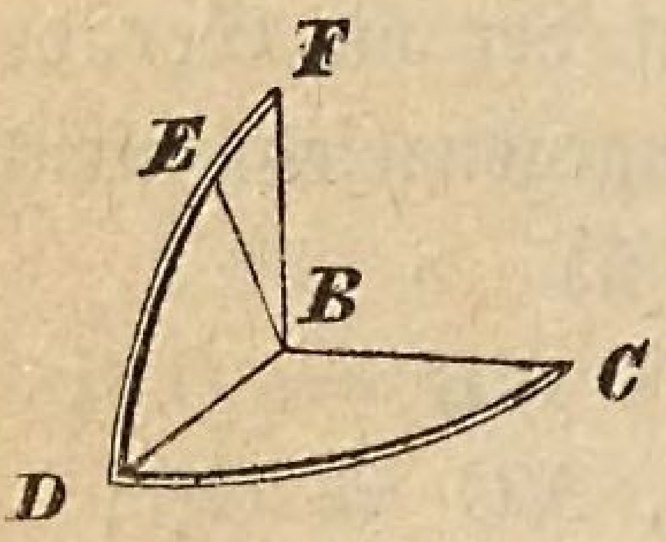
Läge $AD$ nicht auf $BAC$, so schnitten sich die Ebenen $NAD$ und $BAC$ in der Geraden $AE$, und der Winkel $NAE$ wäre recht (1), folglich $NAD$ nicht recht gegen die Voraussetzung.

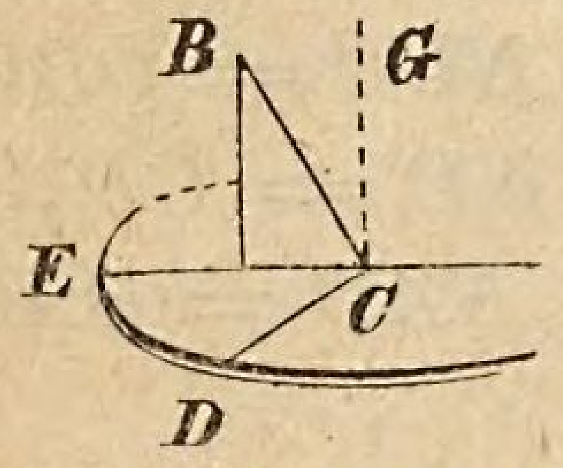
Wenn ein rechter Winkel um einen seiner Schenkel als Axe umgedreht wird, so beschreibt der andere Schenkel eine Ebene.

3. Zwei Normalen einer Ebene liegen auf einer Ebene und schneiden sich nicht. Eucl. XI, 6. Zieht man auf der Ebene, deren Normalen $AB$ und $CD$ sind, die Gerade $ECF$ normal zu der Geraden $AC$, und macht man $EC = CF$, so ist $ECA \cong FCA$ d. h. $EA = FA$, folglich $BAE \cong BAF$ d. h. $EB = FB$, folglich $ECB \cong FCB$ d. h. der Winkel $BCE$ recht. Zugleich sind die Winkel $DCE$, $ACE$ recht; also liegen $CB$, $CD$, $CA$ auf einer Ebene (2) während die Winkel $DCA$ und $CAB$ recht sind.




Wenn $CD$ normal zu der Ebene $ACE$, und die Gerade $AB$ auf der Ebene $DCA$ normal zu der Geraden $CA$ gezogen wird, so ist $AB$ eine Normale der Ebene $ACE$. Eucl. XI, 8. Gesetzt, $AB'$ wäre die Normale der Ebene $ACE$, so läge $AB'$ auf der Ebene $DCA$, und die Ebene $B'AB$ wäre normal zu der Geraden $CA$; also läge die Gerade $AB$ nicht auf der Ebene $DCA$ gegen die Voraussetzung.

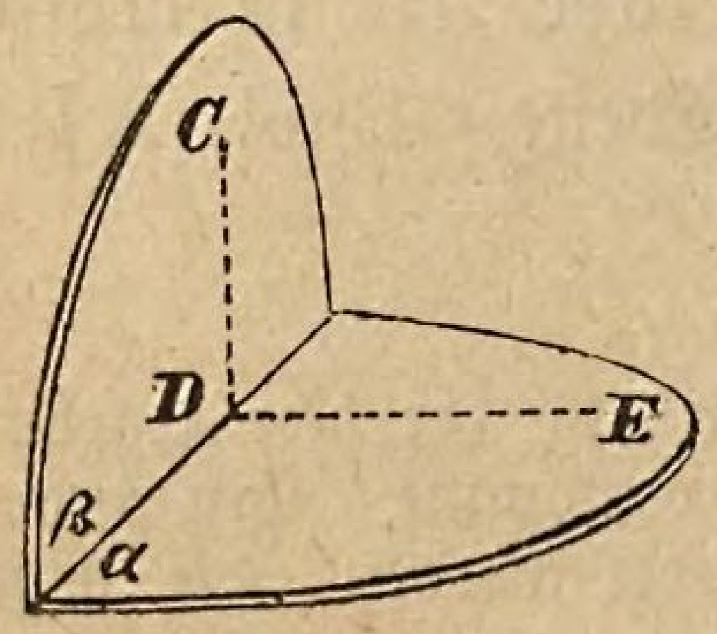



Anmerkung. Um die Normale der Ebene $\alpha$ durch einen gegebenen Punct $B$ zu ziehn, hat man 3 rechte Winkel zu construiren. Liegt $B$ auf $\alpha$, und construirt man die rechten Winkel $CBD$ auf $\alpha$, $CBE$ außer $\alpha$, $DBF$ auf der Ebene $DBE$, so ist $BF$ die gesuchte Normale. Denn $BF$ liegt auf der Ebene $DBE$, die zu der Geraden $BC$ der Ebene $\alpha$ normal steht (1).

Liegt $B$ außer $\alpha$, und construirt man die rechten Winkel $BCD$, dessen Schenkel $CD$ auf $\alpha$ liegt, $DCE$ auf $\alpha$, und $BFC$ auf $BEC$, so ist $BF$ die gesuchte Normale. Construirt man auf der Ebene $BCE$ den rechten Winkel $GCE$, so ist $CG$ eine Normale der Ebene $\alpha$, folglich auch $BF$.

4. Wenn eine Ebene $\beta$ eine Normale einer andern Ebene $\alpha$ enthält, so liegt jede Normale der Ebene $\beta$, die mit der Ebene $\alpha$ einen Punct gemein hat, auf der Ebene $\alpha$, und die Ebenen heißen normal zu einander gestellt. Eucl. XI, 18. Ist $D$ ein gemeinschaftlicher Punct der beiden Ebenen, $DC$ die auf $\beta$ liegende Normale von $\alpha$, $DE$ eine Normale von $\beta$, so ist

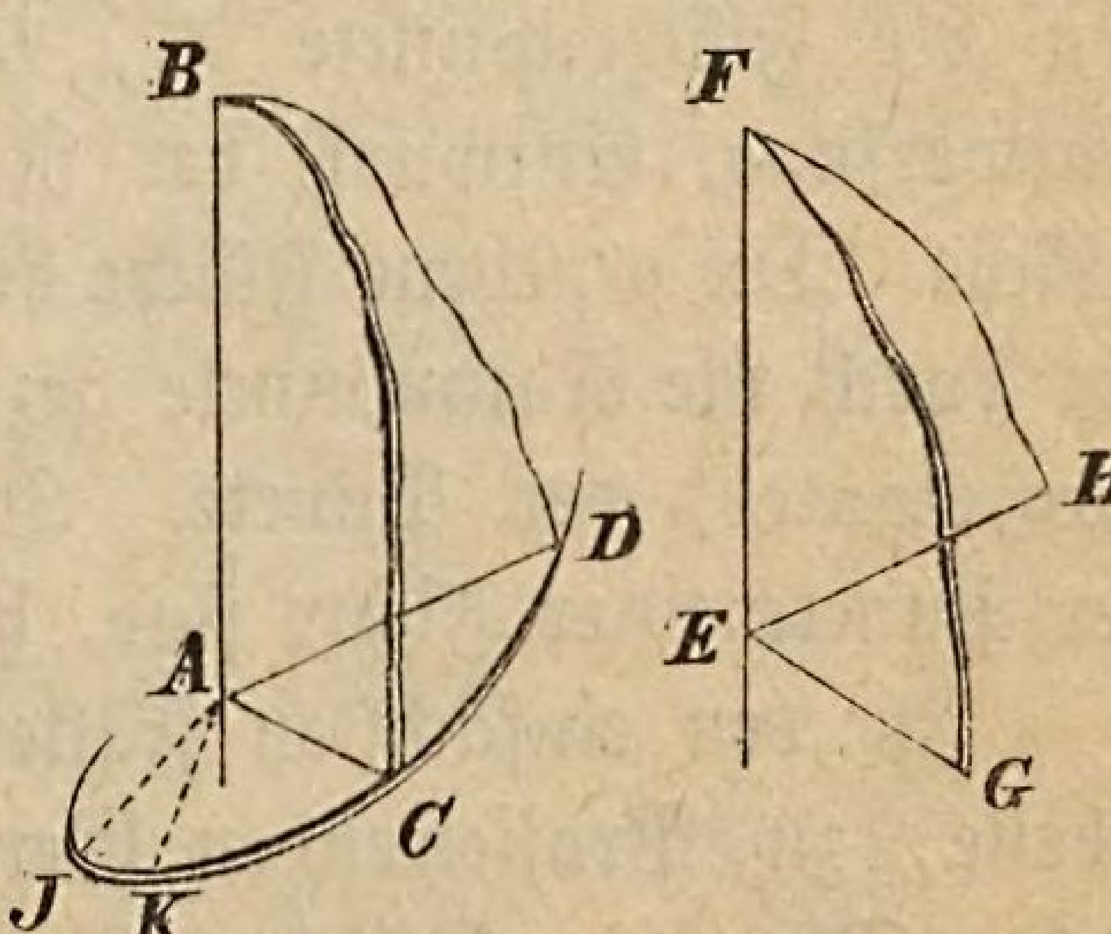


der Winkel $EDC$ recht, mithin $DE$ eine Gerade der Ebene $\alpha$ (2). Ist $F$ ein beliebiger Punct von $\alpha$, $FG$ eine Normale von $\beta$, so liegt $FG$ mit $DE$ auf einer Ebene (3) d. h. $FG$ liegt auf $\alpha$.

Wenn zwei Ebenen normal zu einer dritten Ebene stehn, so ist die Gerade, welche sie gemein haben, zu der dritten Ebene normal. Vergl. §. 1, 4.

5. Zwei Ebenen, die sich in einer Geraden schneiden, theilen den Raum in 4 Räume, welche **Flächenwinkel** (angle dièdre, coin bei **Legendre** Géom. V, 17) genannt werden. Die Theile der Ebenen, welche einen Flächenwinkel einschließen, heißen seine **Seiten** oder **Flächen** (ἕδρα, face); die Gerade, in der die Seiten zusammentreffen, heißt die **Kante** des Flächenwinkels (πλευρά, latus, côté, besser acies bei **Euler**, arête bei **Legendre**). Der Flächenwinkel, dessen Kante $AB$, dessen Seiten $ABC$ und $ABD$ sind, wird durch $C\overline{AB}D$ unzweideutig bezeichnet, wenn der Sinn der Drehung festgesetzt ist, durch welche der Flächenwinkel beschrieben werden soll, d. h. wenn bestimmt ist, ob einem von $A$ nach $B$ aufwärts gerichteten Betrachter die von $C$ nach $D$ gehende Bewegung linksum oder rechtsum gehend erscheint. Vergl. Planim. §. 1, 5.

I. Gleiche Flächenwinkel $C\overline{AB}D$ und $G\overline{EF}H$ sind congruent. Construirt man die Winkel $CAB = GEF$ und $DAB = HEF$, und vereinigt man den Winkel $CAB$ mit dem gleichen Winkel $GEF$, so fällt die Ebene $DAB$ mit der Ebene $HEF$ zusammen, sonst wären die beiden Flächenwinkel ungleich. Daher fällt auch der Schenkel $AD$ mit dem Schenkel $EH$ zusammen; und die Winkel $CAD$ und $GEH$ sind einander gleich. Construirt man auf dem ersten Flächenwinkel die Winkel $C'A'B = CAB$ und $D'A'B = DAB$, so ist auch $C'A'D' = GEH$ folglich $C'A'D' = CAD$.




II. Ein Flächenwinkel hat mit einer Ebene, welche seine Kante schneidet, einen Winkel gemein, und wird von parallelen Ebenen in gleichen Winkeln geschnitten (I). Wenn die Schenkel eines Winkels mit den Schenkeln eines andern Winkels der Reihe nach parallel und von einerlei Richtung sind, so sind die Winkel gleich. Unter dem **Winkel von zwei Geraden, die nicht auf einer Ebene liegen**, wird ein Winkel verstanden, dessen Schenkel mit den beiden Geraden der Reihe nach parallel und von einerlei Richtung sind.

III. Unter einem **Normalschnitt** eines Flächenwinkels versteht man den Winkel, in welchem der Flächenwinkel von einer Ebene geschnitten wird, die zu der Kante, also auch zu den Seiten des Flächenwinkels (4) normal steht. Alle Normalschnitte eines Flächenwinkels sind einander gleich, gleiche Flächenwinkel haben gleiche Normalschnitte. Umgekehrt schließt man, daß zwei Flächenwinkel gleich sind, wenn sie gleiche Normalschnitte haben. Eucl. XI def. 6.

Flächenwinkel heißen spitz, recht, stumpf, supplementär, complementär, Nebenwinkel, Scheitelwinkel, wenn ihren Normalschnitten diese Benennungen zukommen. Wenn die Seiten des Flächenwinkels normal zu einander stehn (4), so ist der Flächenwinkel recht.

IV. Die von einer Normale einer Ebene mit einer Normale einer andern Ebene gebildeten Winkel können ebenfalls zur Bestimmung der von den beiden Ebenen gebildeten Flächenwinkel gebraucht werden. Wenn $CAD$ ein Normalschnitt des Flächenwinkels $CABD$ ist und die rechten Winkel $JAC$, $KAD$ auf der Ebene $CAD$ liegen, so sind $AJ$, $AK$ Normalen der Ebenen $CAB$, $DAB$ (1), und die Winkel $CAD$, $JAK$ einander gleich.

**6.** Wenn durch gegebene Puncte des Raumes $A$, $B$, $C$, .. nach einem gegebenen Gesetz Linien von bestimmter Art gezogen werden, welche eine gegebene Fläche in den Puncten $A_1$, $B_1$, $C_1$, .. schneiden, so heißen die Flächenpuncte $A_1$, $B_1$, $C_1$, .. **Projectionen** (projectio = Entwerfung, Entwurf) der Raumpuncte $A$, $B$, $C$, .. auf die gegebene Fläche. Die gegebene Fläche heißt die **Projectionsfläche** (Bildfläche), die durch die Raumpuncte gezogenen Linien heißen die **Projicirenden** (projetantes) der Puncte. Die Figur, deren Puncte die Projectionen der Puncte einer Figur sind, heißt die Projection der gegebenen Figur.*)

In den einfachsten Fällen nimmt man zur Projectionsfläche eine Ebene, zu Projicirenden Gerade, welche zur Projectionsebene normal sind. Die so erhaltenen Projectionen heißen **Normalprojectionen** (orthogonale, orthographische, Projectionen schlechthin). Die Geraden, welche die Puncte einer Geraden projiciren, liegen auf einer Ebene,

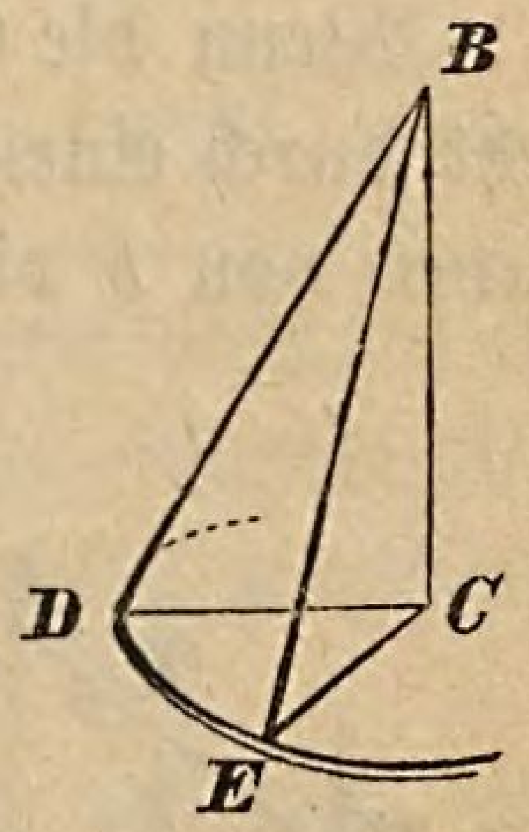
*) Die Projectionen sind von den griechischen Astronomen (Hipparchus, Ptolemaeus u. A.) zur Abbildung der scheinbaren Himmelskugel gebraucht worden. Klügel math. W. IV p. 492. Im 16ten Jahrhundert wurde die aus dem Alterthum bekannte Perspective weiter entwickelt, zu der am Ende des 18ten Jahrhunderts die von Monge ausgebildete descriptive Geometrie (Projectionslehre) hinzukam. Zu geometrischen Untersuchungen hat zuerst Desargues um 1640 die Projectionen gebraucht; die Wichtigkeit dieser Anwendung ist durch Monge's Schule, besonders aber durch Poncelet's Arbeiten (propr. proj.) in helles Licht gesetzt worden.

welche die Gerade projicirt und normal zur Projectionsebene steht (4). Die Gerade, in der die Projectionsebene von der Ebene geschnitten wird, welche eine gegebene Gerade projicirt, enthält die Projectionen aller Puncte der gegebenen Geraden und ist die Projection der gegebenen Geraden. Nur in dem Falle, daß die gegebene Gerade normal zur Projectionsebene ist, ist die Projection der Geraden ein Punct.

Die Normalprojectionen von zwei sich schneidenden Geraden sind zwei Gerade, die sich schneiden oder zusammenfallen; die Normalprojectionen von zwei sich nicht schneidenden Geraden einer Ebene sind zwei Gerade, die sich nicht schneiden oder zusammenfallen. Die Normalprojection eines rechten Winkels ist nur dann ein rechter Winkel, wenn ein Schenkel normal ist zu der Ebene, welche den andern Schenkel projicirt.

Unter den Abbildungen eines räumlichen Objects sind von besonderer Anwendung seine horizontale und verticale Projection (Grundriß, Aufriß); bei jener sind die Projicirenden vertical und die Projectionsebene horizontal, bei dieser sind die Projicirenden horizontal und normal zur verticalen Projectionsebene. Die Bilder, welche in der Stereometrie zur Unterstützung der Vorstellung der räumlichen Objecte gezeichnet werden, sind Projectionen dieser Objecte durch Projicirende, die auch zu einer andern Ebene als der Projectionsebene normal sein können.

7. Unter den Abständen eines gegebenen Punctes $B$ von den Puncten einer Ebene $\alpha$ ist der Abstand des Punctes von seiner Normalprojection auf die Ebene (6) am kleinsten, und giebt den Abstand des Punctes von der Ebene an. Die Puncte der Ebene, welche von einem außer der Ebene gegebenen Punct gleiche Abstände haben, liegen auf einem Kreise, dessen Centrum die Normalprojection des Punctes auf die Ebene ist.

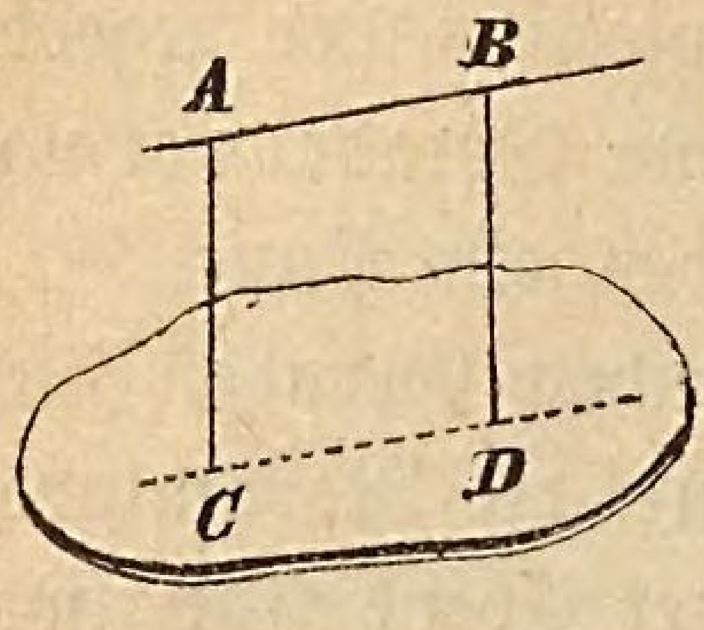



Beweis. Wenn außer der Ebene $\alpha$ der Punct $B$ liegt, wenn $C$ die Normalprojection von $B$ auf $\alpha$, und $D$ ein beliebiger Punct der Ebene $\alpha$ ist, so ist der Winkel $BCD$ recht (1), folglich $CB < DB$. Wenn $E$ ein anderer Punct von $\alpha$ und $DB = EB$ ist, so sind die Dreiecke $BCD$ und $BCE$ gleich und ähnlich, mithin $DC = EC$.

8. Unter dem Abstand einer Geraden von einer Ebene, die mit ihr parallel ist, versteht man den Abstand eines beliebigen Punctes der Geraden von der Ebene, weil alle Puncte der Geraden von der Ebene gleiche Abstände haben. Unter dem Abstand paralleler Ebenen versteht man den Abstand eines beliebigen Punctes der einen Ebene von der

andern Ebene, weil alle Puncte der einen Ebene von der andern Ebene gleiche Abstände haben.

Beweis. Wenn $A$ und $B$ Puncte der Geraden, $C$ und $D$ ihre Normalprojectionen auf die Ebene sind, so sind die Projicirenden $AC$ und $BD$ parallel (3). Ferner ist die Gerade $AB$ mit ihrer Normalprojection $CD$ parallel, weil die Gerade mit der Projectionsebene parallel ist. Also ist das Viereck $ACDB$ ein Parallelogramm, $CA = DB$.

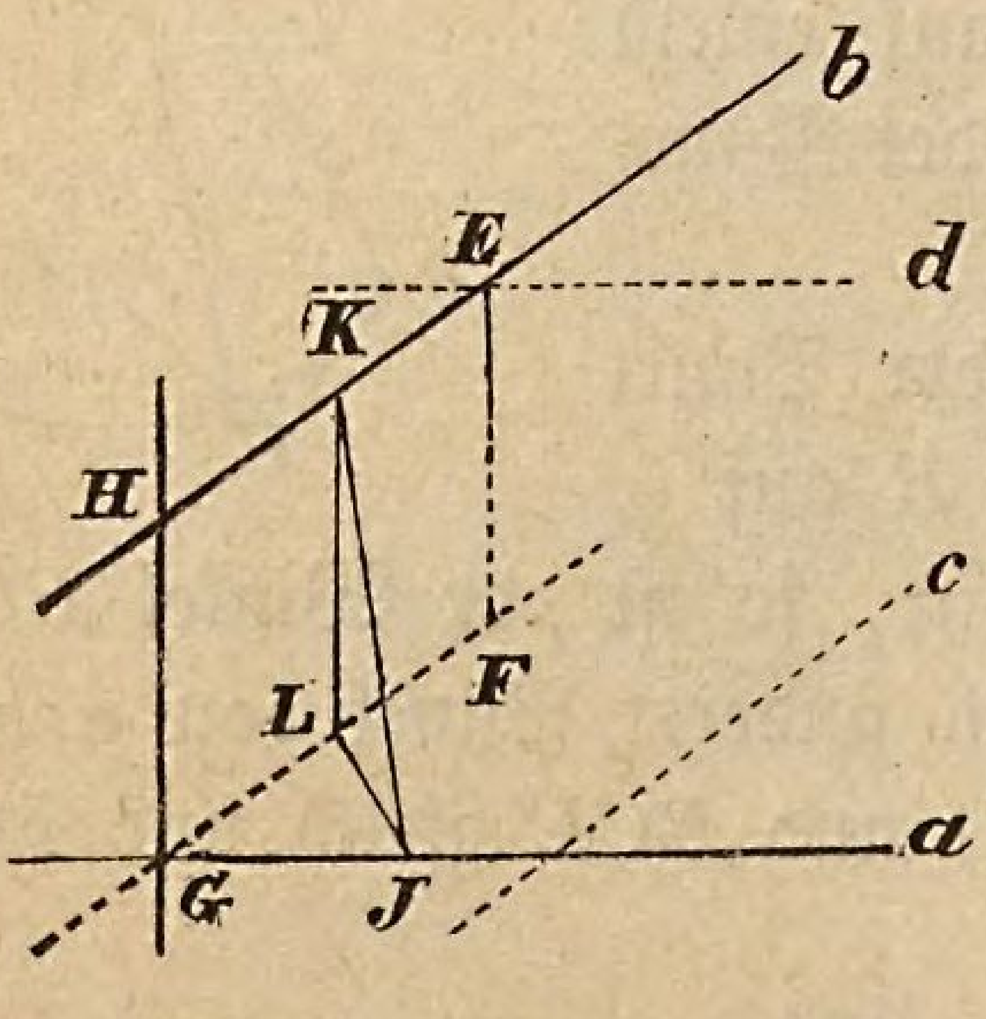



Wenn $A$ und $B$ Puncte der einen Ebene, $C$ und $D$ ihre Normalprojectionen auf die andere Ebene, und die beiden Ebenen parallel sind, so findet man durch dieselben Betrachtungen $CA = DB$.

Zwei parallele Ebenen theilen den Raum in 3 Räume, von denen der mittlere eine Schicht (couche) heißt. Die Größe einer Schicht wird nach dem Abstand der parallelen Ebenen beurtheilt. Eine Schicht kann als ein Flächenwinkel mit einer unendlich fernen Kante betrachtet werden (§. 1, 4).

9. Unter dem Abstand von zwei Geraden, die nicht auf einer Ebene liegen, versteht man den Abstand der parallelen Ebenen, auf denen die Geraden liegen, oder den Abstand der einen Geraden von der Ebene, die mit derselben parallel ist und die andere Gerade enthält, oder den Abstand der Puncte, in welchen die beiden Geraden von einer bestimmten Geraden normal geschnitten werden.*)

Wenn die Geraden $a$ und $b$ nicht auf einer Ebene liegen, und man zieht durch einen Punct von $a$ die Gerade $c$ parallel mit $b$, durch einen Punct von $b$ die Gerade $d$ parallel mit $a$, so ist die Ebene $ac$ nicht nur mit der Geraden $b$, sondern auch mit der Ebene $bd$ parallel (§. 1).




Ein beliebiger Punct $E$ der Geraden $b$ werde durch die Gerade $EF$ normal projicirt auf die Ebene $ac$; durch $F$ werde die Gerade gezogen, die mit $b$ parallel ist und $a$ in $G$ schneidet; durch $G$ werde die Gerade gezogen, die mit $EF$ parallel ist und $b$ in $H$ schneidet. Die Gerade $GH$ ist gleichwie $EF$ eine Normale der Ebene $ac$ (3), folglich auch eine Normale der mit $ac$ parallelen Ebene $bd$, also schneidet sie die Geraden $a$ und $b$ normal und ist der Durchschnitt der Ebenen, welche die

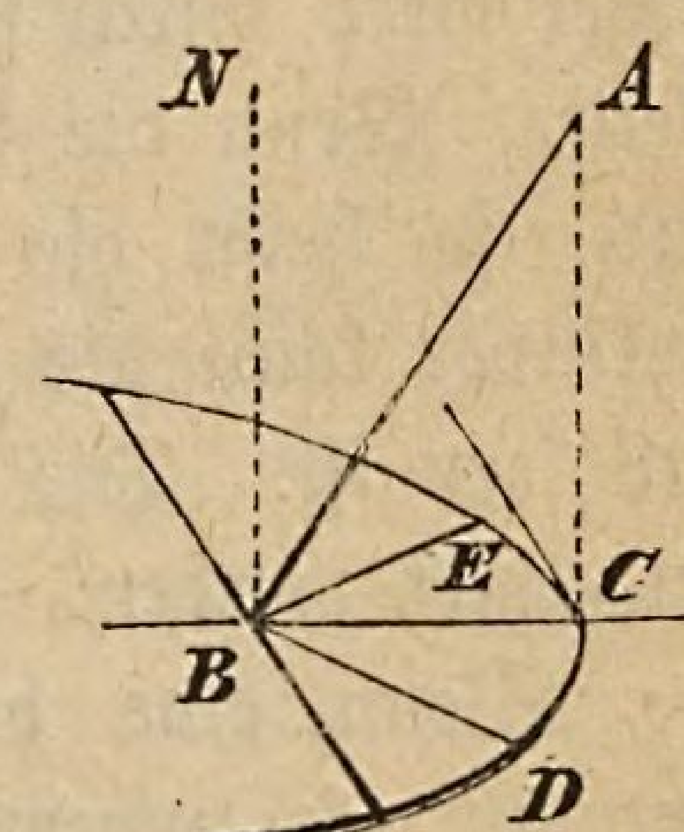
*) Legendre Géom. note 6.

Geraden $a$ und $b$ enthalten und zu den parallelen Ebenen $ac$ und $bd$ normal stehn (4).

Die Puncte $G$ und $H$ der Geraden $a$ und $b$ haben von einander einen kleinern Abstand, als irgend welche andere Puncte $J$ und $K$ derselben Geraden. Zieht man $KL$ parallel mit $GH$, so ist der Winkel $KLJ$ recht, $JK > LK$, $LK = GH$, also $JK > GH$.

**10.** Eine Gerade, die eine Ebene nicht normal schneidet, bildet mit den Geraden der Ebene verschiedene Winkel, mit ihrer Normalprojection auf die Ebene den kleinsten spitzen und den größten stumpfen Winkel. Deshalb versteht man unter dem Winkel, den eine Gerade mit einer Ebene bildet, den Winkel, welchen sie mit ihrer Normalprojection auf die Ebene bildet.*)

Es sei $C$ die Normalprojection des Punctes $A$, $BC$ die Normalprojection der Geraden $BA$ auf die gegebene Ebene, der Winkel $ABC$ spitz, und $BD$ eine Strecke der Ebene, die man der Strecke $BC$ gleich macht. Während nun der Winkel $CBD$ von 0 bis 180° wächst, so wächst in dem Dreieck $CBD$ die Seite $CD$ von 0 bis $2BC$ (Planim. §. 5, 5). Dabei wächst in dem rechtwinkeligen Dreieck $ACD$ die Hypotenuse $AD$ von $AC$ bis zur Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks dessen Catheten $2BC$ und $CA$ sind. Also wächst auch in dem Dreieck $ABD$ der Winkel $ABD$ von $ABC$ bis $180^0 - ABC$.



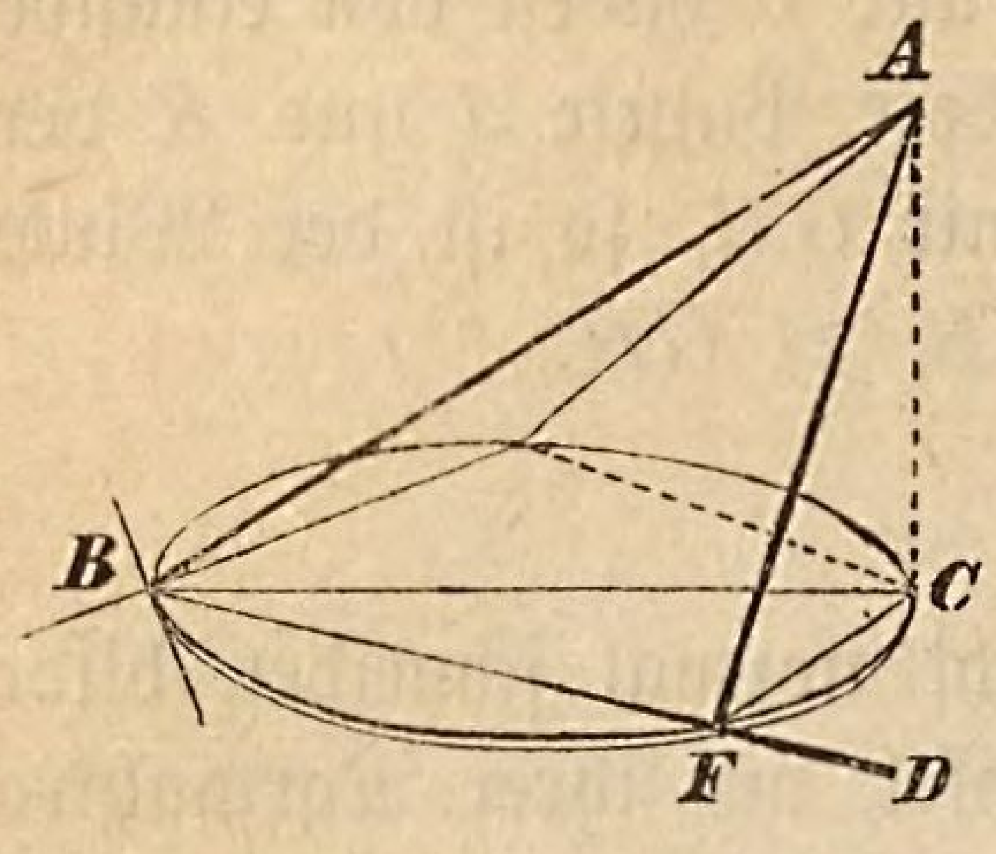

Wenn der Winkel $CBD = 90^0$ ist, so ist $BD$ eine Normale der Ebene $ABC$, weil die Ebenen $ABC$ und $DBC$ normal zu einander stehn, folglich $ABD = 90^0$. Wenn die Winkel $CBD$ und $CBE$ entgegengesetzt gleich sind, so sind die Winkel $ABD$ und $ABE$ gleich.

Der von der Geraden $AB$ mit der Ebene $BCD$ gebildete spitze Winkel ist das Complement des Winkels $NBA$, den die Normale $BN$ der Ebene mit der Geraden $BA$ bildet. Dieser letztere Winkel heißt in der Optik der Incidenzwinkel des Strahls $AB$ in Bezug auf die Ebene $BCD$.

Während der Winkel $CBD$ von 0 bis 90° und dann von 90° bis 180° wächst, so fällt der Flächenwinkel $A\overline{BD}C$ von 90° bis $ABC$ und steigt dann wieder bis auf 90°. Zieht man $CF$ normal zu $BD$, so ist

*) Eucl. XI def. 5 und Optica 37 ff. Pappus VI, 44.

*BD* eine Normale der Ebene *AFC*, mithin *AFC* ein Normalschnitt des Flächenwinkels $A\overline{BD}C$. Wenn nun der Winkel *CBD* von 0 bis 90° wächst,




so wächst in dem rechtwinkeligen Dreieck *CBF* die Cathete *CF* von 0 bis *CB* und es fällt in dem rechtwinkeligen Dreieck *ACF* der Winkel *AFC* von 90° bis *ABC*. Bei weiterer Zunahme des Winkels *CBD* von 90° bis 180° fällt die Cathete *CF* von *CB* bis 0, und der Winkel *AFC* wächst von *ABC* bis 90°.

## §. 3. Kegel, Cylinder und Kugel.

**1.** Eine geradlinige Fläche (Planim. §. 1, 4), deren Gerade sämmtlich einen Punct gemein haben, heißt ein Kegel (κῶνος, conus), die auf ihm liegenden Geraden heißen seine Kanten (vergl. §. 5, 1), der gemeinschaftliche Punct sein Centrum (Spitze). Der vollständige Kegel wird durch sein Centrum in 2 Felder, Kegel und Gegenkegel, getheilt. Wenn die Geraden einer geradlinigen Fläche sämmtlich parallel sind, so heißt die geradlinige Fläche ein Cylinder (κύλινδρος). Der Cylinder kann als ein Kegel betrachtet werden, dessen Centrum unendlich fern ist. Die Ebene kann als ein Kegel wie auch als ein Cylinder betrachtet werden.

Wenn eine beliebige Linie mit einer Geraden starr verbunden ist und um die unbewegliche Gerade als Axe umgedreht wird, so ist ihre Bahn eine Rotationsfläche (surface de rotation, révolution). Zu den Rotationsflächen gehört der Rotationskegel*), entstanden durch Rotation eines spitzen Winkels um einen seiner Schenkel; die Ebene, entstanden durch Rotation eines rechten Winkels um einen seiner Schenkel (§. 2, 2); der Rotationscylinder, entstanden durch Rotation eines Streifens um einen seiner Schenkel; die Kugel, entstanden durch Rotation eines Halbkreises um den ihn begrenzenden Diameter (vergl. unten 4).

Die Ebenen, welche die Axe einer Rotationsfläche normal schneiden, schneiden die Rotationsfläche in Kreisen, deren Centren auf der Axe liegen (§. 2, 2), und welche Parallelkreise heißen. Die Ebenen, welche die Axe der Rotationsfläche enthalten, schneiden die Rotations-

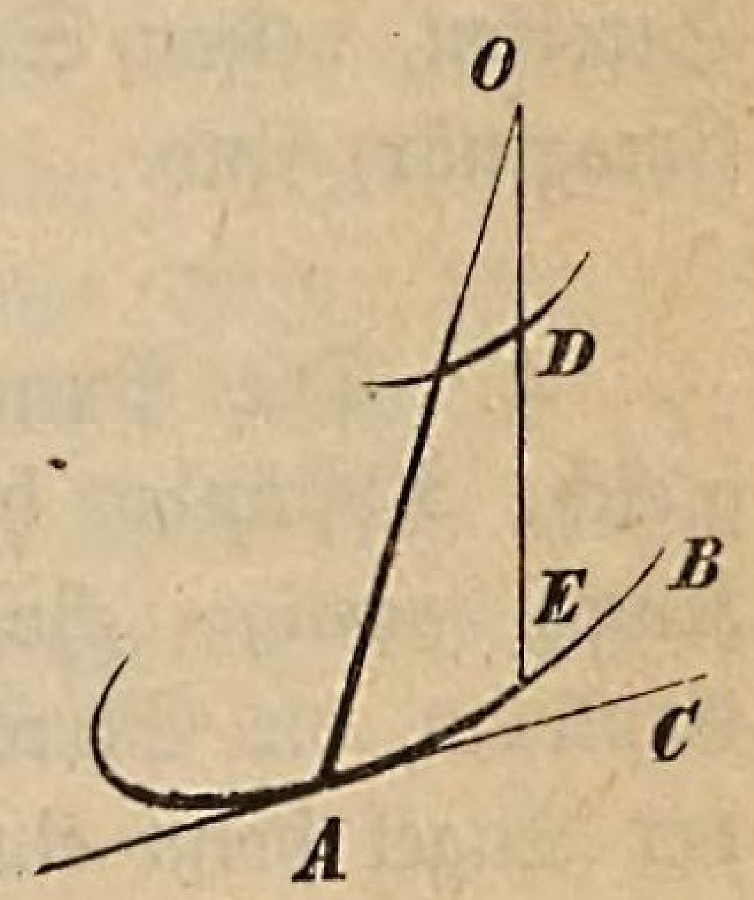
---

*) Eucl. XI def. 14 ff. Man unterschied spitzwinkelige, rechtwinkelige, stumpfwinkelige Kegel nach der Größe des Winkels, dessen Hälfte durch Rotation den Kegel beschreibt. Zu den Rotationsflächen gehören die von Archimedes untersuchten Conoide und Sphäroide. Die allgemeinere Auffassung des Kegels gründet sich hauptsächlich auf Apollonius Conica I def. 1.

fläche in congruenten Linien, welche nach geographischem Gebrauch Meridiane der Fläche heißen.

2. Eine Ebene, die durch das Centrum eines Kegels geht, enthält entweder zwei Kanten desselben, oder eine Kante, oder keine. In dem ersten Falle schneidet sie den Kegel beiderseits vom Centrum, der Kegelschnitt ist ein Winkel und sein Scheitelwinkel; in dem zweiten Falle berührt sie den Kegel entlang einer Kante, der Kegelschnitt ist eine Gerade; in dem dritten Falle schneidet sie alle Kanten des Kegels im Centrum, der Kegelschnitt ist ein Punct.

Wenn die Ebene das Centrum $O$ des Kegels und eine Tangente $AC$ einer auf dem Kegel liegenden Curve $AB$ enthält, so tritt der zweite Fall ein, die Ebene $OAC$ berührt den Kegel längs der Kante $OA$ und hat mit ihm außer der Kante $OA$ in unmittelbarer Nähe keinen Punct gemein. Denn eine Ebene, welche die Kante $OA$ und einen neben $OA$ liegenden Punct $D$ des Kegels enthält, hat mit dem Kegel die Kante $OD$ und mit der Curve $AB$ den Punct $E$ gemein, in welchem die Curve von der Kante $OD$ geschnitten wird. Die Ebene $OAD$ enthält also eine Sehne $AE$ der Curve $AB$ und nicht die Tangente $AC$ derselben.




Wenn der Kegel und die ihn berührende Ebene $OAC$ von einer Ebene in der Curve $AF$ und der Geraden $AG$ geschnitten werden, so ist $AG$ die Tangente von $AF$ in dem gemeinschaftlichen Punct $A$, weil sie mit dem Kegel, also auch mit der Curve keinen Punct neben $A$ gemein hat. Umgekehrt schließt man: die Geraden, welche die eine Kante schneidenden Kegelcurven in diesen Puncten berühren, liegen auf einer Tangentenebene des Kegels, die mit demselben jene Kante gemein hat.

3. Eine Ebene, welche das Centrum des Kegels nicht enthält, ist entweder mit 2 Kanten desselben parallel, oder sie ist mit einer Kante d. h. mit einer diese Kante enthaltenden Tangentenebene des Kegels parallel, oder sie ist mit keiner Kante des Kegels parallel.*)

---

*) Vergl. Poncelet propr. proj. 4 und Steiner syst. Entw. 36. Die Schnitte der verschiedenen Rotationskegel durch eine zu einer Kante normale Ebene sind zuerst von Menächmus (Platonische Schule 370 v. Chr.) unterschieden und durch entsprechende Gleichungen bestimmt worden. Reimer hist. dupl. cubi p. 58. Die Schriften von Aristäus und Euclides über die Kegelschnitte sind nicht mehr vorhanden. Archimedes hat diese Curven als Schnitte eines jeden Rotationskegels erkannt (Con. et Sph. 8 ff.), Apollonius hat sie als Schnitte eines jeden Kegels, auf dem ein Kreis liegt, nachgewiesen und mit den noch heute gebräuchlichen Namen versehn (Conica I).

In dem ersten Falle werden 2 Kanten des Kegels nicht geschnitten, die übrigen werden theils auf dem einen, theils auf dem andern Kegelfelde geschnitten; der Kegelschnitt besteht aus zwei nach zwei Richtungen ins Unendliche sich erstreckenden Aesten und heißt hyperbolisch (ὑπερβολή, excessus).

In dem zweiten Falle werden außer einer alle Kanten geschnitten, der Kegelschnitt bleibt nach einer Richtung offen und heißt parabolisch (παραβολή, aequalitas).

In dem dritten Falle werden alle Kanten geschnitten, der Kegelschnitt ist geschlossen und heißt elliptisch (ἔλλειψις, defectus).

Anmerkung. Cylinderschnitte sind im Allgemeinen als elliptisch zu bezeichnen. In dem besondern Falle, daß die schneidende Ebene mit den Kanten des Cylinders parallel ist, wird der Cylinderschnitt ein Streifen, dessen Schenkel getrennt, oder vereint, oder nicht construirbar (imaginär) sind.

**4.** Die Puncte des Raumes, welche von einem gegebenen Punct gleiche Abstände haben, liegen auf einer geschlossenen Fläche, welche Kugel (σφαῖρα, globus) genannt wird. Der gegebene Punct heißt das Centrum, die Strecke zwischen dem Centrum und einem beliebigen Punct der Kugel heißt ein Radius der Kugel. Eine Gerade, die durch das Centrum geht, schneidet die Kugel in zwei Puncten, welche Gegenpuncte (antipodes) heißen und einen Diameter begrenzen. Eine durch das Centrum gehende Ebene schneidet die Kugel in einem Kreis, dessen Centrum und Radius von dem Centrum und Radius der Kugel nicht verschieden sind, und der ein Hauptkreis (größter Kreis, Normalkreis) genannt wird. Ein Hauptkreis theilt die Kugel in zwei congruente Theile, welche Halbkugeln (Hemisphären) heißen.*)

**5.** Wenn der Abstand einer Ebene vom Centrum der Kugel kleiner ist als ein Radius, so wird die Kugel von der Ebene in einem Kreis geschnitten, dessen Centrum die Normalprojection des Centrum der Kugel auf die Ebene ist. Die Radien der Kugel, welche nach Puncten dieses Kreises gehn, liegen auf einem Rotationskegel; ihre Normalprojectionen auf die Ebene sind Radien des Kreises.

Wenn der Abstand der Ebene vom Centrum der Kugel dem Radius gleich ist, so wird die Kugel von der Ebene berührt, d. h. die Normalprojection des Centrum auf die Ebene liegt auf der Kugel, und

*) Die Ausdrücke, Hauptkreis, Gegenpuncte sind von Steiner (Crelle J. 2 p. 45) eingeführt worden.

die Geraden, welche in diesem Punct die hindurch gehenden Hauptkreise berühren, liegen auf der Ebene. Die Kugel wird von ihren Radien normal geschnitten.

Wenn der Abstand der Ebene vom Centrum der Kugel größer ist als ein Radius, so ist die Ebene von der Kugel ausgeschlossen.*)

Beweis. Ist $B$ das Centrum der Kugel, $C$ dessen Normalprojection auf die Ebene $\alpha$, $D$ ein beliebiger Punct dieser Ebene, so ist $BD > BC$. Wenn nun $BC$ kleiner ist als ein Radius, so ist $C$ von der Kugel eingeschlossen, und die Ebene hat mit der Kugel einen Kreis gemein (§. 2, 7). Wenn $BC$ dem Radius gleich ist, so liegt $C$ auf der Kugel und die Gerade $CD$ berührt den auf der Ebene $BCD$ liegenden Hauptkreis der Kugel. Wenn $BC$ größer ist als ein Radius, so sind alle Puncte der Ebene von der Kugel ausgeschlossen.

Anmerkung. Vier beliebige Puncte der Kugel liegen im Allgemeinen nicht auf einer Ebene, die Kugel ist eine krumme Fläche (Planim. §. 1, 4). Die durch 3 Puncte der Kugel bestimmte Ebene schneidet die Kugel in einem Kreis, dessen Centrum die Normalprojection des Centrum der Kugel auf die Ebene ist. Ein vierter Punct der Kugel liegt nur dann auf derselben Ebene, wenn er auf dem erwähnten Kreis liegt.

6. Die Geraden, welche einen Punct $A$ gemein haben und eine gegebene Kugel ($B$) berühren, liegen auf einem Rotationskegel, dessen Axe den gemeinschaftlichen Punct und das Centrum der Kugel enthält. Die Berührungspuncte $C$, $C'$, .. liegen auf einem Kreis, dessen Centrum auf der Axe liegt und dessen Ebene normal zur Axe steht.**) Denn die Dreiecke $ABC$, $ABC'$, .. sind rechtwinkelig und congruent u. s. w.

Wenn der Punct $A$ von der Kugel ($B$) eingeschlossen ist, so ist der Kreis, dessen Centrum mit $A$ zusammenfällt, der kleinste unter allen Kreisen der Kugel, deren Ebenen den Punct $A$ enthalten (Planim. (§. 6, 11).

Wenn man den Radius der Kugel durch $r$ bezeichnet, so hat man für jede den Punct $A$ enthaltende Gerade, welche die Kugel in $P$ und $P_1$ schneidet, nach Planim. §. 14, 3

$$AP \, . \, AP_1 = AB^2 - r^2.$$

Dieses für den gegebenen Punct und die Kugel unveränderliche Product

*) Theodosius Sphaerica I.
**) Euclides Opt. 23.

heißt die **Potenz** des **Punctes** in **Bezug** auf die **Kugel**; sein Werth ist das Quadrat einer von $A$ an die Kugel reichenden Tangente, oder Null, oder das negative Quadrat der halben (kleinsten) Sehne, deren Mitte $A$ ist, je nachdem der Punct $A$ von der Kugel ($B$) ausgeschlossen ist, oder auf ihr liegt, oder von ihr eingeschlossen ist.

7. Zwei Kugeln ($A$) und ($B$) haben einen Kreis gemein, dessen Centrum auf der Geraden $AB$ liegt und dessen Ebene normal zu derselben Geraden steht, wie man aus der Betrachtung ihrer auf einer Ebene liegenden Hauptkreise erkennt (Planim. §. 3, 3). Der von den Kugeln in einem gemeinschaftlichen Punct gebildete Flächenwinkel wird durch den Winkel angegeben, den die nach dem gemeinschaftlichen Punct gehenden Radien bilden (§. 2, 5. Anm.); also schneiden sich die Kugeln längs des gemeinschaftlichen Kreises unter denselben Winkeln.

Der gemeinschaftliche Kreis der Kugeln ist nur dann real, wenn die Radien und der Abstand der Centren Seiten eines Dreiecks sind. Er fällt mit seinem Centrum zusammen, so daß die Kugeln sich berühren, wenn der Abstand der Centren der Summe oder der Differenz der Radien gleichkommt. Er wird imaginär, so daß eine Kugel die andere ganz ein- oder ausschließt, wenn der Abstand der Centren kleiner ist als die Differenz oder größer als die Summe der Radien.

In jedem Falle ist die Ebene des gemeinschaftlichen Kreises real und vermöge der Eigenschaft construirbar, daß jeder Punct der Ebene in Bezug auf die beiden Kugeln gleiche Potenzen besitzt (Planim. §. 14, 6 ff.). Die von den Kugeln ausgeschlossenen Puncte dieser Ebene sind Centren von bestimmten **Orthogonalkugeln** der Kugeln ($A$) und ($B$), d. h. von Kugeln, welche die Kugeln ($A$) und ($B$) rechtwinkelig längs je eines Kreises schneiden.

8. Drei Kugeln ($A$), ($B$), ($C$) haben im Allgemeinen zwei Puncte $P$ und $Q$ gemein, welche symmetrisch zur Ebene der Centren $ABC$ liegen, so daß die Strecke $PQ$ von der Ebene $ABC$ normal halbirt wird. Denn die Dreiecke $PQA$, $PQB$, $PQC$ sind gleichschenkelig und die Mitte ihrer gemeinschaftlichen Basis liegt auf der Ebene $ABC$ (§. 2, 2).

Die gemeinschaftlichen Puncte $P$ und $Q$ können in ihrer Mitte zusammenfallen, oder imaginär werden. In jedem Falle ist die Gerade, auf der die gemeinschaftlichen Puncte getrennt oder vereint liegen oder die Realität verloren haben, real und durch die Eigenschaft bestimmt, daß jeder Punct der Geraden in Bezug auf die 3 Kugeln gleiche Potenzen besitzt. Denn sie liegt auf den Ebenen, deren Puncte in Bezug auf jedes Paar der Kugeln gleiche Potenzen haben.

Zu 4 Kugeln ($A$), ($B$), ($C$), ($D$) giebt es im Allgemeinen einen

Punct, der in Bezug auf dieselben gleiche Potenzen hat. Denn die Gerade, deren Puncte in Bezug auf die Kugeln $(A)$, $(B)$, $(C)$ gleiche Potenzen haben, hat mit der Ebene, deren Puncte in Bezug auf die Kugeln $(A)$ und $(D)$ gleiche Potenzen haben, einen Punct gemein.

Wenn insbesondere 3 Kugeln von solcher Größe und Lage sind, daß ihre auf einer Ebene liegenden Hauptkreise einen Büschel (Planim. §. 14, 6) bilden, so bilden die Kugeln einen Büschel d. h. es giebt eine Ebene, deren Puncte in Bezug auf die Kugeln gleiche Potenzen besitzen. Auf dieser Ebene liegt der reale oder imaginäre Kreis, welchen die Kugeln des Büschels gemein haben. Eine andere Ebene schneidet den Büschel der Kugeln in einem Büschel von Kreisen.

9. Ein Punct, der von 2 gegebenen Puncten $A$ und $B$ gleiche Abstände hat, liegt auf der Ebene, welche die Strecke $AB$ normal halbirt und zu welcher die Puncte $A$ und $B$ symmetrisch liegen (§. 2, 2). Ein Punct, dessen Abstände von $A$ und $B$ ein gegebenes Verhältniß haben, liegt auf der Kugel, welche die Strecke $AB$ nach dem gegebenen Verhältniß innen und außen normal schneidet (Planim. §. 8, 6).

Ein Punct, der von 3 gegebenen Puncten $A$, $B$, $C$ gleiche Abstände hat, liegt auf der Geraden, welche die Ebene $ABC$ im Centrum des Kreises $ABC$ normal schneidet (§. 2, 7).

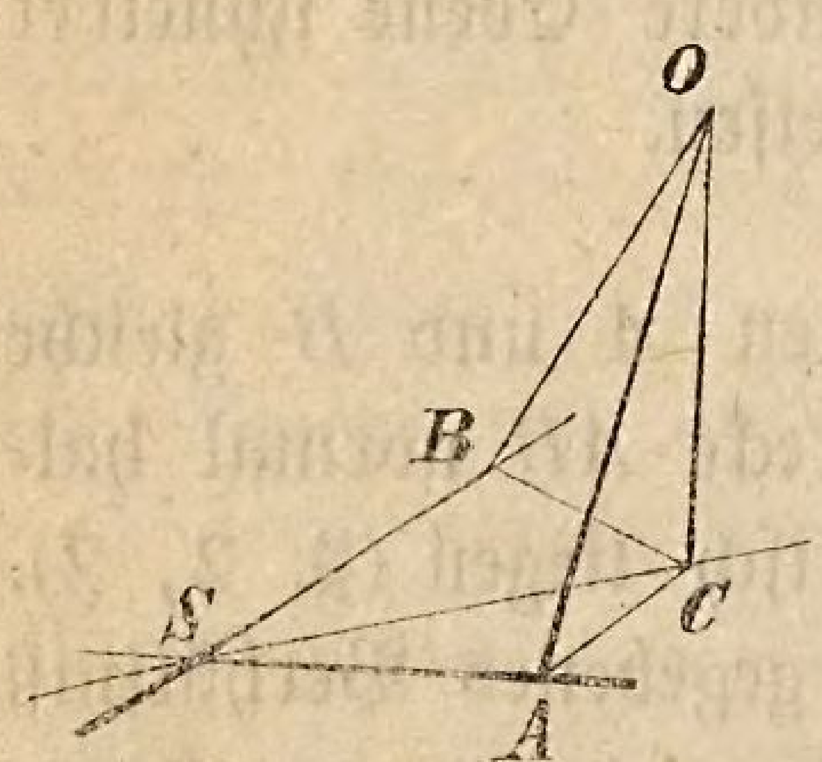
Zu 4 Puncten $A$, $B$, $C$, $D$ giebt es im Allgemeinen einen Punct, der von ihnen gleiche Abstände hat, das Centrum der Kugel $ABCD$.*) Denn die Gerade, deren Puncte von $A$, $B$, $C$ gleich fern sind, hat mit der Ebene, welche die Strecke $AD$ normal halbirt, einen Punct gemein, der von $A$, $B$, $C$, $D$ gleich fern ist. Denselben Punct haben die Ebenen gemein, welche die 6 durch die 4 gegebenen Puncte begrenzten Strecken normal halbiren. Wenn die Puncte $A$, $B$, $C$, $D$ auf einer Ebene liegen, so ist das Centrum der Kugel $ABCD$ auf einer Normale der Ebene $ABC$ unendlich fern, und die Kugel unterscheidet sich nicht von dieser Ebene. Wenn insbesondere die Puncte $A$, $B$, $C$, $D$ auf einem Kreis liegen, so sind alle Puncte der Geraden, welche die Ebene des Kreises in seinem Centrum normal schneidet, von den gegebenen Puncten gleich fern.

Demnach ist eine Kugel durch 4 Puncte bestimmt, die nicht auf einem Kreis liegen; also auch durch einen Kreis und einen daneben liegenden Punct, durch 2 Kreise, die 2 Puncte gemein haben z. B. durch die Kreise $ABC$ und $ABD$. Zwei Kreise, die in einem Punct sich schneiden, können nicht auf einer Kugel liegen. Zwei Kreise, die sich

*) Fermat de contact. sph. Opp. p. 74

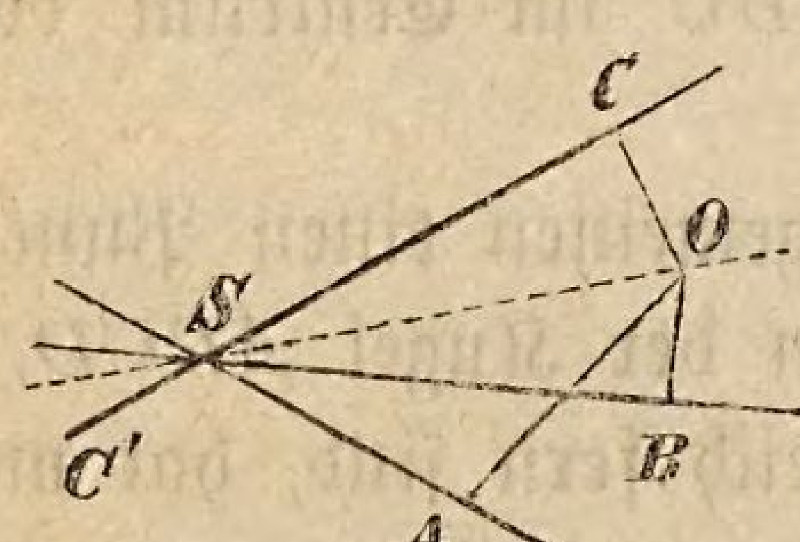
nicht schneiden, liegen im Allgemeinen nicht auf einer Kugel. Vergl. unten §. 5.

**10.** Die Puncte, die von einer gegebenen Geraden gleiche Abstände haben, liegen auf einem Rotationscylinder, dessen Axe die gegebene Gerade ist. Die Geraden (Ebenen), die von einer gegebenen Geraden gleiche Abstände haben, berühren einen Rotationscylinder, dessen Axe die gegebene Gerade ist.




Ein Punct, der von 2 gegebenen Geraden einer Ebene gleiche Abstände hat, liegt auf einer der Ebenen, welche die Winkel (Streifen) der Geraden normal halbiren. Wenn die Winkel *OAS*, *OBS* recht und die Strecken *OA*, *OB* gleich sind, und wenn *C* die Normalprojection von *O* auf die Ebene des Winkels *ASB* ist, so sind die Strecken *CA*, *CB* gleich u. s. w.

Ein Punct, der von 3 Geraden, welche paarweise je einer Ebene angehören (§. 1, 3), gleiche Abstände hat, liegt auf einer von 4 bestimmten Geraden, den Axen von Rotationskegeln, auf denen die gegebenen Geraden liegen.

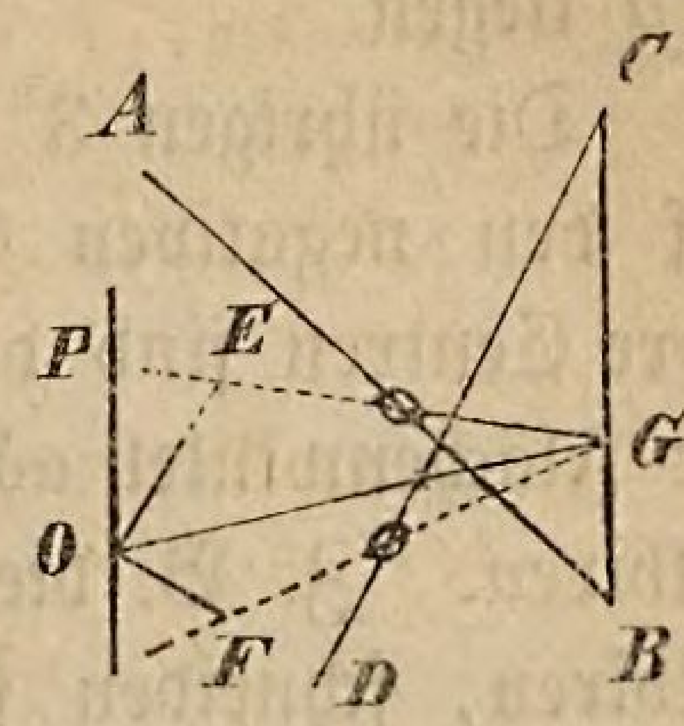



Wenn die Winkel *OAS*, *OBS*, *OCS* recht und die Strecken *OA*, *OB*, *OC* gleich sind, so liegt *OS* sowohl auf den Ebenen, welche die Winkel *ASB* und *BSC* normal halbiren, als auch auf der Ebene, welche den Winkel *CSA* normal halbirt, und ist die Axe eines Rotationskegels, dessen Kanten die Geraden *SA*, *SB*, *SC* sind. Ebenso liegen *SA*, *SB*, *SC'* auf einem Rotationskegel, u. s. w. Anstatt der Rotationskegel findet man Rotationscylinder, wenn die gegebenen Geraden parallel sind.

**11.** Ein Punct, der von 2 gegebenen Ebenen gleiche Abstände hat, liegt auf einer der Ebenen, welche die von den gegebenen Ebenen gebildeten Flächenwinkel halbiren. Wenn die Normalen *OE*, *OF* aus *O* zu den Ebenen *ABC*, *BCD* gleich sind, so wird *BC* von der Ebene *OEF* in *G* normal geschnitten (§. 2, 4) und *OG* halbirt den Winkel *EGF*.

Hieraus folgt, daß eine Gerade *OP* von 2 nicht auf einer Ebene liegenden Geraden *AB* und *CD* gleiche Abstände hat, wenn sie auf einer der Ebenen liegt, welche einen die Geraden *AB*, *CD* enthaltenden

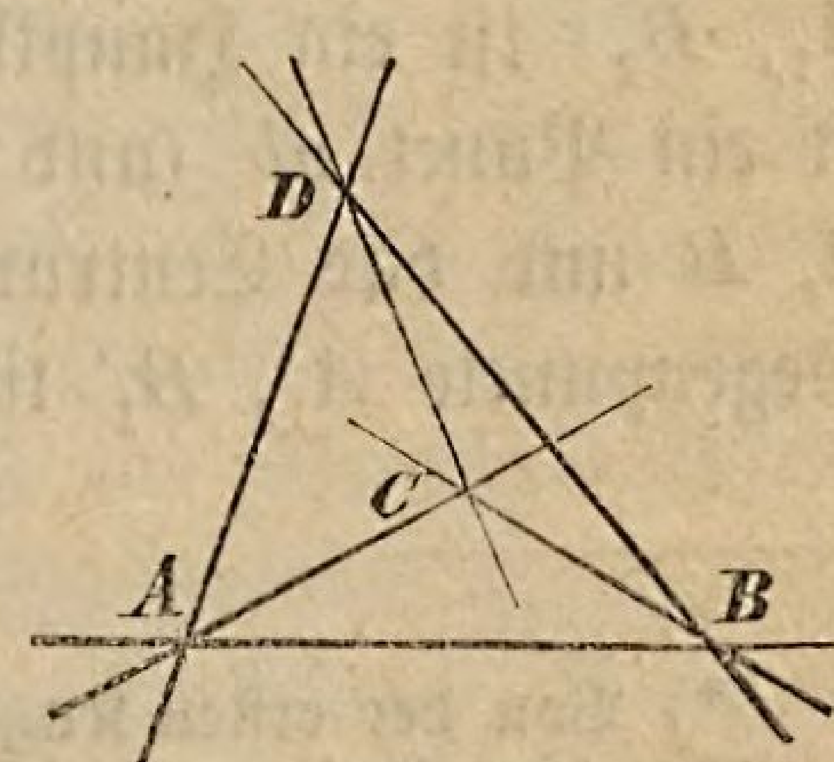
Flächenwinkel $A\overline{BC}D$ halbiren, und wenn sie zugleich mit der Kante $BC$ des Flächenwinkels parallel ist. Denn die Abstände der Geraden $OP$ von $AB$ und $CD$ sind den Abständen des Punctes $O$ von den Ebenen $ABC$ und $BCD$ gleich (§. 2, 9). Insbesondere haben alle Geraden der Ebene, welche die durch $AB$ und $CD$ bestimmte Schicht halbirt, von $AB$ und $CD$ gleiche Abstände.




Ein Punct, der von 3 Ebenen gleiche Abstände hat, liegt auf einer von 4 bestimmten Geraden, den Axen von Rotationskegeln, die von den 3 Ebenen berührt werden. Wenn der Punct $O$ von den Ebenen $ASB$, $BSC$ gleiche Abstände hat, so liegt er auf einer der Ebenen, welche den Flächenwinkel $A\overline{SB}C$ halbiren. Wenn die Gerade $SO$ auf zwei Ebenen liegt, welche die Flächenwinkel $A\overline{SB}C$, $B\overline{SC}A$ halbiren, so liegt sie auch auf einer Ebene, die den Flächenwinkel $C\overline{SA}B$ halbirt, weil $O$ von den 3 Ebenen gleiche Abstände hat. Die Gerade $SO$ bildet mit den 3 Ebenen gleiche Winkel u. s. w.

**12.** Zu 4 Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ giebt es im Allgemeinen 8 Puncte, die von ihnen gleiche Abstände haben, die Centren der Kugeln, welche die 4 Ebenen berühren.

Man hat zuvörderst die Räume zu unterscheiden, welche durch je eine Ebene getrennt werden. Von dem gemeinschaftlichen Punct $A$ der Ebenen $\beta$, $\gamma$, $\delta$ werde gesagt, daß er auf der positiven Seite der Ebene $\alpha$ liegt; von einem jenseitigen Punct werde gesagt, daß er auf der negativen Seite von $\alpha$ liegt. Auf den positiven Seiten von $\beta$, $\gamma$, $\delta$ liegen nach ähnlicher Annahme die gemeinschaftlichen Puncte $B$, $C$, $D$ der jedesmal übrigen Ebenen. Unter $\alpha\delta$ werde der auf den positiven Seiten von $\alpha$ und $\delta$ an der Kante $BC$ liegende Flächenwinkel verstanden, u. s. w.




Der gemeinschaftliche Punct der Ebenen, welche die Flächenwinkel $\alpha\delta$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$ halbiren, hat von den Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ gleiche Abstände; er liegt folglich auf den Ebenen, welche die übrigen Flächenwinkel $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ halbiren, und ist das Centrum der Kugel, welche die Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ berührt und auf ihren positiven Seiten liegt.

Der gemeinschaftliche Punct der Ebenen, welche die Nebenwinkel von $\alpha\delta$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$ halbiren, ist das Centrum der die vier Ebenen berührenden Kugel, welche auf der negativen Seite von $\delta$ liegt. Die gemein-

schaftlichen Puncte der Ebenen, welche zwei der Flächenwinkel $\alpha\delta$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$ und den Nebenwinkel des dritten halbiren, sind die Centren der die vier Ebenen berührenden Kugeln, die auf den negativen Seiten von $\gamma$, $\alpha$, $\beta$ liegen.

Die übrigen 3 von allen die 4 Ebenen berührenden Kugeln liegen auf den negativen Seiten von jedesmal zwei der Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$. Ihre Centren sind die gemeinschaftlichen Puncte der Ebenen, welche einen der Flächenwinkel $\alpha\delta$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$ und die Nebenwinkel der beiden andern halbiren. Z. B. die Ebenen, welche die Nebenwinkel von $\alpha\delta$ und $\beta\delta$ halbiren, schneiden sich in einer Geraden, die mit der Ebene, welche den Flächenwinkel $\gamma\delta$ halbirt, einen Punct gemein hat. Dieser Punct liegt entweder in dem Scheitelwinkel von $\gamma\delta$ d. i. auf den negativen Seiten von $\gamma$ und $\delta$; oder in dem Flächenwinkel $\gamma\delta$ auf den negativen Seiten von $\alpha$ und $\beta$ d. i. in dem Scheitelwinkel von $\alpha\beta$; oder er ist unendlich fern in der Richtung jener Geraden, wenn sie mit der den Flächenwinkel $\gamma\delta$ halbirenden Ebene parallel ist. Dieselben Bemerkungen gelten von jedem der beiden andern Centren. Von den drei letzten Kugeln können also eine, oder zwei, oder alle unendlich groß sein, und die 4 gegebenen Ebenen in unendlicher Ferne berühren.*)

## §. 4. Sphärik.**)

1. Durch zwei Puncte $A$, $B$ der Kugel (und deren Gegenpuncte $A_1$, $B_1$) ist ein Hauptkreis $AB$ bestimmt. Durch zwei Hauptkreise $a$, $b$ ist ein Punct $ab$ (und dessen Gegenpunct) bestimmt. Denn die Puncte $A$, $B$ und das Centrum der Kugel bestimmen eine Ebene, auf der die Gegenpuncte $A_1$, $B_1$ liegen, und welche die Kugel in einem Hauptkreis

---

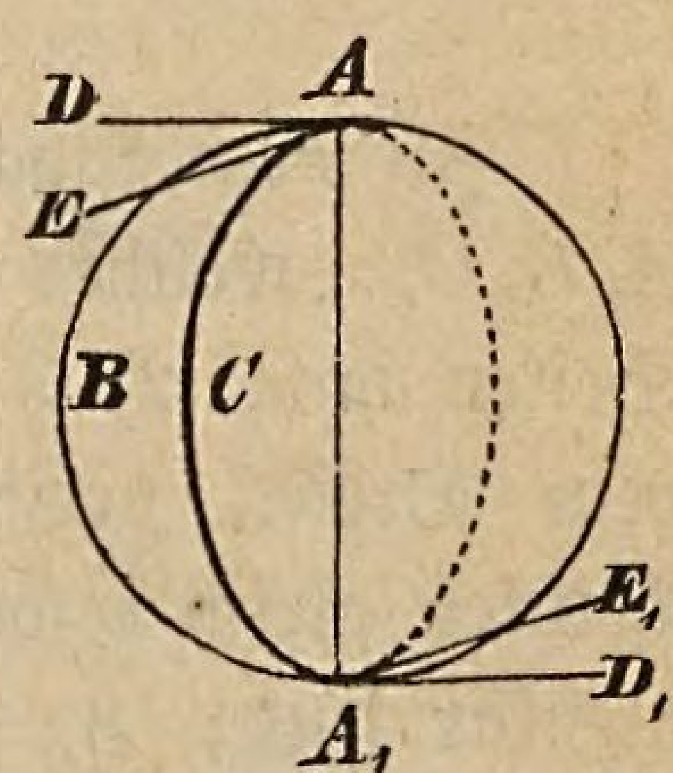
*) Von der ersten Kugel, welche 4 Ebenen berührt, hat Fermat gehandelt (Opp. p. 77), die übrigen Kugeln kommen bei Lagrange sur les pyram. 24 (Mém. de Berlin 1773) vor, genauer bei Feuerbach (die dreieckige Pyramide §. 36). Die Aufgabe, eine Kugel zu construiren, welche 4 gegebene Ebenen berührt, ist untergeordnet unter die allgemeinere Aufgabe: eine Kugel zu construiren, die mit 4 gegebenen Kugeln gegebene Winkel bildet. Die gegebenen Kugeln können Puncte oder Ebenen sein, die gegebenen Winkel können verschwinden. Vergl. Pascal oeuvres éd. Lahure II p. 396. Miquel Liouv. J. 11 p. 75.

**) Die Kugel ist im frühen Alterthum für die Dienste der Astronomie als Constructionsfeld betrachtet und untersucht worden. Ausführliche Abhandlungen der sphärischen Geometrie von Theodosius (1tes Jahrhundert vor Chr.) und Menelaus (Anfang des 2ten Jahrhunderts nach Chr.) sind übrig geblieben. Weiteren Zuwachs hat die Sphärik durch Vieta, Snellius, Girard, Euler, Lexell erhalten. Besondere Bearbeitungen der Sphärik sind erst in neuester Zeit von C. F. Schulz 1833 und Gudermann 1835 erschienen.

schneidet (§. 3, 4). Die Ebenen der Hauptkreise $a$, $b$ haben das Centrum der Kugel gemein, folglich schneiden sie sich in einem Diameter der Kugel (§. 1, 1).

Hiernach hat unter den sphärischen Linien der Hauptkreis dieselben Grundeigenschaften, wie unter den planen Linien die Gerade.

2. Zwei Puncte $A$, $B$ und deren Gegenpuncte $A_1$, $B_1$ theilen den hindurchgehenden Hauptkreis in 4 Bogen, $AB$, $BA_1$, $A_1B_1$, $B_1A$, unter denen zwei folgende supplementär sind, d. h. zu einem Halbkreis sich ergänzen; zwei getrennte Bogen, wie $AB$ und $A_1B_1$, sind einander gleich.




Zwei Hauptkreise theilen die Kugel in 4 Felder, sphärische Winkel*) genannt. Der Winkel, welchen in $A$ und $A_1$ die Hauptkreise $AB$ und $AC$ bilden, ist derselbe, welchen die in $A$, $A_1$ die Hauptkreise berührenden Geraden $AD$ und $AE$, $A_1D_1$ und $A_1E_1$ auf den Ebenen $ADE$ und $A_1D_1E_1$ bilden (Planim. §. 3, 6). Nun sind die Tangenten $AD$, $AE$, $A_1D_1$, $A_1E_1$ normal zu dem Diameter $AA_1$, also sind die Ebenen $ADE$, $A_1D_1E_1$ normal zu dem Diameter $AA_1$ (§. 2, 2), und die Winkel $DAE$, $D_1A_1E_1$ sind Normalschnitte des Flächenwinkels $B\overline{AA_1}C$ (§. 2, 5), in welchem der sphärische Winkel $ABA_1C$ enthalten ist.

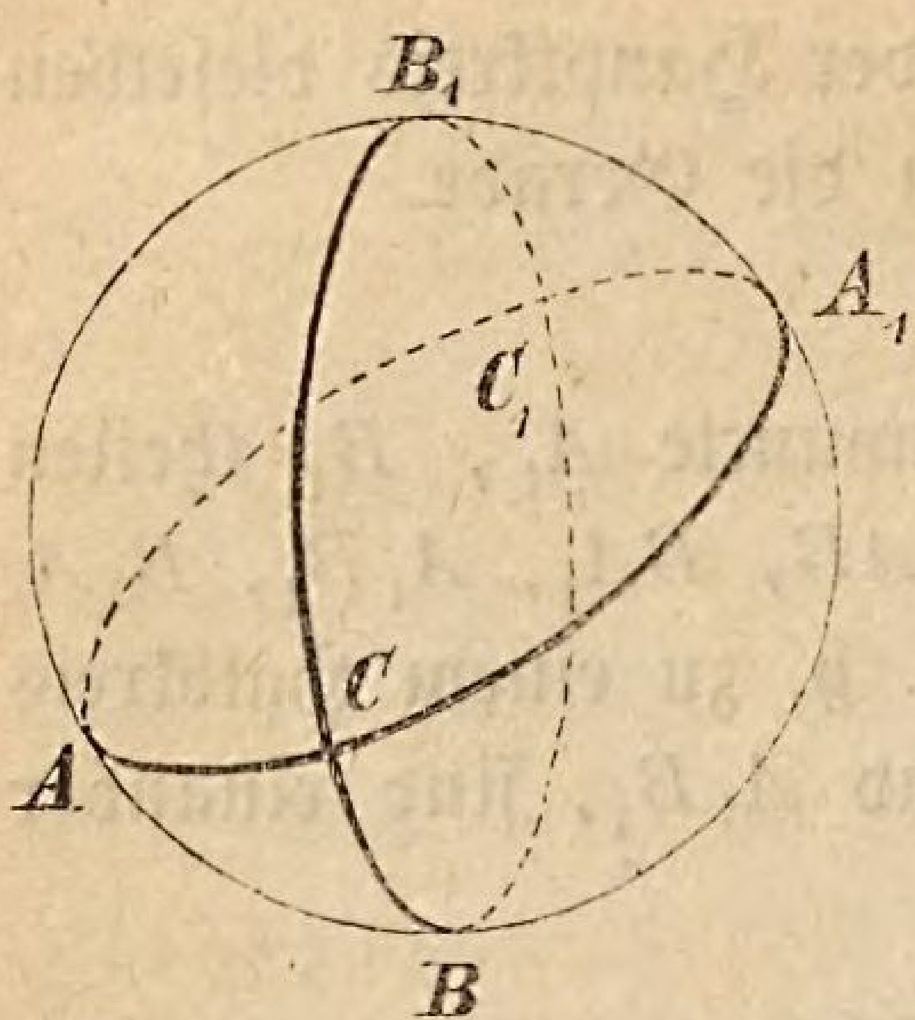
Wenn die von den Hauptkreisen $a$, $b$ und die von den Hauptkreisen $c$, $d$ in ihren Durchschnittspuncten gebildeten Winkel gleich sind, so sind die von den Ebenen $a$, $b$ und die von den Ebenen $c$, $d$ eingeschlossenen Flächenwinkel gleich (§. 2, 5), und die in diesen Flächenwinkeln enthaltenen sphärischen Winkel congruent. Demnach ist ein sphärischer Winkel durch den Winkel bestimmt, welchen die ihn einschließenden Hauptkreise in einem ihrer Durchschnittspuncte bilden. Eine Halbkugel ist ein gestreckter sphärischer Winkel. Unter den vier von zwei Hauptkreisen gebildeten sphärischen Winkeln erscheinen zwei folgende als Nebenwinkel, zwei getrennte als Scheitelwinkel.

3. Drei Puncte der Kugel $A$, $B$, $C$ (und deren Gegenpuncte $A_1$,

---

*) Uneigentlich „ein sphärisches Zweieck", weil unter zwei Puncten der Kugel in der Regel solche verstanden werden, von denen nicht einer des andern Gegenpunct ist. Legendre (Géom. VII, déf. 9) nennt den sphärischen Winkel fuseau (Spindel).

$B_1$, $C_1$, die nicht auf einem Hauptkreis liegen, bestimmen drei Hauptkreise, welche die Kugel in 8 Felder theilen, *sphärische Dreiecke* genannt. Die Bogen*) $AB$, $BC$, $CA$, welche




die Puncte $A$, $B$, $C$ der Reihe nach verbinden, heißen die Seiten, die von den Seiten an ihren gemeinschaftlichen Puncten der Reihe nach gebildeten Winkel $ACB$, $CBA$, $BAC$ heißen die Winkel des sphärischen Dreiecks. Das Dreieck heißt *gleichschenkelig*, wenn zwei Seiten einander gleich sind, *gleichseitig*, wenn alle drei Seiten einander gleich sind, *rechtseitig*, wenn eine Seite ein Quadrant ist, *rechtwinkelig*, wenn ein Winkel recht ist.

Zu dem sphärischen Dreieck $ABC$ gehören 1) das *Gegendreieck* $A_1B_1C_1$, welches mit dem Dreieck der Reihe nach gleiche Winkel und Seiten hat; 2) 3 *Nebendreiecke*, $ABC_1$, $BCA_1$, $CAB_1$, welche mit dem Dreieck der Reihe nach eine Seite und den gegenüberliegenden Winkel gleich haben, während die übrigen Seiten und Winkel supplementär sind; 3) 3 *Scheiteldreiecke* $A_1B_1C$, $B_1C_1A$, $C_1A_1B$, die Gegendreiecke der Nebendreiecke.

Unter einem *sphärischen Polygon* versteht man die von Bogen der Hauptkreise eingeschlossene Figur, welche mehr der Reihe nach gegebene Puncte der Kugel, den ersten mit dem zweiten, . . , den letzten mit dem ersten, verbinden. Die Ausdrücke Seiten, Winkel, Fläche, Diagonalen werden in der Sphärik wie in der Planimetrie gebraucht, mit dem Unterschiede, daß Hauptkreise, Kugel an die Stelle von Geraden, Ebene treten. Zu jeder sphärischen Figur gehört deren *Gegenfigur*, die Figur der Gegenpuncte der gegebenen Figur. Es giebt sphärische Figuren, welche mit ihren Gegenfiguren zusammenfallen, z. B. ein Hauptkreis ist seine eigene Gegenfigur.

**4.** Ein sphärisches Dreieck und sein Gegendreieck sind im Allgemeinen nicht congruent, und nur dann congruent, wenn das Dreieck gleichschenkelig ist. Eine sphärische Figur ist mit ihrer Gegenfigur gleich und ähnlich und entgegengesetzten Sinnes (Planim. §. 7, 1); beide haben nicht nur der Reihe nach gleiche Seiten und Winkel, sondern auch gleiche Flächen.**)

---

*) Unter *Bogen* schlechthin werden in der Sphärik Bogen von Hauptkreisen verstanden. Die Benennung *sphärisches Dreieck* kommt noch nicht bei *Theodosius*, wohl aber bei *Menelaus* vor.

**) Es ist den alten Geometern nicht entgangen, daß mit der Gleichheit und

Beweis. Legt man den Winkel $C$ des Dreiecks $ABC$ auf den Winkel $C_1$ des Gegendreiecks $A_1B_1C_1$, so fallen die Bogen $CA$, $CB$ längs der Bogen $C_1B_1$, $C_1A_1$; aber es fällt weder $A$ auf $B_1$, noch $B$ auf $A_1$, außer wenn $CA = C_1B_1 = CB$ ist. Einem Betrachter, der auf der Außenseite der Kugel die sich entsprechenden Seiten $AB$, $A_1B_1$ der Dreiecke $ABC$, $A_1B_1C_1$ zurücklegt, liegt $C$ zur Linken, $C_1$ zur Rechten.

Wenn $O$ das Centrum der Kugel, $P$ die Normalprojection von $O$ auf die Ebene $ABC$ ist, und die Gerade $OP$ die Kugel in $D$ und $D_1$ schneidet, so sind die planen Dreiecke $OPA$, $OPB$, $OPC$ gleich und ähnlich, mithin sowohl die Winkel $POA$, $POB$, $POC$, als auch die Bogen $DA$, $DB$, $DC$ gleich. Die gleichschenkeligen sphärischen Dreiecke $DAB$, $DBC$, $DCA$ haben aber mit ihren Gegendreiecken $D_1A_1B_1$, $D_1B_1C_1$, $D_1C_1A_1$ der Reihe nach gleiche Flächen, also sind auch die Flächen $ABC$ und $A_1B_1C_1$ einander gleich. Vergl. Planim. §. 9, 9.

5. Wenn in einem sphärischen Dreieck die Seiten und Winkel einzeln weniger als $180^0$ betragen, so ist die Summe seiner Winkel größer als $180^0$, die Differenz zwischen dieser Summe und $180^0$ heißt der Exceß des sphärischen Dreiecks. Die Fläche des sphärischen Dreiecks ist der Fläche eines zweirechtwinkeligen sphärischen Dreiecks gleich, dessen dritter Winkel der Exceß des gegebenen sphärischen Dreiecks ist.*)

Beweis. Die Summe der sphärischen Winkel (2) $ABA_1C$, $BCB_1A$, $CA_1C_1B_1$ übertrifft die von dem Hauptkreis $ABA_1B_1$ eingeschlossene Halbkugel, auf welcher der Punct $C$ liegt, um die Dreiecke $ABC$ und $A_1B_1C_1$. Also beträgt die Summe der Winkel $BAC + CBA + ACB$ mehr als $180^0$. Die Dreiecke $ABC$ und $A_1B_1C_1$ haben gleiche

---

Aehnlichkeit von Raumfiguren deren Congruenz nicht nothwendig verbunden ist. Vergl. Eucl. XI, 26. Archim. Conoid. et Sph. 20. Die später bisweilen übersehene Incongruenz eines sphärischen Dreiecks und seines Gegendreiecks wurde unter den Neuern bestimmt ausgesprochen von Segner 1741. Vergl. Klügel math. W. 4 p. 859. Den obigen Beweis für die Gleichheit jener incongruenten Flächen hat Legendre von einem ungenannten ausländischen Mathematiker erhalten und in den Elém. de géom. VII, 21 (2te Ausg. 1800) mitgetheilt. Incongruente gleiche und ähnliche Raumfiguren werden häufig nach Legendre (Géom. VI, déf. 16) symmetrisch genannt.

*) Dieser Satz ist durch Girard (Invention nouvelle en algèbre 1629) bekannt geworden, der ihn aber unvollkommen bewiesen hat. Mit dem obigen einfachen Beweis wurde derselbe Satz von Cavalieri 1632 (Directorium generale uranometricum c. 8 p. 315) mitgetheilt. Die Regel für die Berechnung der Fläche eines sphärischen Polygons wird von Broscius apologia Aristot. et Eucl. 1690 p. 78 „ex antiquis in Vitellonem notis" angeführt. Diese Hinweisung sowie die Notiz desselben Autors p. 79: demonstratio amplitudinis anguli solidi refertur ab H. Briggio ad Th. Harriotum — ermangeln bis jetzt der weitern Bestätigung.

Flächen (4), folglich ist die doppelte Fläche $ABC$ die Differenz zwischen der Summe der genannten drei sphärischen Winkel und einer Halbkugel, d. i. ein sphärischer Winkel, dessen Schenkel im Scheitel um den Exceß $BAC + CBA + ACB - 180^0$ von einander abweichen.

Der Hauptkreis, welcher die Schenkel eines sphärischen Winkels halbirt, theilt den sphärischen Winkel in zwei gleichschenkelige sphärische Dreiecke mit einer gemeinschaftlichen Basis, an welcher rechte Winkel liegen (§. 2, 1 und 4). Die gleichschenkeligen Dreiecke sind congruent, folglich ist jedes von ihnen halb so groß als der sphärische Winkel. Also ist die Fläche eines sphärischen Dreiecks der Fläche eines zweirechtwinkeligen sphärischen Dreiecks gleich, dessen dritter Winkel der Exceß des gegebenen sphärischen Dreiecks ist.

Anmerkung. Wenn sphärische Dreiecke verschiedener Kugeln gleiche Flächen haben, so hat das Dreieck der größern Kugel den kleinern Exceß. Auf einer unendlich großen Kugel kann ein sphärisches Dreieck einen endlichen Exceß nicht haben, die Excesse aller sphärischen Dreiecke verschwinden. Aber nur unter der der gemeinen Geometrie zu Grunde liegenden Voraussetzung (Planim. §. 2, 7) ist ein unendlich großer Hauptkreis gerade und eine unendlich große Kugel plan.

Als Einheit der sphärischen Flächen wird das zweirechtwinkelige sphärische Dreieck genommen, dessen dritter Winkel eine Einheit der Winkel ist. Wenn man nun, wie gewöhnlich, unter der Fläche ihr Verhältniß zur sphärischen Flächeneinheit, unter dem Winkel sein Verhältniß zur Winkeleinheit versteht, so ist die Fläche des sphärischen Dreiecks seinem Exceß gleich.

Hiernach ist ein sphärischer Winkel doppelt so groß als der Winkel, unter welchem die ihn einschließenden Hauptkreise sich schneiden. Für die Fläche eines sphärischen Polygons von $n$ Seiten findet man (mit Rücksicht auf Planim. §. 9, 10) die Summe seiner Winkel vermindert um $(n - 2) . 180^0$.

Wenn zwei sphärische Dreiecke gleiche Summen ihrer Winkel haben, so haben sie gleiche Flächen. Wenn zwei sphärische Polygone gleiche Summen ihrer Winkel haben, so sind ihre Flächen gleich oder sie unterscheiden sich um eine ganze Anzahl von Viertelkugeln.

6. Die Hauptkreise, welche einen gegebenen Hauptkreis normal schneiden, gehn durch einen Punct (und dessen Gegenpunct), den Pol (und Gegenpol) des Hauptkreises. Die Bogen, welche die Puncte des Hauptkreises mit seinem Pole verbinden, sind Quadranten.

Die Quadranten, welche von einem Puncte der Kugel ausgehn, endigen auf einem Hauptkreis, der Polare des Punctes (und des Gegenpunctes). Die durch den Punct gehenden Hauptkreise schneiden die Polare des Punctes normal.*)

Beweis. Die Ebenen, welche zur Ebene des Hauptkreises normal sind und das Centrum der Kugel gemein haben, schneiden sich in einer Normale der Ebene des Hauptkreises (§. 2, 4).

Die Geraden, welche zu einem Radius der Kugel normal sind und das Centrum gemein haben, liegen auf einer Ebene (§. 2, 2), die normal steht zu jenem Radius und zu den denselben Radius enthaltenden Ebenen.

Man findet den Pol eines Hauptkreises, indem man in einem beliebigen Punct desselben einen normalen Hauptkreis zieht und auf demselben von jenem Punct aus einen Quadranten abschneidet. Man findet die Polare eines Punctes, indem man von demselben aus einen beliebigen Quadranten zieht und normal zu ihm durch seinen Endpunct einen normalen Hauptkreis legt. Wenn ein Punct der Pol eines Hauptkreises ist, so ist der Hauptkreis die Polare des Punctes. Wenn Hauptkreise durch einen Punct gehn, so liegen ihre Pole auf einem Hauptkreis, der Polare des Punctes; wenn Puncte auf einem Hauptkreis liegen, so gehn ihre Polaren durch einen Punct, den Pol des Hauptkreises.

7. Der Bogen eines Hauptkreises ist durch seinen Anfangspunct und Endpunct unzweideutig bestimmt, wenn der Sinn gegeben ist, in welchem der Hauptkreis von dem Anfangspunct bis zum Endpunct durchlaufen werden soll (Planim. §. 4, 6). Während man außen auf der convexen Seite der Kugel den Hauptkreis in dem vorgeschriebenen Sinne zurücklegt, behält man einen seiner Pole (Pol und Gegenpol) zur Linken, den andern zur Rechten; unter dem Pol des Hauptkreises soll der zur Linken liegende verstanden werden, wenn die Winkel auf der Kugel durch linksum gehende Drehungen beschrieben werden. Demgemäß wird die Polare eines Punctes in solchem Sinne durchlaufen, daß der Punct der zur Linken liegende Pol seiner Polare ist.**) Unter diesen Voraussetzungen gilt folgender Satz:

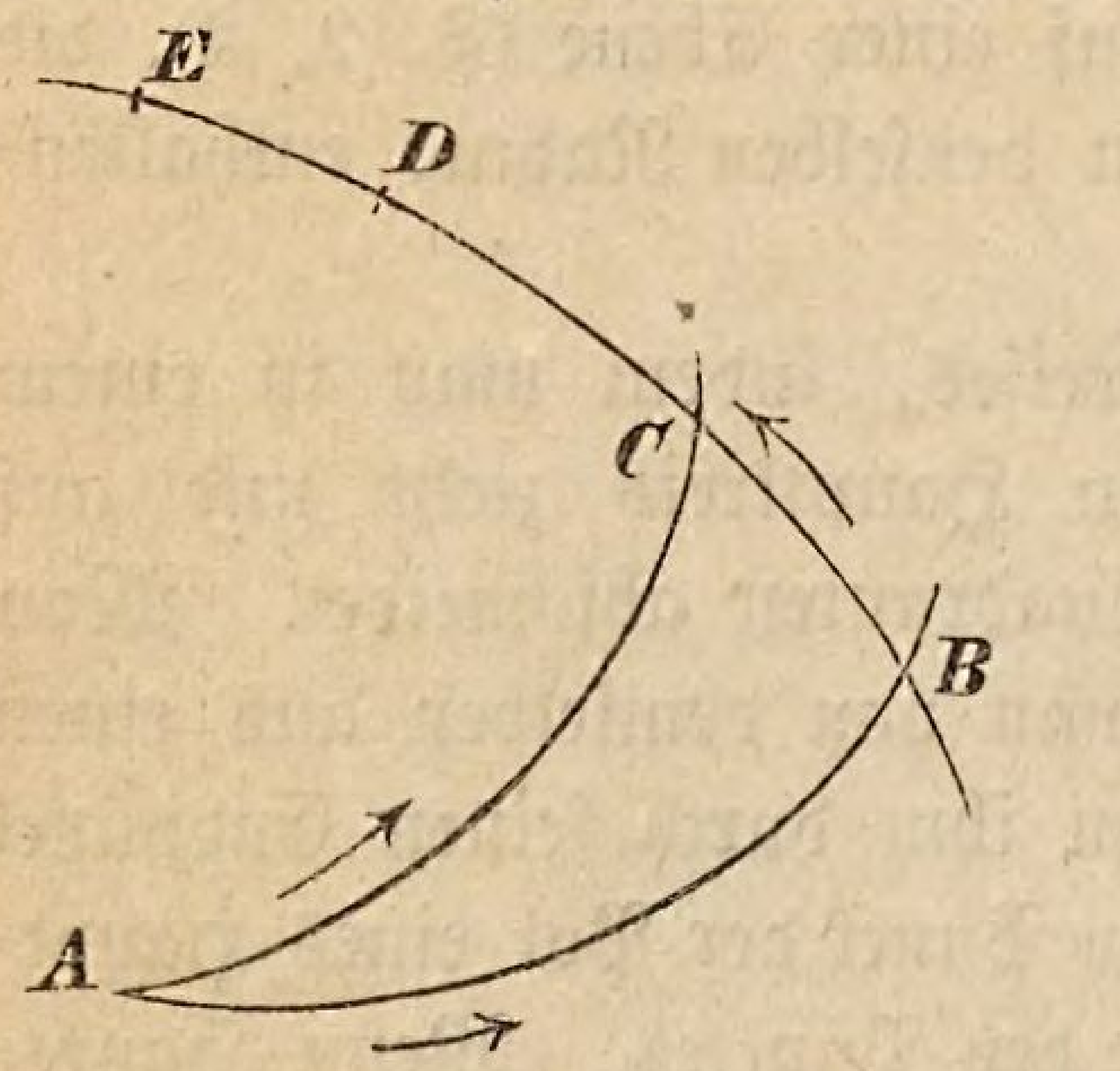
---

*) Theodos. Sph. I. Vergl. die Anmerkung zu §. 1, 9. Der Ausdruck „Pol eines Kreises" kommt früher z. B. bei Archimedes vor (Kugel und Cylinder II), und bedeutet das sphärische Centrum des Kreises. S. unten 12.

**) Auf diese wichtige Unterscheidung hat Gauß (Disquis. generales circa superficies curvas 2, VI) aufmerksam gemacht. Vergl. Schulz Sphärik I, 12. und Möbius anal. Sphärik 16 und 18.

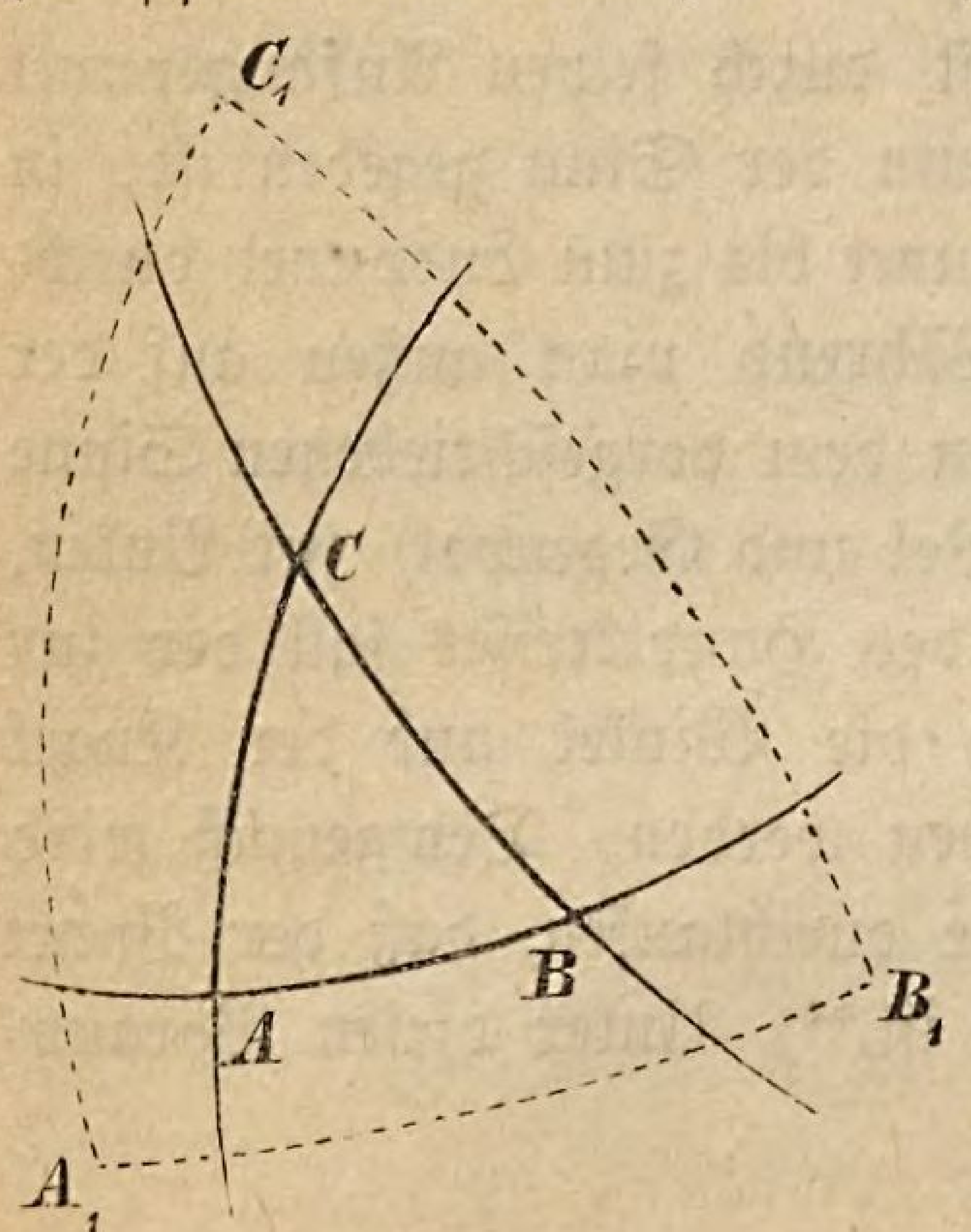
Der von zwei Hauptkreisen eingeschlossene Winkel ist dem von ihren Polen eingeschlossenen Bogen gleich, dessen Pol der Scheitel des Winkels ist. Der von zwei Puncten eingeschlossene Bogen ist dem von ihren Polaren eingeschlossenen Winkel gleich, dessen Scheitel der Pol des Bogens ist, — wobei um der Kürze willen Bogen statt des zu ihm gehörigen Centriwinkels gesetzt ist.

Beweis. Werden die durch $A$ gehenden Hauptkreise von der Polare des Punctes $A$ in $B$ und $C$ geschnitten, so daß die Schenkel




des in Betracht kommenden Winkels $AB$ und $AC$ je einen Quadranten betragen, so ist der Bogen $BC$ unzweideutig bestimmt, der zu ihm gehörige Centriwinkel ist ein Normalschnitt des von den Ebenen der Hauptkreise eingeschlossenen Flächenwinkels (§. 2, 5) und dem Winkel der Hauptkreise gleich (2). Werden nun auf der Polare von $A$ in dem bestimmten Sinne die Quadranten $BD$ und $CE$ abgeschnitten, so sind $D$ und $E$ die Pole von $AB$ und $AC$, und man hat $BE - BD = BE - CE$, $DE = BC$.

8. Zu einem sphärischen Dreieck $ABC$ gehört ein Polardreieck (Supplementardreieck) $A'B'C'$, dergestalt, daß nicht nur die Puncte $A'$,




$B'$, $C'$ die Pole der Seiten $BC$, $CA$, $AB$, sondern auch die Seiten $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, die Polaren der Puncte $A$, $B$, $C$ sind, mithin $ABC$ wiederum das zu $A'B'C'$ gehörige Polardreieck ist.*) Ist $A'$ der Pol von $BC$, $B'$ der Pol von $CA$, so betragen die Bogen $CA'$, $CB'$ je einen oder drei Quadranten, und der Bogen $A'B'$ kann in solchem Sinne beschrieben werden, daß $C$ sein Pol ist, u. s. w.

Die Winkel eines Dreiecks sind der Reihe nach Supplemente der Seiten des Polardreiecks. Denn der von $CA$ und $CB$ eingeschlossene Winkel ist dem von ihren Polen $B'$ und $A''$ eingeschlossenen Bogen gleich (7). Nun ist $A''$ der Gegenpunct von $A'$, also $A'B' + B'A'' = 180^0$, folglich u. s. w.

---

*) Vergl. die Anmerkung zu §. 1, 9. Polardreiecke werden deshalb auch reciproke Dreiecke genannt. Gudermann nied. Sphärik 20.

Die Fläche des Dreiecks und der Perimeter des Polardreiecks ergänzen sich zu 360°. Haben die Winkel des Dreiecks $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, die Seiten des Polardreiecks $a'$, $b'$, $c'$ Grad, so ist

$$\alpha + a' = 180^0,\ \beta + b' = 180^0,\ \gamma + c' = 180^0$$

$$(\alpha + \beta + \gamma - 180^0) + (a' + b' + c') = 360^0$$

wovon das erste Glied die Fläche des Dreiecks, das andere den Perimeter des Polardreiecks bedeutet (5).

9. Zu jeder sphärischen Figur gehört eine Polarfigur, deren Puncte der Reihe nach die Pole der Seiten der Figur sind, und deren Seiten der Reihe nach die Polaren der Puncte der Figur sind. Wenn der Perimeter der Figur nicht aus Bogen von Hauptkreisen besteht, so sind ihre Seiten als verschwindend klein und mit berührenden Hauptkreisen zusammenfallend zu betrachten, deren Pole auf dem Perimeter der Polarfigur liegen. Eine sphärische Figur ist die Polarfigur ihrer Polarfigur.

Durch Zusammensetzung der Figur aus Dreiecken findet man, daß die Fläche der sphärischen Figur und der Perimeter ihrer Polarfigur zu 360° sich ergänzen (8). Aus der Quadratur der Figur wird die Rectification der Polarfigur gefunden, und umgekehrt.

Jede Eigenschaft einer sphärischen Figur kann auch als Eigenschaft ihrer Polarfigur betrachtet werden, und giebt vermöge des Zusammenhangs beider Figuren eine zugeordnete Eigenschaft der ursprünglichen Figur zu erkennen. In dem Ausdruck der zugeordneten Eigenschaft stehn Hauptkreise an der Stelle von Puncten, Seiten an der Stelle von Winkeln, Perimeter an der Stelle von Flächen, und umgekehrt. Die Eigenschaften der sphärischen Figuren sind dual.*)

10. Unter den Eigenschaften des gemeinen sphärischen Dreiecks, dessen Seiten und Winkel einzeln 180° nicht erreichen, sind zu erwähnen (Menelaus Sph. I):

I. Die Summe der Winkel ist größer als 180°. Die Summe der Seiten ist kleiner als 360°.

Beweis. Der Exceß des sphärischen Dreiecks ist oben (5) nachgewiesen worden. Der Perimeter des Dreiecks wird durch den Exceß des Polardreiecks zu 360° ergänzt (8).

II. Ein Außenwinkel ist größer als die Differenz, kleiner als die

---

*) Die Polarfigur und die Beziehung ihres Perimeters zur Fläche der Figur findet man erwähnt bei Schulz Sphärik I p. 21 und II p. 241. Ueber die Dualität vergl. Gergonne Ann. 15 p. 302.

Summe der beiden Winkel, welche nicht neben ihm liegen. Eine Seite ist größer als die Differenz, kleiner als die Summe der beiden andern Seiten.*)

Beweis. Haben im Dreieck $ABC$ die Winkel und die gegenüberliegenden Seiten der Reihe nach $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $a$, $b$, $c$ Grad, so ist im Nebendreieck $A_1BC$ (I)

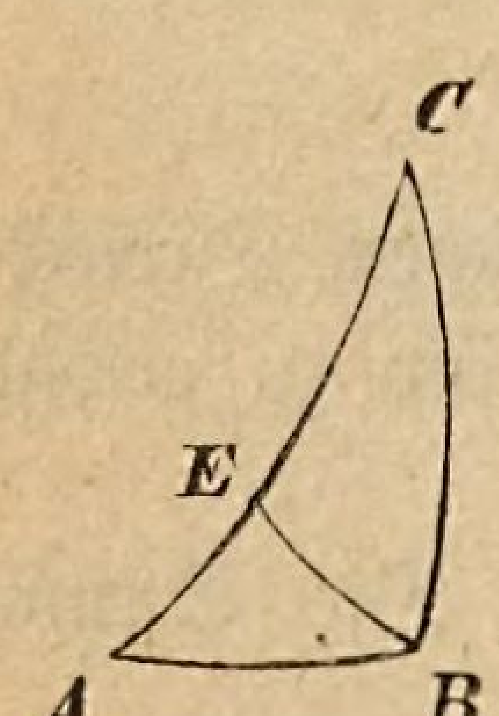
$$\alpha + 180^0 - \beta + 180^0 - \gamma > 180^0$$
$$a + 180^0 - b + 180^0 - c < 360^0$$

d. h. $180^0 - \gamma > \beta - \alpha$, $a - b < c$, u. s. w. Im Dreieck $ABC$ hat man $\alpha + \beta > 180^0 - \gamma$.

Anmerkung. Der kleinere Bogen eines Hauptkreises ist kürzer als eine andere Linie, die auf der Kugel zwischen denselben Endpuncten enthalten ist, und giebt den sphärischen Abstand seiner Endpuncte an. Denn $AB$ ist kürzer als die aus Bogen von Hauptkreisen bestehenden Linien $BC + CA$, $BC + CD + DA$, . .; also ist $AB$ kürzer, als eine Linie, die aus unendlich viel unendlich kleinen Bogen von Hauptkreisen bestehend mit irgend einer sphärischen Curve zwischen $A$ und $B$ zusammenfällt.

III. Gleichen Winkeln liegen gleiche Seiten gegenüber; dem größeren Winkel liegt die größere Seite gegenüber. Gleichen Seiten liegen gleiche Winkel gegenüber; der größeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber.

Beweis. Wenn im Dreieck $ABC$ die Winkel $A$ und $B$ einander gleich sind, so deckt das Dreieck $ABC$ sein Gegendreieck $A_1B_1C_1$, wenn man $A$ mit $B_1$, $B$ mit $A_1$ vereint. Also ist die Seite $BC = A_1C_1 = AC$.




Wenn aber der Winkel $CBA > BAC$, so macht man den Winkel $EBA = BAC$, und erhält $EB = EA$. Nun ist $CE + EB > BC$ (II), folglich $CA > BC$.

Wenn das Dreieck zwei gleiche Winkel hat, so hat sein Polardreieck zwei gleiche Seiten, u. s. w.

Anmerkung. Die Summe von zwei Winkeln ist zugleich mit der Summe der gegenüberliegenden Seiten kleiner, oder so groß, oder größer als $180^0$. Wenn z. B. die Summe der Winkel $ACB + BAC < 180^0$, so ist in dem Nebendreieck $CBA_1$ der Winkel $CA_1B < BCA_1$, folglich die Seite $BC < BA_1$, d. h. $AB + BC < 180^0$.

*) Gewöhnlich wird dieser Satz vorangestellt und nach Eucl. XI, 20 aus Betrachtungen abgeleitet, welche der Sphärik fremd sind.

**11.** I. Wenn zwei sphärische Dreiecke zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel der Reihe nach gleich haben, so sind sie gleich und ähnlich. Wenn zwei sphärische Dreiecke zwei Winkel und die daranliegende Seite der Reihe nach gleich haben, so sind sie gleich und ähnlich.

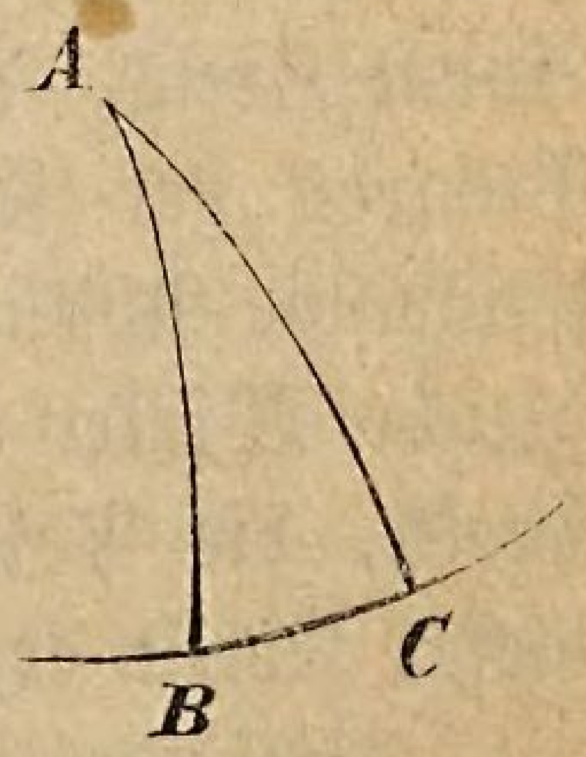
II. Wenn zwei sphärische Dreiecke die drei Seiten der Reihe nach gleich haben, so sind sie gleich und ähnlich. Wenn zwei sphärische Dreiecke die drei Winkel der Reihe nach gleich haben, so sind sie gleich und ähnlich.

Beweis. Unter den gegebenen Bedingungen sind die Dreiecke congruent, wenn sie einerlei Sinnes sind; dagegen kann das eine Dreieck das zu dem andern gehörige Gegendreieck decken, wenn die Dreiecke entgegengesetzten Sinnes sind. Der zweite Satz wird auf den ersten zurückgeführt. Vergl. Planim. §. 5, 2. Die Zusätze werden durch Anwendung der Sätze auf die zu den Dreiecken gehörigen Polardreiecke abgeleitet.

III. Wenn in einem sphärischen Dreieck zwei Seiten unverändert bleiben und der eingeschlossene Winkel wächst, so wächst auch die ihm gegenüberliegende Seite. Wenn in einem sphärischen Dreieck zwei Winkel unverändert bleiben und die anliegende Seite wächst, so wächst auch der ihr gegenüberliegende Winkel.

Beweis. Wie Planim. §. 5, 5. Der Zusatz folgt aus der Betrachtung des Polardreiecks.

IV. Wenn in dem sphärischen Dreieck $ABC$ der Winkel $B$ recht, die eine Cathete $AB$ spitz ist und unverändert bleibt, während die andere Cathete $BC$ von 0 bis $90^0$ und dann von $90^0$ bis $180^0$ wächst, so wächst die Hypotenuse $AC$ von $AB$ bis $90^0$ und dann von $90^0$ bis $180^0 - AB$, der der unveränderlichen Cathete gegenüberliegende Winkel $C$ fällt von $90^0$ bis $AB$ und steigt dann wieder bis $90^0$. Wenn in dem sphärischen Dreieck $ABC$ die Seite $AC$ recht, der eine anliegende Winkel $C$ spitz ist und unverändert bleibt, während der andere anliegende Winkel $A$ von 0 bis $90^0$ und dann von $90^0$ bis $180^0$ wächst, so fällt der der rechten Seite gegenüberliegende Winkel $B$ von $180^0 - C$ bis $90^0$ und dann von $90^0$ bis $C$, die dem unveränderlichen Winkel gegenüberliegende Seite $AB$ fällt von $90^0$ bis $C$ und steigt dann wieder von $C$ bis $90^0$.

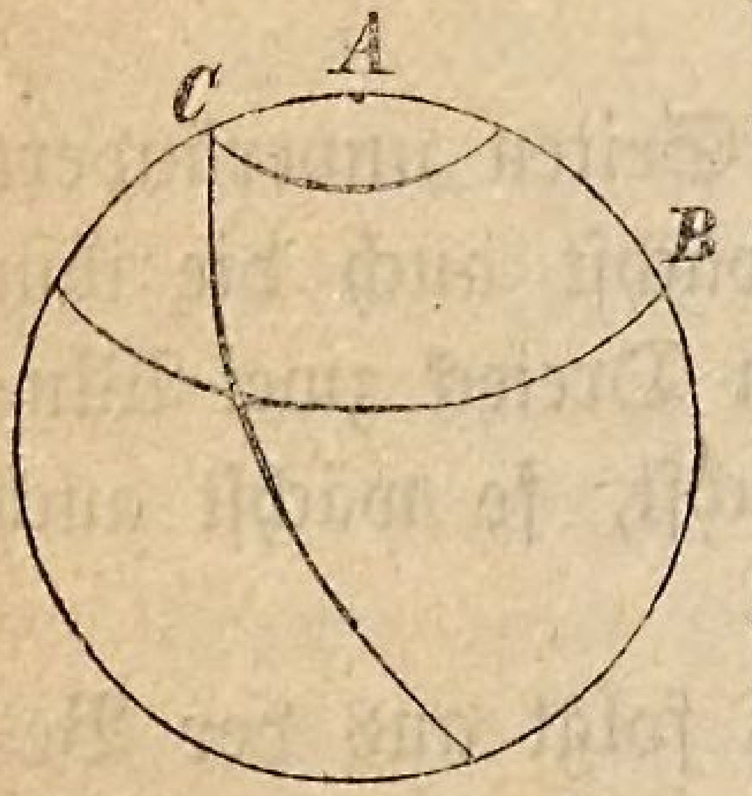



Beweis. Durch Betrachtung der zu den Bogen gehörigen Centriwinkel nach §. 2, 10. Der Zusatz wird aus dem Polardreieck des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ abgeleitet.

Anmerkung. Wenn zwei sphärische Dreiecke einen rechten Winkel, die Hypotenuse und eine Cathete, oder eine rechte Seite, den gegenüberliegenden und einen anliegenden Winkel der Reihe nach gleich haben, so sind sie gleich und ähnlich.

Unter den Bogen, welche von einem Puncte an einen Hauptkreis reichen, ist der spitze und normale der kürzeste und giebt den sphärischen Abstand des Punctes vom Hauptkreis an. Der sphärische Abstand eines Punctes von einem Hauptkreis ist das Complement seines sphärischen Abstands von dem Pole des Hauptkreises.

12. Der Pol $A$ des Hauptkreises, dessen Ebene mit der Ebene eines Kreises der Kugel parallel ist, hat von allen Puncten des Kreises gleiche sphärische Abstände (vergl. §. 2, 7), und heißt das sphärische Centrum des Kreises. Die gleichen Bogen, welche das sphärische Centrum mit Puncten des Kreises verbinden, heißen sphärische Radien des Kreises.




Ein Hauptkreis, der durch einen Punct des Kreises normal zu dem sphärischen Radius des Punctes geht, und dessen sphärischer Abstand vom sphärischen Centrum ein sphärischer Radius ist, ist eine sphärische Tangente des Kreises (vergl. Planim. §. 3, 5). Der sphärische Abstand des Pols einer sphärischen Tangente des Kreises von dem sphärischen Centrum ergänzt den sphärischen Radius zu einem Quadranten. Wenn $B$ der Pol des Hauptkreises ist, der einen um $A$ beschriebenen Kreis in $C$ berührt, so ist $CA + AB = CB = 90^0$.

Die Puncte, welche von einem gegebenen Punct der Kugel, mithin auch von der Polare des Punctes gleiche Abstände haben, liegen auf einem Kreis, dessen sphärisches Centrum der gegebene Punct ist. Die Polaren der Kreispuncte haben von dem sphärischen Centrum gleiche sphärische Abstände und bilden mit der Polare des sphärischen Centrum gleiche Winkel (7); daher berühren sie einen concentrischen (parallelen) Kreis, die Polarfigur des gegebenen Kreises. Die sphärischen Radien dieser Kreise ergänzen sich zu $90^0$.*)

Insbesondere hat der einem sphärischen Dreieck umgeschriebene Kreis den dem Polardreieck eingeschriebenen Kreis zur Polarfigur. Diese Kreise sind concentrisch (parallel), ihre sphärischen Radien ergänzen sich

---

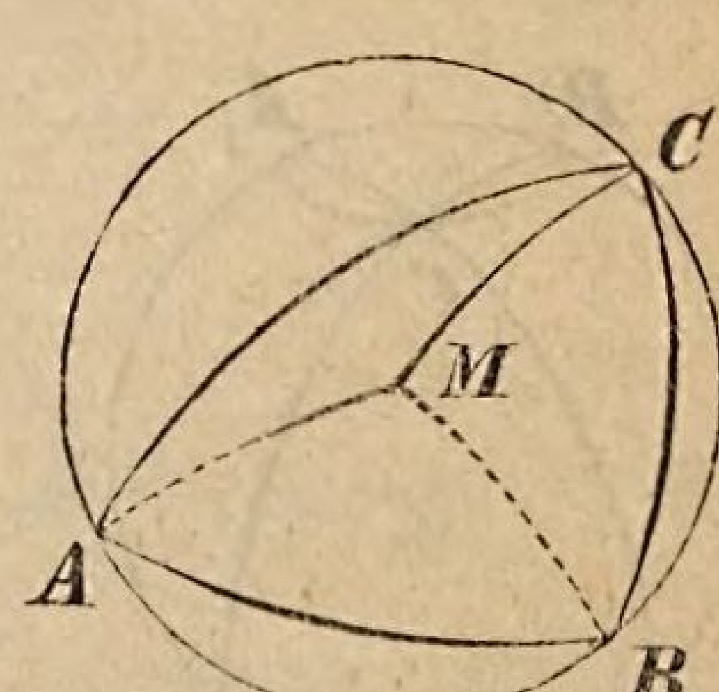
*) Schulz Sphärik I, 44. Der in der Geographie sogenannte Polarkreis ist die Polarfigur des auf derselben Hemisphäre liegenden Wendekreises. Der mit dem Aequator parallele Kreis, dessen Breite $45^0$ beträgt, fällt mit seinem Polarkreis zusammen.

zu 90°. Die Polaren der sphärischen Centren der Kreise, von denen einer dem sphärischen Dreieck umgeschrieben, der andere demselben eingeschrieben ist, sind mit den Kreisen der Reihe nach parallel; also ist der Flächenwinkel der Ebenen dieser Kreise dem sphärischen Abstand ihrer sphärischen Centren gleich.

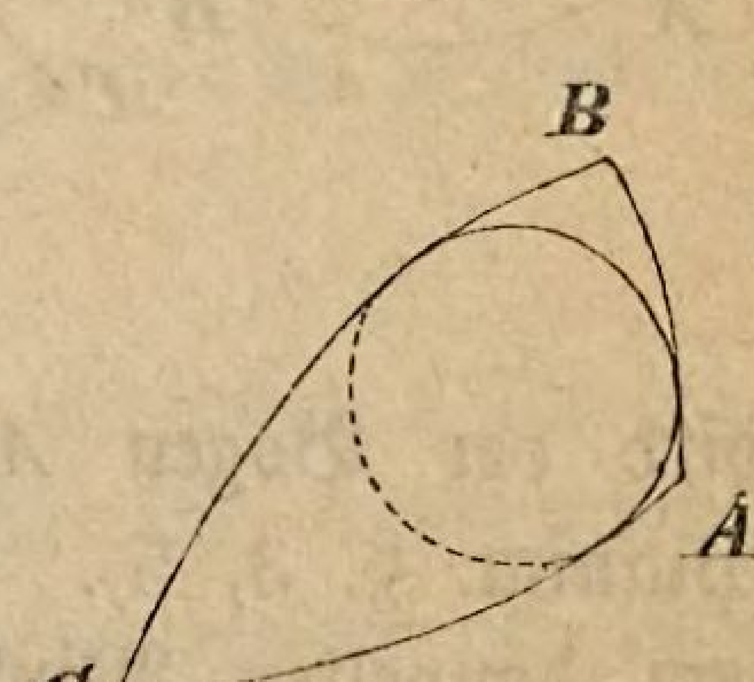
Anmerkung. Eine sphärische Sehne des Kreises und der Winkel, welchen die den Polarkreis berührenden Polaren der Endpuncte der Sehne bilden, ergänzen sich zu 180° (8). Die größte sphärische Sehne ist ein sphärischer Diameter des Kreises; den kleinsten Winkel schließen die sphärischen Tangenten an den Endpuncten eines sphärischen Diameters ein. In dem sphärischen Dreieck, welches von einer sphärischen Sehne mit den sphärischen Tangenten an den Endpuncten der Sehne gebildet wird, ist die Summe der beiden Tangenten 180° oder mehr oder weniger, je nachdem der eingeschlossene Kreisbogen ein Halbkreis ist oder mehr oder weniger (10, III. Anm).

**13.** Wenn die Spitze $C$ des sphärischen Dreiecks $ABC$ auf dem umgeschriebenen Kreise $ABC$ sich bewegt, so bleibt die Winkeldifferenz $BAC + CBA - ACB$ unverändert. Bezeichnet man durch $M$ das sphärische Centrum, so ist die Winkeldifferenz

$$= CBM + MBA + BAM + MAC - ACM - MCB = 2BAM.$$




Dieser Werth hängt nur von der Lage des sphärischen Centrums in Bezug auf die Basis $AB$ ab, und verschwindet, wenn $AB$ ein sphärischer Diameter des Kreises $ABC$ ist. Vergl. Planim. §. 4, 3.




Wenn die Basis $AB$ des sphärischen Dreiecks $ABC$ sich so bewegt, daß sie den dem Dreieck eingeschriebenen Kreis nicht aufhört zu berühren, so bleibt die Seitendifferenz $BC + CA - AB$ unverändert. Dies erkennt man durch Betrachtung des Polardreiecks, oder direct auf demselben Wege, der zu dem entsprechenden planimetrischen Satze führt (Planim. §. 4, 9). Die unveränderliche Seitendifferenz ist der doppelten sphärischen Tangente gleich, welche von $C$ bis an den Kreis sich erstreckt; sie beträgt 180°, wenn der zwischen $BC$ und $CA$ von $AB$ berührte Kreisbogen ein Halbkreis ist (12, Anm.).

Umgekehrt schließt man: Die Spitzen der sphärischen Dreiecke, welche eine gemeinschaftliche Basis und zwischen der Summe der Winkel an der Basis und dem Winkel an der Spitze dieselbe Differenz haben, liegen auf einem bestimmten Kreise, welcher der gemeinschaftlichen

Basis umgeschrieben ist. Die Basen der sphärischen Dreiecke, welche den Winkel an der Spitze gemein und zwischen der Summe der Seiten an der Spitze und der Basis dieselbe Differenz haben, berühren einschließend einen bestimmten Kreis, der dem Winkel an der Spitze eingeschrieben ist. Wenn die Winkeldifferenz

$$BAC + CBA - ACB = BAD + DBA - ADB$$

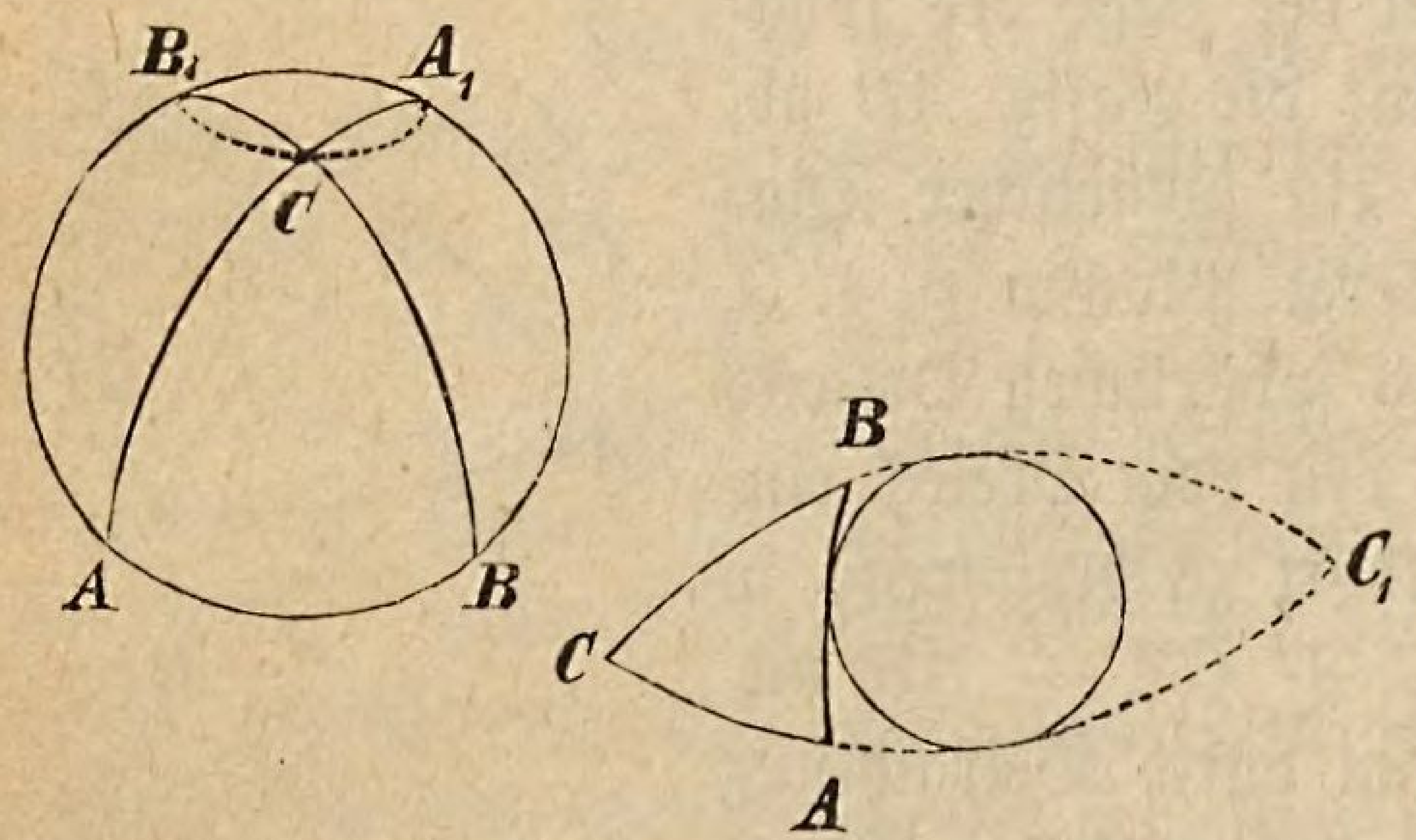
ist, und durch $M$, $N$ die sphärischen Centren der Kreise $ABC$, $ABD$ bezeichnet werden, so ist $2BAM = 2BAN$, folglich u. s. w. Vergl. auch 10, II.

Die Spitzen der sphärischen Dreiecke, welche eine gemeinschaftliche Basis und gleiche Winkelsummen, mithin gleiche Flächen haben (5), liegen auf einem bestimmten Kreise (dem (Lexell'schen Kreise), der durch die Gegenpuncte der Endpuncte der Basis geht.*) Die Basen der sphärischen Dreiecke, welche den Winkel an der Spitze gemein und gleiche Perimeter haben, berühren ausschließend einen bestimmten Kreis, der dem gemeinschaftlichen Winkel eingeschrieben ist. Denn in den Scheiteldreiecken $ABC$, $A_1B_1C$ hat man

$$CBA + BAC + ACB - 180^0 = 180^0 - (CB_1A_1 + B_1A_1C - A_1CB_1)$$

und in den Nebendreiecken $ABC$, $ABC_1$

$$BC + CA + AB = 360^0 - (AC_1 + C_1B - AB).$$




Aus den Voraussetzungen schließt man, daß in dem einen Falle $B_1A_1C + CB_1A_1 - A_1CB_1$, in dem andern $AC_1 + C_1B - AB$ von unveränderlicher Größe ist, folglich u. s. w.

Wenn die Spitze $C$ auf dem Lexell'schen Kreise $CA_1B_1$ mit $A_1$ zusammenfällt, so wird der Bogen $AC$ zur sphärischen Tangente dieses Kreises in $A_1$ (Planim. §. 3, 5). Also ist die Fläche des sphärischen Dreiecks $ABC$ dem doppelten Winkel (5, Anm.) gleich, welchen der Lexell'sche Kreis $CA_1B_1$ mit der Basis $AB$ in $A_1$ bildet. Wenn die Basis $AB$, welche einen dem Winkel $C$ eingeschriebenen Kreis ausschließend berührt, mit

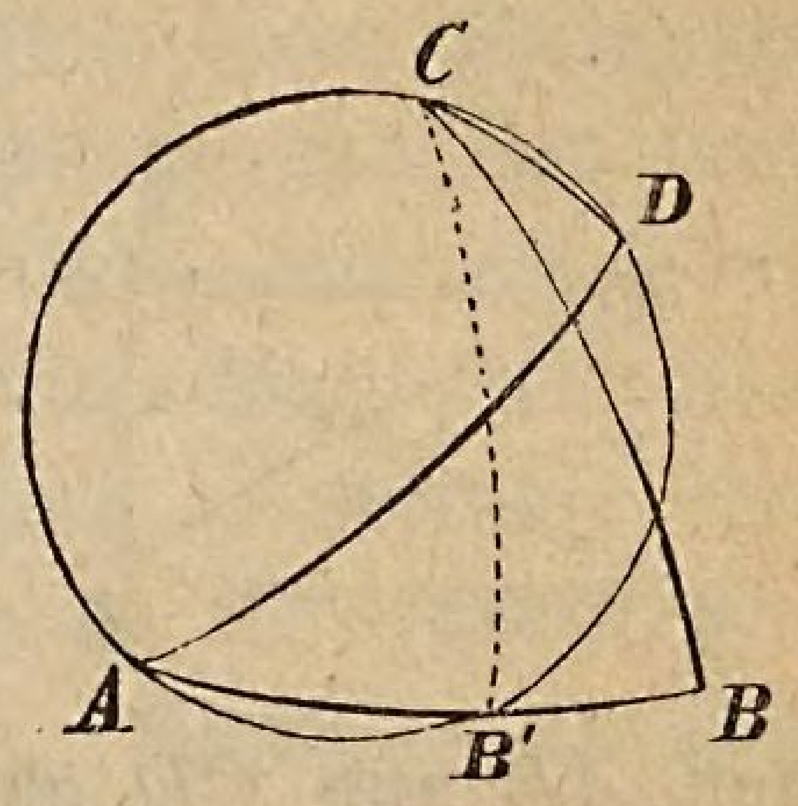
*) Dieser Satz ist von Lexell entdeckt und sowohl durch Rechnung als auch durch Construction bewiesen worden: Acta Petrop. 1781, I p. 112 (nicht Nova Acta, wie durchgängig nach Legendre Géom. Note X citirt wird). Einen directen Beweis desselben Satzes hat Euler gegeben. Vergl. unten 16. Der zugeordnete Satz ist von Sorlin (Gerg. Ann. 15 p. 302) gegeben worden.

der sphärischen Tangente $CB$ desselben Kreises zusammenfällt, so wird $B$ ein Punct dieses Kreises. Also ist der Perimeter des sphärischen Dreiecks $ABC$ gleich der doppelten sphärischen Tangente aus $C$ an diesen Kreis.

Mit Hülfe von Lexell'schen Kreisen kann man sphärische Dreiecke construiren, die gegebene Flächen oder gegebene Perimeter haben; man kann ein sphärisches Polygon von $n$ Seiten in ein sphärisches Polygon von $n - 1$ Seiten und von gleicher Fläche oder von gleichem Perimeter verwandeln, u. s. w.*)

14. Wenn ein sphärisches Viereck einem Kreise eingeschrieben ist, so ist die Summe von zwei gegenüberliegenden Winkeln der Summe der beiden andern Winkel gleich. Wenn ein sphärisches Viereck einem Kreise umgeschrieben ist, so ist die Summe von zwei gegenüberliegenden Seiten der Summe der beiden andern Seiten gleich. Dabei sind solche Seiten mit entgegengesetzten Zeichen zu nehmen, in Bezug auf welche der Kreis entgegengesetzte Lage hat.**) Wie Planim. §. 4, 4 und 10.

Umgekehrt schließt man: Wenn in einem sphärischen Viereck die Summe von zwei gegenüberliegenden Winkeln der Summe der beiden andern Winkel gleich ist, so ist das Viereck einem Kreis eingeschrieben. Wenn in einem sphärischen Viereck die Summe von zwei Seiten der Summe der beiden andern Seiten gleich ist, so ist das Viereck einem Kreis umgeschrieben. Liegt z. B. $B$ außer dem Kreis $ACD$, und wird $AB$ von dem Kreis in $B'$ geschnitten, so ist die Summe der Winkel $CB'A + ADC = DCB' + B'AD$, $CBA - B'CB < CB'A$ (10, II), durch $CBA + ADC < CB'A + ADC + B'CB$ oder $DCB + BAD$. Uebrigens gelten die in der Planimetrie a. a. O. angewandten Schlüsse.




15. Die Hauptkreise, welche die Seiten eines sphärischen Dreiecks normal halbiren, gehn durch einen Punct, das sphärische Centrum des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises. Die Hauptkreise, welche die Winkel eines sphärischen Dreiecks halbiren, gehn durch einen Punct, das sphärische Centrum des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises. Wie Planim. §. 6, 7 und 8.

---

*) Steiner Verwandlung und Theilung sphärischer Figuren durch Construction (Crelle J. 2 p. 45). Vergl. Gudermann nied. Sphärik 97 ff.

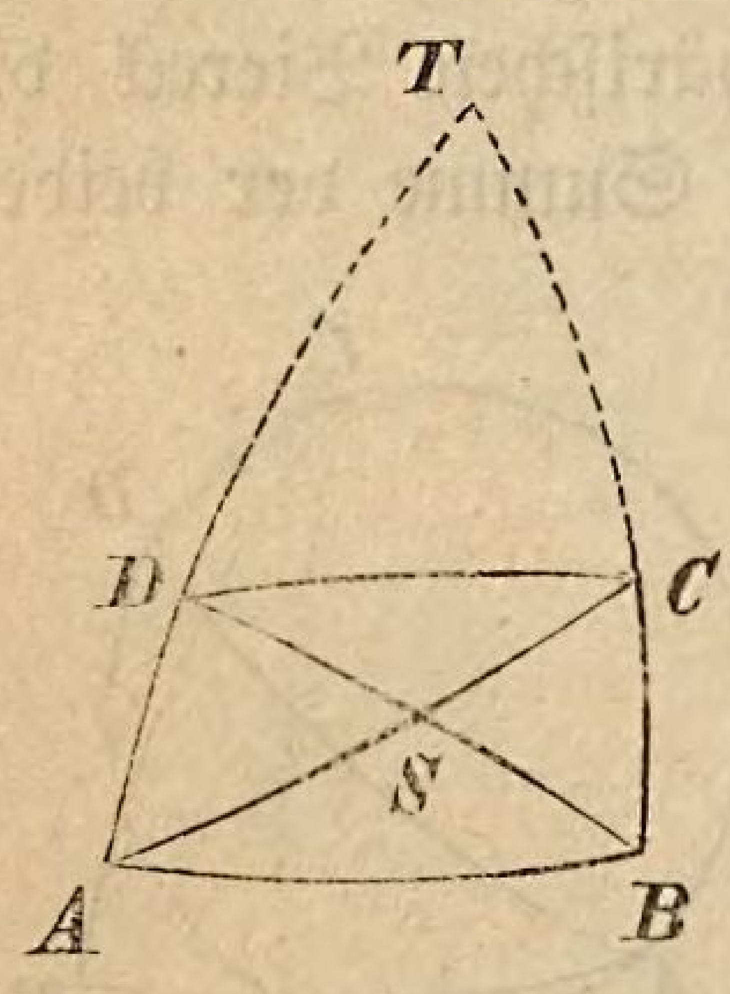
**) Lexell Acta Petrop. 1782, I p. 90 und 100. Vergl. Gerg. Ann. 12 p. 279 und 6 p. 49. Schulz Sphärik I, 75 f.

Die Hauptkreise, welche durch die Eckpuncte eines sphärischen Dreiecks normal zu den gegenüberliegenden Seiten gezogen werden, gehn durch einen Punct.*) Wie Planim. §. 6, 9.

Oder: Die Bogen, welche die Spitzen eines sphärischen Dreiecks mit den Polen der gegenüberliegenden Seiten verbinden, gehn durch einen Punct. Die Puncte, in welchen die Seiten eines sphärischen Dreiecks von den Polaren der gegenüberliegenden Eckpuncte geschnitten werden, liegen auf einem Hauptkreis, der Polare des vorhin erwähnten Punctes.**)

Oder: Wenn in einem sphärischen Viereck die gegenüberliegenden Seiten normal zu einander sind, so sind auch die Diagonalen normal zu einander. Wenn in einem sphärischen Viereck die Diagonalen je 90° betragen, so beträgt auch der sphärische Abstand der Puncte, in welchen die gegenüberliegenden Seiten sich schneiden, 90°.***)

**16.** Ein sphärisches Viereck *ABCD*, welches durch eine Diagonale *AC* in zwei sphärische Dreiecke getheilt wird, die nicht nur gleich und ähnlich, sondern auch congruent sind, ist ein sphärisches Parallelogramm.†) Die Diagonalen desselben halbiren einander in dem sphärischen Centrum *S* des Parallelogramms.




Die Polarfigur eines sphärischen Parallelogramms ist ein concentrisches sphärisches Parallelogramm. Denn der Hauptkreis, welcher durch das sphärische Centrum *S* geht und *AB* normal schneidet, ist auch zu *CD* normal, und der Punct *S* hat von *AB* und *CD* gleiche sphärische Abstände. Diese Abstände ergänzen die sphärischen Abstände des Punctes *S* von den Polen *E*, *G* der Seiten *AB* und *CD* zu 90°, folglich liegen *E* und *G* auf einem durch *S* gehenden Hauptkreise so, daß $ES = SG$. Eben so liegen die Pole *F*, *H* der Seiten *BC*, *DA* auf einem durch *S* gehenden Hauptkreise so, daß $FS = SH$. Daher ist *EFGH* ein sphärisches Parallelogramm und concentrisch mit *ABCD*.

Wenn zwei folgende Winkel eines sphärischen Parallelogramms

---

*) Dieser Satz ist von Querret Gerg. Ann. 15 p. 87 und Schulz Sphärik II, 47 durch Rechnung bewiesen worden. Den constructiven Beweis hat Gudermann nied. Sphärik 68 gegeben. Vergl. unten §. 5, 3.

**) Bobillier Gerg. Ann. 18 p. 195. Gudermann nied. Sphärik 69.

***) Joachimsthal nach Liersemann's Mittheilung in Grunert Archiv 32 p. 108.

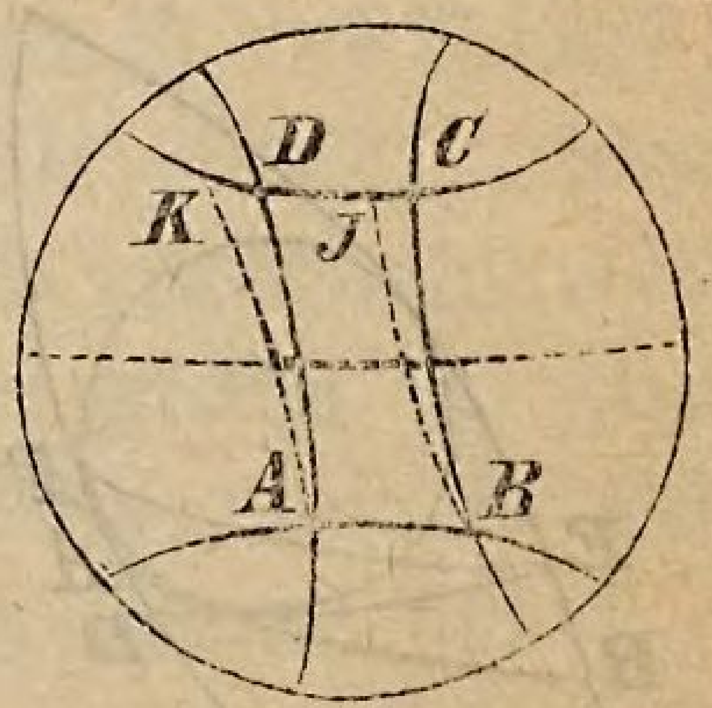
†) Euler Nov. Act. Petrop. X p. 57. Vergl. Schulz Sphärik I, 94 ff. Gudermann nied. Sphärik 78 ff.

gleich sind, so ist das sphärische Parallelogramm einem Kreis eingeschrieben; wenn zwei folgende Seiten gleich sind, so ist es einem Kreis umgeschrieben (14).

Die gegenüberliegenden Seiten $BC$ und $DA$, $AB$ und $CD$ schneiden sich auf der Polare des sphärischen Centrum $S$. Bezeichnet man den Durchschnitt von $BC$ und $DA$ durch $T$, seinen Gegenpunct durch $T_1$, so folgt aus der Congruenz der sphärischen Dreiecke $SCT$ und $SAT_1$, daß $ST = T_1S = 90^0$ ist.

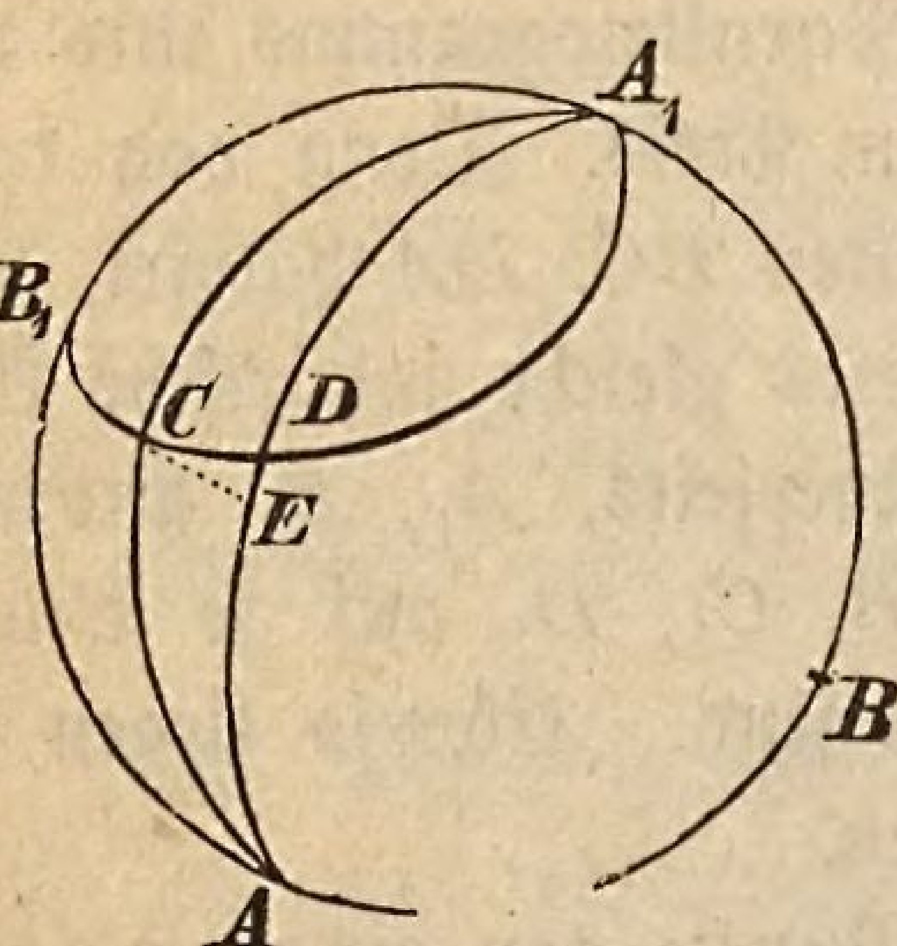
Zwei folgende Eckpuncte des sphärischen Parallelogramms und die Gegenpuncte der beiden andern liegen auf einem Kreis. Denn von dem Hauptkreis, welcher durch $S$ geht und die Seiten $BC$, $DA$ halbirt, haben die Puncte $A$, $B$ einerseits, $C$, $D$ andrerseits gleiche sphärische Abstände, also auch die Gegenpuncte $C_1$, $D_1$ einerseits, $A_1$, $B_1$ andrerseits. Daher liegen $C$, $D$, $A_1$, $B_1$ und $A$, $B$, $C_1$, $D_1$ auf je einem Kreise so, daß die beiden Kreise Gegenfiguren sind. Ebenso liegen $B$, $C$, $D_1$, $A_1$ und $D$, $A$, $B_1$, $C_1$ auf Gegenkreisen.

Ueberhaupt haben zwei Gegenkreise, deren Puncte von einem Hauptkreis (Aequator) beiderseits gleichweit abstehn, dieselben Eigenschaften wie in der Planimetrie zwei Linien, deren Puncte von einer Geraden beiderseits gleichweit abstehn. Wenn ein Hauptkreis einen Kreis scheidet, so schneidet er auch den Gegenkreis; der Bogen zwischen den beiden Durchschnittspuncten wird von dem Aequator halbirt, und der Hauptkreis bildet mit den Gegenkreisen in den Durchschnittspuncten gleiche Winkel (Gegenwinkel, Wechselwinkel). Wenn zwei Hauptkreise durch denselben Punct des Aequators gehn, so schneiden sie die Gegenkreise in den Eckpuncten eines sphärischen Parallelogramms. Wenn $A$ ein Punct des Kreises, $DK$ ein Bogen des Gegenkreises ist, so beträgt in dem von $DK$ mit den Hauptkreisbogen $KA$, $AD$ gebildeten Dreieck die Summe der Winkel so viel als die Summe der in dem Punct $A$ gebildeten Winkel d. i. $180^0$. Wenn $AB$, $CD$ gleiche Bogen der Gegenkreise, und $BC$, $DA$ Hauptkreisbogen sind, so sind $A$, $B$, $C$, $D$ Eckpuncte eines sphärischen Parallelogramms, und die Summe der Winkel in dem von den beiden Bogen der Gegenkreise und den beiden Bogen der Hauptkreise gebildeten Viereck beträgt $360^0$. Wenn $CD$, $JK$ gleiche Bogen desselben Kreises sind, so haben die Vierecke $ABCD$, $ABJK$ gleiche Flächen (Planim. §. 9, 2); folglich haben auch die sphärischen Dreiecke $ABC$, $ABJ$ gleiche Flächen und denselben Exceß, nämlich den doppelten von dem Kreisbogen $AB$ mit seiner sphärischen Sehne gebildeten Winkel. Vergl. 13.

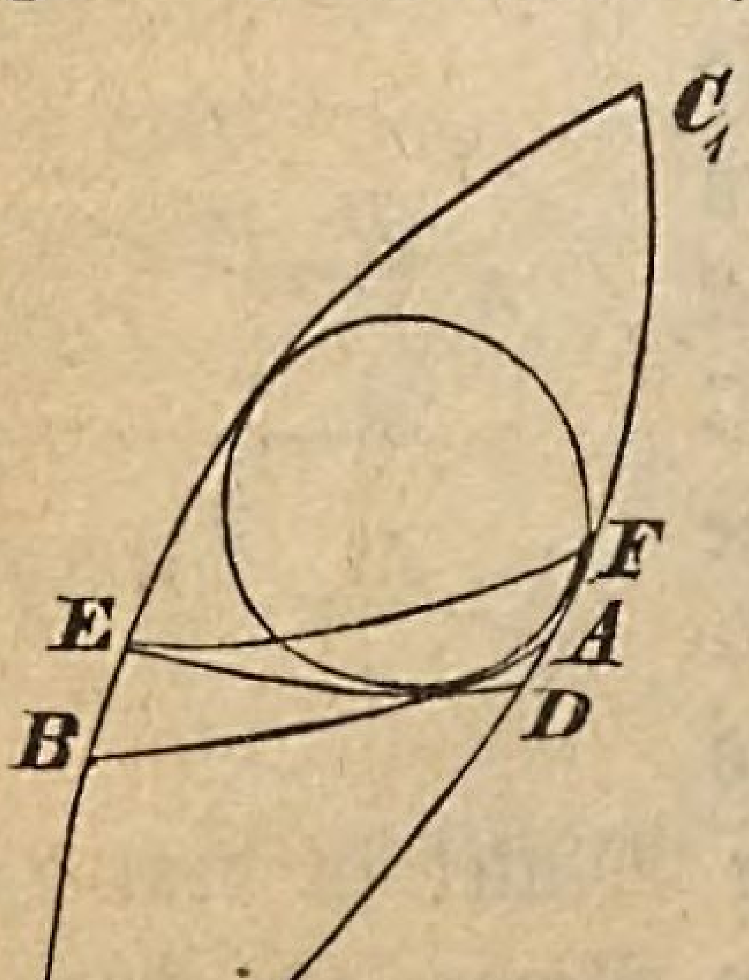


**17.** Unter den sphärischen Dreiecken, welche zwei gegebene Seiten $CA$, $AB$ enthalten, deren Summe $180^0$ nicht erreicht, hat dasjenige die größte Fläche, in welchem die nicht gegebene Seite $BC$ der Diameter des umgeschriebenen Kreises ist.*) Unter den sphärischen Dreiecken, welche zwei gegebene Winkel enthalten, deren Summe $180^0$ übersteigt, hat dasjenige den kleinsten Perimeter, in welchem der nicht gegebene Winkel dem Diameter des eingeschriebenen Kreises gleich ist.

Beweis. Man beschreibe durch die Gegenpuncte $A_1$, $B_1$ von $A$, $B$ den Kreis, dessen sphärischer Diameter $A_1 C$ die Seite $CA$ zu $180^0$ ergänzt. Dazu ist erforderlich, daß $AB < 180^0 - CA$ oder $CA + AB < 180^0$ (12, Anm.). Liegt $D$ auf dem Kreise $B_1 CA_1$, so ist die Fläche $ABD = ABC$ (13). Ist nun $EA$ auf dem Bogen $DA$ so groß als $CA$, so ist $EA < DA$, weil $A_1 E = A_1 C > A_1 D$, mithin ist die Fläche $ABE < ABD$, $ABE < ABC$. Dabei ist in dem sphärischen Dreieck $ABC$ die Winkeldifferenz $B + C - A = - B_1 + C + A_1$. Weil aber $A_1 C$ ein sphärischer Diameter ist, so verschwindet $- B_1 + C + A_1$ (13), also verschwindet $B + C - A$, und $BC$ ist ein sphärischer Diameter des Kreises $ABC$.




Um den Zusatz, welchen die Polarfigur liefert, direct zu beweisen, beschreibe man in den gegebenen Winkel $ACB$ den Kreis, dessen sphärischer Diameter den andern gegebenen Winkel zu $180^0$ ergänzt. Dazu ist es erforderlich, daß $ACB$ größer ist als der Nebenwinkel des andern gegebenen Winkels (12, Anm.), daß also die Summe der gegebenen Winkel mehr als $180^0$ beträgt. Dann theilt man den sphärischen Winkel $ACBC_1$ in die Nebendreiecke $ABC$ und $ABC_1$ so, daß die Seiten $AB$ und $BC_1$ den eingeschriebenen Kreis an den Endpuncten eines Diameters berühren, mithin der Winkel $ABC_1$ dem sphärischen Diameter des eingeschriebenen Kreises, der Winkel $CBA$ dem zweiten gegebenen Winkel gleich ist. Wird nun demselben Kreise das sphärische Dreieck $C_1 DE$ umgeschrieben, so haben $ABC$ und $DEC$ gleiche Perimeter (13), und der Winkel $DEC_1$ übertrifft den Winkel $ABC_1$ (12, Anm.). Macht man den Winkel $FEC_1 = ABC_1$, so



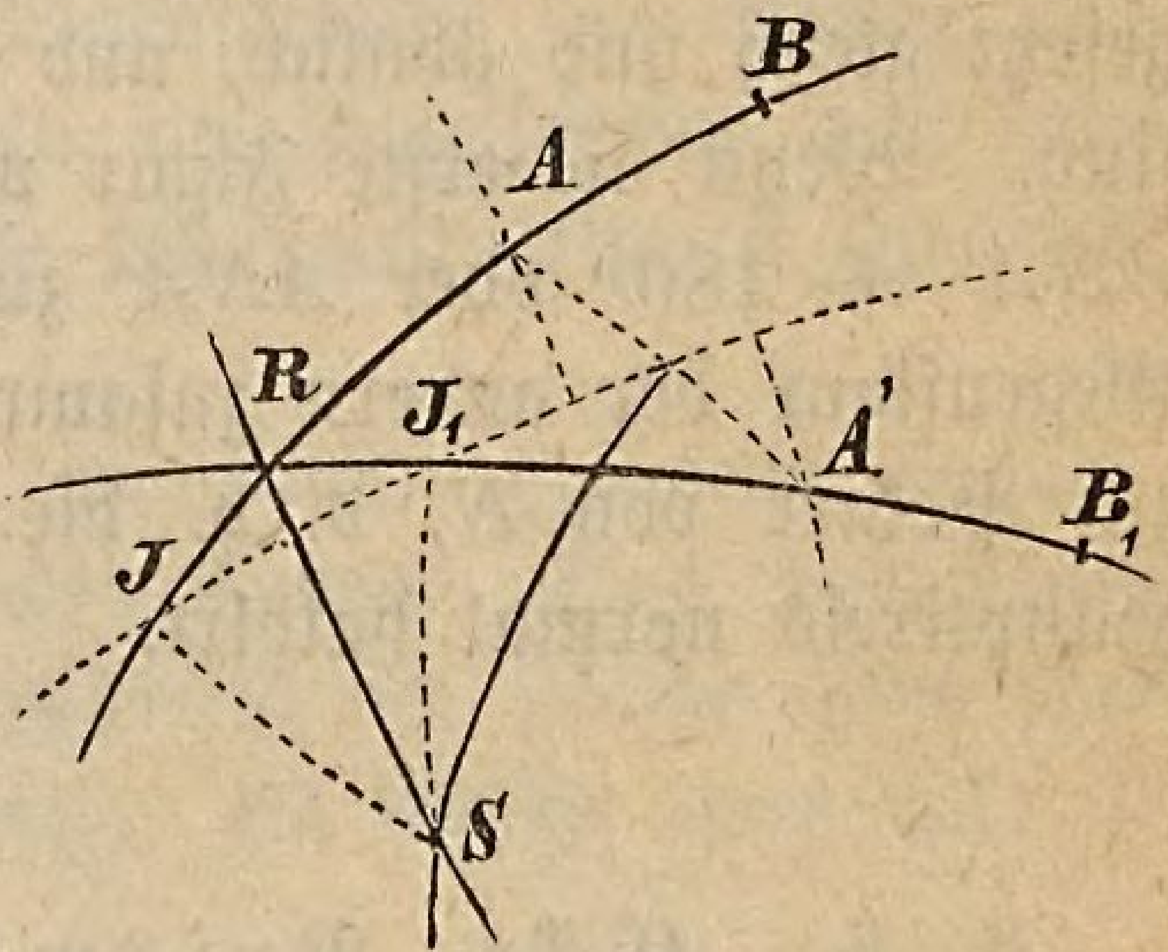

---

*) Legendre Géom. VII, 26. Vergl. Steiner Crelle J. 2 p. 63 und 24 p. 102. Der Zusatz war unbemerkt geblieben.

übertrifft der Perimeter des sphärischen Dreiecks $CFE$ den Perimeter von $CDE$, also auch von $ABC$. Dabei ist $CA + AB - BC = - AC_1 + AB + C_1B$. Weil aber der Winkel $ABC_1$ einem sphärischen Diameter des dem sphärischen Dreieck $ABC_1$ eingeschriebenen Kreises gleich ist, so hat die Seitendifferenz $- AC_1 + AB + C_1B$ den Werth $180^0$ (13), folglich hat $CA + AB - BC$ denselben Werth, und der Winkel $BAC$ ist dem sphärischen Diameter des dem sphärischen Dreieck $ABC$ eingeschriebenen Kreises gleich.

Anmerkung. Hieraus folgt, daß die von planen Figuren bewiesenen isoperimetrischen Sätze (Planim. §. 15) auch für sphärische Figuren ihre Gültigkeit behalten.

18. Zu zwei gleichen Bogen $AB$, $A'B'$ giebt es auf der Kugel einen Punct $S$, welcher mit $AB$ und $A'B'$ congruente sphärische Dreiecke bildet. Denn der Hauptkreis, welcher den Nebenwinkel des von $AB$ und $A'B'$ eingeschlossenen Winkels halbirt, wird von dem Hauptkreis, welcher den Bogen $AA'$ normal halbirt, in $S$ so geschnitten, daß nicht nur die Bogen $SA$ und $SA'$, sondern auch die sphärischen Abstände $SJ$ und $SJ'$ des Punctes $S$ von den Bogen $AB$ und $A'B'$ gleich sind. Daher sind die sphärischen Dreiecke $SJA$ und $SJ'A'$, $SJB$ und $SJ'B'$, also auch $SAB$ und $SA'B'$ congruent. Zugleich ist der Winkel $ASA' = ASB + BSB' + B'SA' = BSB'$.




Demnach giebt es zu zwei congruenten sphärischen Figuren $ABC$.. und $A'B'C'$.. einen sich selbst so entsprechenden Punct $S$, daß $SABC$.. und $SA'B'C'$.. congruent und die Winkel $ASA'$, $BSB'$, $CSC'$,.. gleich sind. Wenn man die erste Figur um $S$ dreht, bis $SA$ den Winkel $ASA'$ oder den Winkel $ASA' + 180^0$ zurückgelegt hat, so gelangt die Figur $ABC$ zur Deckung von $A'B'C'$.., oder in solche Lage, daß $ABA'B'$, $ACA'C'$, $BCB'C'$,.. concentrische sphärische Parallelogramme sind.*)

19. Zu zwei gleichen Bogen $AB$, $A'B'$ giebt es auf der Kugel einen Hauptkreis $s$, welcher mit $AB$ und $A'B'$ entgegengesetzt gleiche Winkel bildet, von welchem $A$ und $A'$, $B$ und $B'$ entgegengesetzt gleiche sphärische Abstände haben, dessen Pol $N$ seinem Gegenpunct $N_1$ derge-

*) Der Haupttheil dieses Satzes ist von Euler (theoria motus corp. solid. 978 ff.) gegeben worden. Das Weitere enthält die Abhandlung des Verf. über Gleichheit und Aehnlichkeit . . . 30 ff. Vergl. Planim. §. 7, 2 ff.

stalt entspricht, daß die sphärischen Dreiecke $NAB$ und $N_1A'B'$ gleich und ähnlich und entgegengesetzten Sinnes sind. Wenn $S$, $J$, $J'$ die vorige Bedeutung haben, und $R$ den Durchschnitt der gleichen Bogen $AB$, $A'B'$ bezeichnet, so sind die sphärischen Dreiecke $SRJ$, $SRJ'$ entgegengesetzt gleich und ähnlich. Daher ist $RJ = RJ'$ und $JJ'$ bildet mit $AB$, $A'B'$ entgegengesetzt gleiche Winkel. Wenn nun $N$ und $N_1$ die Pole von $JJ'$ sind, so sind die sphärischen Dreiecke $NJA$ und $N_1J'A'$, $NJB$ und $N_1J'B'$, $NAB$ und $N_1A'B'$ entgegengesetzt gleich und ähnlich. Daher haben $A$ und $A'$, $B$ und $B'$ entgegengesetzt gleiche sphärische Abstände von $JJ'$, und die Winkel $ANA'$, $BNB'$, $JNJ'$ sind gleich.

Demnach giebt es zu zwei entgegengesetzt gleichen und ähnlichen sphärischen Figuren $ABC$ . . und $A'B'C'$ . . einen Punct $N$, der seinem Gegenpunct $N_1$ so entspricht, daß $NABC$ . . und $N_1A'B'C'$ . . entgegengesetzt gleich und ähnlich, und die Winkel $ANA'$, $BNB'$, $CNC'$, . . gleich sind. Wenn die erste Figur um $N$ gedreht wird, bis $NA$ den Winkel $ANA' + 180^0$ oder $ANA'$ zurückgelegt hat, so fällt die Figur mit der Gegenfigur der andern zusammen, oder sie liegt mit ihr symmetrisch zur Polare von $N$, d. h. die Bogen $AA'$, $BB'$, . . werden von diesem Hauptkreis normal halbirt.

## §. 5. Ecke, Prisma und die perspectivischen Figuren.

**1.** Eine Reihe von Winkeln, die einen gemeinschaftlichen Scheitel haben, deren jeder mit dem folgenden, und deren letzter mit dem ersten einen Schenkel gemein hat, scheidet von dem Raume um den gemeinschaftlichen Scheitel einen Raum ab, der eine Ecke (γωνία στερεά Eucl. XI def. 11, angulus solidus, Raumwinkel) genannt wird. Der gemeinschaftliche Scheitel heißt der Scheitel der Ecke (sommet, Spitze, Centrum), die gemeinschaftlichen Schenkel der folgenden Winkel heißen die Kanten der Ecke, die zwischen den folgenden Kanten enthaltenen Winkel heißen die Seiten oder Flächen der Ecke, die zwischen den folgenden Seiten enthaltenen Flächenwinkel heißen die Winkel der Ecke (vergl. §. 2, 5). Nach der Anzahl ihrer Seiten (oder Kanten) heißt die Ecke 3, 4, . . seitig (angle trièdre, tetraèdre, polyèdre). Ein Kegel kann als eine unendlichseitige Ecke betrachtet werden (§. 3, 1).

Parallele Eckenschnitte oder Kegelschnitte (ausgenommen die das Centrum enthaltenden) sind ähnliche Figuren. Werden von den parallelen Ebenen die Kanten in $A$ und $A'$, $B$ und $B'$, $C$ und $C'$, . .

geschnitten, so sind $AB$ und $A'B'$, $BC$ und $B'C'$, $CA$ und $C'A'$, . . parallel, und wegen der gleichen Winkel (§. 2, 5) die Dreiecke $ABC$ und $A'B'C'$, $ABD$ und $A'B'D'$, . . ähnlich, folglich die Figuren $ABCD$ . . und $A'B'C'D'$ . . ähnlich (Planim. §. 12). Die Flächen der parallelen Schnitte verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Abstände vom Centrum $S$, weil $AB : A'B' = SA : SA'$ u. s. w.

2. Unter dem Kugelschnitt einer Ecke (eines Kegels) wird die sphärische Figur verstanden, welche die Ecke (der Kegel) mit einer concentrischen Kugel gemein hat, deren Radius eine Längeneinheit ist. Die Seiten der Ecke sind den Seiten dieser sphärischen Figur gleich, wenn man statt der Bogen von Hauptkreisen deren Centriwinkel setzt (§. 4, 7. Vergl. Planim. §. 13, 8); die Winkel der Ecke sind den Winkeln der sphärischen Figur gleich (§. 4, 2). Die Eigenschaften der Seiten und Winkel einer Ecke werden aus den Eigenschaften der Seiten und Winkel ihres Kugelschnitts erkannt. Wenn die Kugelschnitte von zwei Ecken congruent sind, so sind auch die Ecken congruent, also ist eine Ecke durch ihren Kugelschnitt bestimmt.

Zwei Ecken sind von gleicher Größe (amplitudo, apertura, capacitas), wenn ihre Kugelschnitte gleiche Flächen haben. Das Verhältniß einer Ecke zum ganzen Raum ist dem Verhältniß der Fläche ihres Kugelschnitts zur ganzen Kugel gleich; abgekürzt: die Größe einer Ecke ist die Fläche ihres Kugelschnitts.*)

Die Geraden, welche von den Puncten des Perimeters einer Flächenfigur nach dem Auge eines Betrachters derselben gehn, liegen auf den Seiten einer Ecke (eines Kegels), deren Größe (die Fläche ihres Kugelschnitts) die scheinbare Größe der Flächenfigur für den gegebenen Ort des Auges angiebt.

Zwei Ecken heißen isoperimetrisch, wenn ihre Kugelschnitte gleiche Perimeter haben. Unter allen isoperimetrischen Ecken hat der Rotationskegel die größte Amplitude; unter allen Ecken von gleicher Amplitude hat der Rotationskegel den kleinsten Perimeter des Kugelschnitts.**)

Zu jeder Ecke gehört die Gegenecke und die Polarecke derselben, bestimmt durch die Gegenfigur und die Polarfigur ihres Kugelschnitts (§. 4, 3 und 9).

3. Drei Ebenen, die einen endlich fernen Punct gemein haben, theilen den Raum in 8 dreiseitige Ecken. Zu einer dieser Ecken gehören außer ihrer Gegenecke 3 Nebenecken und deren Gegenecken (§. 4, 3).

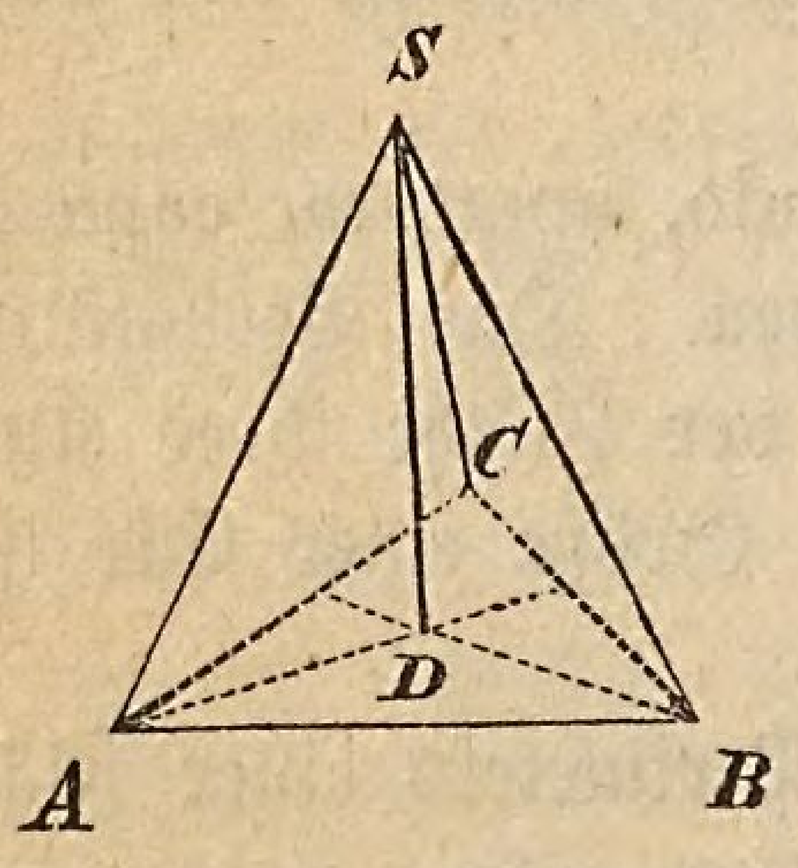
---

*) Nach Cabasilas (Commentar zum Almagest 1350) mitgetheilt von Vitello Opt. I, 87.

**) Descartes Oeuvr. inéd. II p. 218. Vergl. §. 4, 17. Anm.

Die Ebenen, welche die Seiten einer dreiseitigen Ecke normal halbiren, schneiden sich in einer Geraden, der Axe des der Ecke umgeschriebenen Rotationskegels. Die Ebenen, welche die Winkel einer dreiseitigen Ecke halbiren, schneiden sich in einer Geraden, der Axe des der Ecke eingeschriebenen Rotationskegels. Denn das sphärische Dreieck, welches der Kugelschnitt der Ecke ist, hat sowohl einen umgeschriebenen, als auch einen eingeschriebenen Kreis (§. 4, 15). Ebenso giebt es für die Nebenecken je einen umgeschriebenen und einen eingeschriebenen Rotationskegel. Vergl. §. 3, 10 und 11.

Die Ebenen, welche die Kanten einer dreiseitigen Ecke auf die gegenüberliegenden Seiten normal projiciren (§. 2, 6), schneiden sich in einer Geraden. Denn in dem sphärischen Dreieck, welches der Kugelschnitt der Ecke ist, gehn die Bogen, welche man aus den Eckpuncten normal zu den gegenüberliegenden Seiten zieht, durch einen Punct (§. 4, 15).




Anmerkung. Um direct zu beweisen, daß die Ebene *CSD* normal zur Ebene *ASB* ist, wenn *ASD* normal zu *BSC* und *BSD* normal zu *CSA*, schneide man die Kanten durch eine Ebene, die zu *SD* normal steht. Dann ist *ASD* normal zu *BC*, weil diese Ebene zu *BSC* und *ABC* normal ist (§. 2, 4); ebenso *BSD* normal zu *CA*. Daher ist die Gerade *AD* der Ebene *ASD* normal zu *BC* (§. 2, 1), und die Gerade *BD* der Ebene *BSD* normal zu *CA*, also aus planimetrischen Gründen *CD* normal zu *AB* (Planim. §. 6, 9). Weil aber auch *SD* normal zu *AB* ist, so steht die Ebene *CSD* normal zu *AB* und zu *ASB*.

**4.** Eine Reihe von Streifen, deren jeder mit dem folgenden, der letzte mit dem ersten einen Schenkel gemein hat, scheidet von dem Raum ein Prisma*) ab. Die gemeinschaftlichen Schenkel der folgenden Streifen heißen die Kanten, die zwischen den folgenden Kanten enthaltenen Streifen heißen die Seiten, die zwischen den folgenden Seiten enthaltenen Flächenwinkel heißen die Winkel des Prisma. Nach der Anzahl seiner Seiten (oder Kanten) heißt das Prisma 3, 4, . .

---

*) Der von πρίω (säge) abgeleitete Name πρῖσμα bezeichnet nach altem Gebrauch eine durch zwei parallele Ebenen begrenzte Schicht des sonst nach einer Richtung (und nach der entgegengesetzten Richtung) offenen Prisma. Vergl. unten §. 6, 2. In der Optik versteht man unter einem Prisma gewöhnlich nur ein zweiseitiges d. h. einen (massiven) Flächenwinkel.

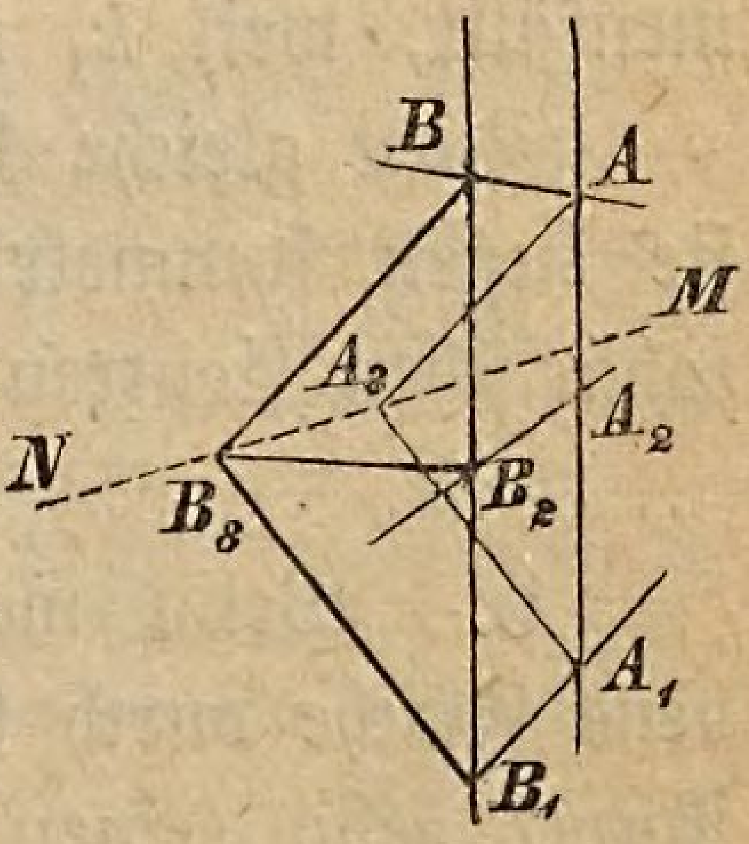
seitig. Der Cylinder kann als ein unendlichseitiges Prisma betrachtet werden.

Parallele Ebenen, die mit den Kanten eines Prisma nicht parallel sind, schneiden das Prisma in congruenten Figuren (1). Unter den Schnitten eines Prisma ist sein Normalschnitt ausgezeichnet d. h. die Figur, in welcher das Prisma durch eine zu den Kanten normale Ebene geschnitten wird. Wenn zwei Prismen congruente Normalschnitte haben, so sind sie congruent (§. 2, 5); also ist das Prisma durch seinen Normalschnitt bestimmt. Die Seiten, die Winkel und die Größe des Prisma sind durch die Seiten, die Winkel und die Fläche des Normalschnitts bestimmt. Das Verhältniß eines Prisma zum unbegrenzten Raum ist von Null eben so wenig verschieden, als das Verhältniß der Fläche seines Normalschnitts zur unbegrenzten Ebene.

Ein Prisma (Cylinder) kann als eine Ecke (Kegel) betrachtet werden, deren Scheitel (Centrum) unendlich fern ist. Der Normalschnitt des Prisma erscheint als Durchschnitt des Prisma mit einer concentrischen Kugel (2), welche bei unendlicher Ferne des Centrum nicht von einer Ebene unterschieden wird, die zu den Kanten (Radien) normal steht.

Drei Ebenen, die einen unendlich fernen Punct gemein haben (mit einer nach demselben gerichteten Geraden parallel sind), theilen den Raum in 7 Räume (§. 1, 9. Vergl. Planim. §. 1, 4). Einer derselben ist ein dreiseitiges Prisma, drei andere sind als Nebenprismen desselben zu betrachten.

5. Ein Cylinder (Prisma) wird von einem Flächenwinkel in gleichen und ähnlichen Figuren geschnitten, wenn die den Flächenwinkel halbirende Ebene zu den Kanten des Cylinders normal steht. Werden die Kanten des Cylinders von den Seiten des Flächenwinkels in $A$, $B$, $C$, . . und $A_1$, $B_1$, $C_1$, . . geschnitten, werden dieselben von der den Flächenwinkel halbirenden Ebene normal in $A_2$, $B_2$, $C_2$, . . geschnitten, sind ferner $AA_3A_1$, $BB_3B_1$, . . Normalschnitte des Flächenwinkels $AMNA_1$, so folgt aus der Gleichheit und Aehnlichkeit der Dreiecke $A_3A_2A$ und $A_3A_2A_1$, $B_3B_2B$ und $B_3B_2B_1$, . ., daß $A$ und $A_1$, $B$ und $B_1$, . . symmetrisch zur halbirenden Ebene $A_2MN$ liegen, daß also $AB = A_1B_1$, . ., die Figuren $ABC$ . . und $A_1B_1C_1$ . . gleich und ähnlich sind.




Wenn insbesondere auf einem Cylinder ein Kreis liegt, so giebt es

auf dem Cylinder einen gleichen Kreis, der mit jenem symmetrisch zu einem Normalschnitt des Cylinders liegt.*)

Wenn überhaupt die Cylinderfiguren $ABC$ .. und $A_1 B_1 C_1$ .. gleich und ähnlich, und die Kantenstücke $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, .. nicht alle einander gleich sind, so liegen die Figuren symmetrisch zu einem Normalschnitt des Cylinders. Sind $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ ungleich, $A_2$, $B_2$, $C_2$ ihre Mitten, so haben die Vierecke $AA_1 B_1 B$, $BB_1 C_1 C$, .. zwei parallele und zwei gleiche Seiten; daher sind die Geraden $A_2 B_2$, $B_2 C_2$, .. normal zu den Kanten des Cylinders, mithin die Figur $A_2 B_2 C_2$, .. ein Normalschnitt des Cylinders. Wenn insbesondere $CC_1 = BB_1$ ist, so sind $BC$, $B_1 C_1$, $B_2 C_2$ parallel, und das Viereck $BB_1 C_1 C$ ist ein Rectangel.

Ein Cylinder wird von einer Kugel in gleichen und ähnlichen Figuren $ABC$ .. und $A_1 B_1 C_1$ .. geschnitten, welche zu dem Normalschnitt des Cylinders, der durch das Centrum der Kugel geht, symmetrisch liegen. Denn die parallelen Sehnen $AA_1$, $BB_1$, .. werden von der Centralebene, die zu ihnen normal ist, halbirt.

Ist von den Schnitten eines Cylinders durch eine Kugel der eine ein Kreis, so ist der andere ein gleicher Kreis.

Ein Büschel von Kugeln, die einen Kreis gemein haben, wird von einem Cylinder, auf welchem der gemeinschaftliche Kreis liegt, in Kreisen geschnitten, die parallel und dem gemeinschaftlichen Kreis gleich sind. Denn jeder von diesen Kreisen liegt mit dem gemeinschaftlichen Kreis symmetrisch zu einem Normalschnitt des Cylinders.

Zwei gleiche und nicht parallele Kreise $k$ und $k_1$ eines Cylinders liegen auf einer Kugel. Die Kugel, welche den Kreis $k$ enthält, und deren Centrum auf der Ebene liegt, zu welcher $k$ und $k_1$ symmetrisch liegen, schneidet den Cylinder in dem Kreis $k_2$, mit welchem $k_1$ zusammenfällt, weil $k_1$ und $k_2$ mit $k$ symmetrisch zu derselben Ebene liegen.

Zwei gleiche Kreise einer Kugel liegen auf einem Cylinder. Denn sie liegen symmetrisch zu dem Hauptkreis der Kugel, zu welchem die sphärischen Centren der Kreise symmetrisch liegen.

6. Wenn man die Puncte einer gegebenen Figur auf eine gegebene Fläche durch Gerade projicirt (§. 2, 6), die durch einen gegebenen Punct gehn (einen Büschel bilden), so erhält man eine Centralpro-

*) Von den beiden Kreisschnitten eines solchen Cylinders heißt einer in Bezug auf den andern ein Wechselschnitt des Cylinders, antiparalleler Schnitt, sectio subcontraria, τομὴ ὑπεναντία nach Apollonius Con I, 5 und Serenus über den Cylinder (I, 6) in Halley's Ausgabe von Apollonius Conica. Vergl. den Aufsatz des Verf. in Crelle J. 54 p. 162.

jection (Perspective, perspectivische Projection) der gegebenen Figur. Dabei wird eine Strecke durch einen Winkel, eine Linie durch einen Kegel (Ebene) projicirt. Der gemeinschaftliche Punct der projicirenden Geraden und Flächen, aus dem die gegebene Figur projicirt wird, heißt das Projectionscentrum.

Wenn die Projicirenden parallel sind, so erhält man eine Parallelprojection der gegebenen Figur. Man kann dieselbe als Centralprojection aus einem unendlich fernen Projectionscentrum betrachten. Die Normalprojectionen gehören zu den Parallelprojectionen, mithin auch zur Classe der Centralprojectionen.

Unter den Centralprojectionen von sphärischen Figuren sind die stereographischen*) ausgezeichnet, bei welchen das Projectionscentrum auf der Kugel liegt und die Projectionsfläche plan und parallel ist mit der Ebene, welche die Kugel in dem Projectionscentrum berührt.

Anmerkung. Unter den planen Abbildungen der Erdoberfläche ist die Mercator'sche**) ausgezeichnet. Die Bilder der Meridiane sind parallele Gerade, deren Abstände sich zu einander verhalten, wie die Winkel der Meridiane. Jedes Dreieck des Bildes ist dem abgebildeten sphärischen Dreieck um so ähnlicher, je kleiner die Seiten desselben. Daher sind die Bilder des Aequators und der Parallelkreise parallele Gerade, welche die Meridiane normal schneiden; aber der Abstand des Bildes eines Parallelkreises von dem Bild des Aequators ist dem Abstand des abgebildeten Parallelkreises von dem Aequator nicht proportional. Namentlich wird es durch die Mercator'sche Abbildung

---

*) Erfunden von Hipparchus (160 v. Chr.) nach Synesius' Bericht, benannt von Aguillon (Optica 1613 p. 498). Vergl. Klügel math. W. IV p. 492. In den nur lateinisch herausgegebenen Schriften von Ptolemäus Planisphaerium und De analemmate werden die Projectionen behandelt, in der erstern die stereographische, in der andern die orthographische.

**) Gerh. Mercator (Kremer) hat eine solche Abbildung (Seekarte, Verbesserung der herkömmlichen Plattkarten) 1569 zu Duisburg herausgegeben. Das Princip derselben (in Folge dessen die Abbildung conform nach Gauß genannt wird, Untersuchungen über Geodäsie 1844. Gött. Abh. II) ist auf der Karte angemerkt, und wurde allgemeiner bekannt durch Wright the correction of certain errors in navigation, London 1599. Vergl. Breusing über Gerhard Kremer gen. Mercator, Duisburg 1869. Weiter entwickelt wurde das Princip durch Lambert Beiträge 3 p. 115 ff. Lagrange Mém. de Berlin 1779, Gauß 1822 in Schumacher's Astron. Abh. 3, Jacobi Dynamik p. 215. Die Bahn des nach dem Compaß geführten Schiffes war geometrisch bestimmt worden durch Nonius (Nuñez) de arte atque ratione navigandi 1546, bekannt unter dem Namen rhumb-line, linea rhombica. Rhumbs heißen horizontale Richtungen, Puncte des Horizonts, weil die Blätter der Windrose congruente Rhomben sind, deren spitze Winkel 45$^0$ betragen; die Scheitel der einen spitzen Winkel sind im Centrum vereint, die der andern auf einem Kreise vertheilt und mit den Himmelsgegenden bezeichnet. Vergl. Breusing Zeitschr. d. Ges. f. Erdkunde IV. Der Ausdruck rhumb, linea rhombica ist von Snellius 1624 (Tiphys Batavus s. Histiodromice I, 4) durch das Wort loxodromia ersetzt worden.

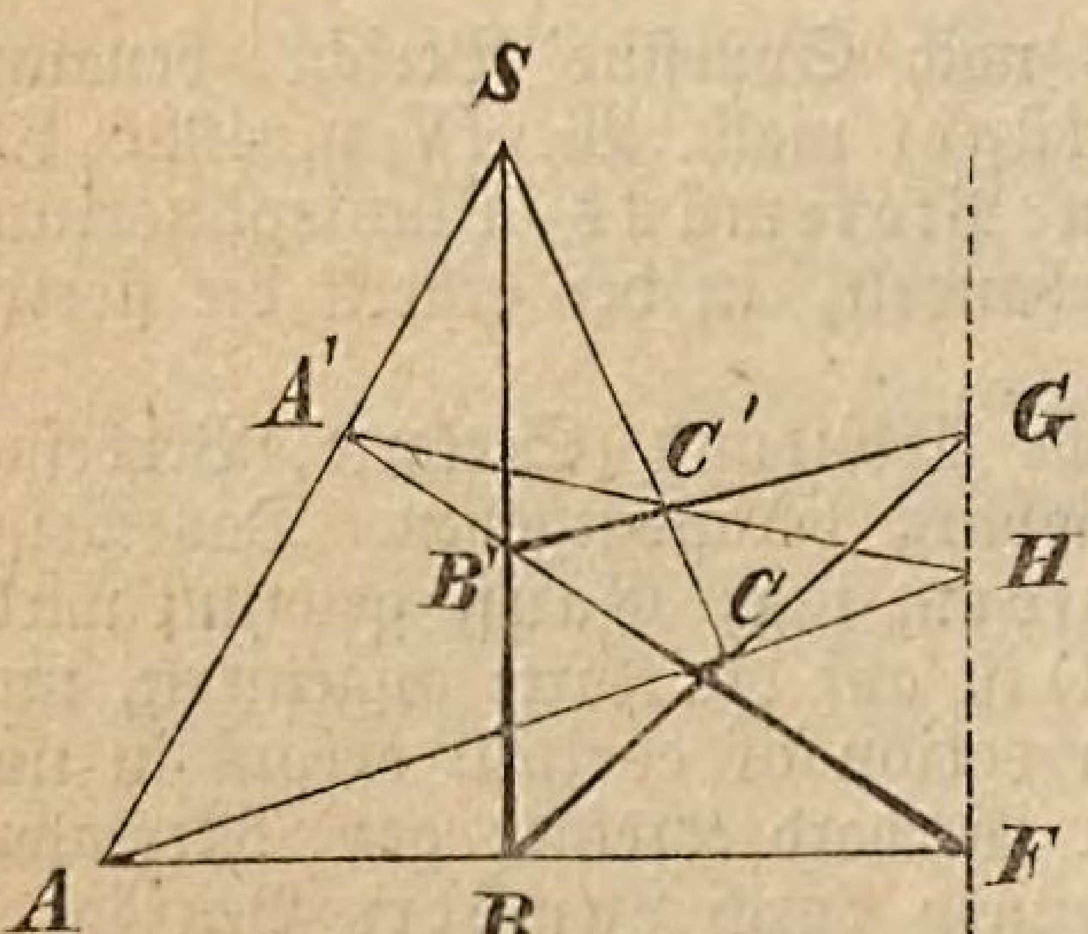
erreicht, daß die Bilder von Loxodromien Gerade sind, d. h. von solchen Curven, welche mit allen Meridianen, die sie schneiden, gleiche Winkel bilden. Ein Schiff, dessen Lauf auf der See mit der unverrückten Declinationsnadel einen unveränderlichen Winkel bildet, beschreibt eine Loxodromie. Der Winkel aber, welchen die Richtung des Schiffs mit den Meridianen bilden muß, damit das Schiff von einem gegebenen Ort nach einem andern gelangt, ist in der Mercator'schen Abbildung der Erdoberfläche (Seekarte) meßbar.

7. Wenn den Puncten $A$, $B$, $C$, .. einer Figur die Puncte $A'$, $B'$, $C'$, .. einer andern Figur nach einem beliebigen Gesetz entsprechen, und die Figuren in solcher Lage sich befinden, daß die Geraden $AA'$, $BB'$, $CC'$, .., welche die entsprechenden Puncte verbinden, einen Büschel bilden, d. h. durch einen Punct gehn, der endlich oder auch unendlich fern ist, mithin auf einem Kegel oder Cylinder liegen, so heißen die Figuren $ABC$ .. und $A'B'C'$ .. in Rücksicht auf diese Lage perspectivisch.*)

Eine sphärische Figur und ihre Gegenfigur sind perspectivisch, weil die die Gegenpuncte verbindenden Geraden durch das Centrum der Kugel gehn. Bei sphärischen Betrachtungen werden auch zwei auf einer Kugel liegende Figuren perspectivisch genannt, wenn die die entsprechenden Puncte verbindenden Hauptkreise durch einen Punct gehn.

Wenn zwei Dreiecke $ABC$ und $A'B'C'$ perspectivisch sind, so liegen die Durchschnitte der entsprechenden Seiten $AB$ und $A'B'$, $BC$ und $B'C'$, $CA$ und $C'A'$ auf einer Geraden, und umgekehrt.**)

Beweis. Wenn die perspectivischen Dreiecke $ABC$ und $A'B'C'$ nicht auf einer Ebene liegen, so sind die Durchschnitte $F$, $G$, $H$ der entsprechenden Seiten gemeinschaftliche Puncte der Ebenen $ABC$ und $A'B'C'$; folglich liegen sie auf der Geraden, welche die Ebenen gemein haben. Umgekehrt: wenn die Dreiecke $ABC$ und $A'B'C'$ nicht auf einer Ebene liegen und die entsprechenden Seiten paarweise je einen Punct gemein haben, so liegen die Geraden $AA'$, $BB'$,

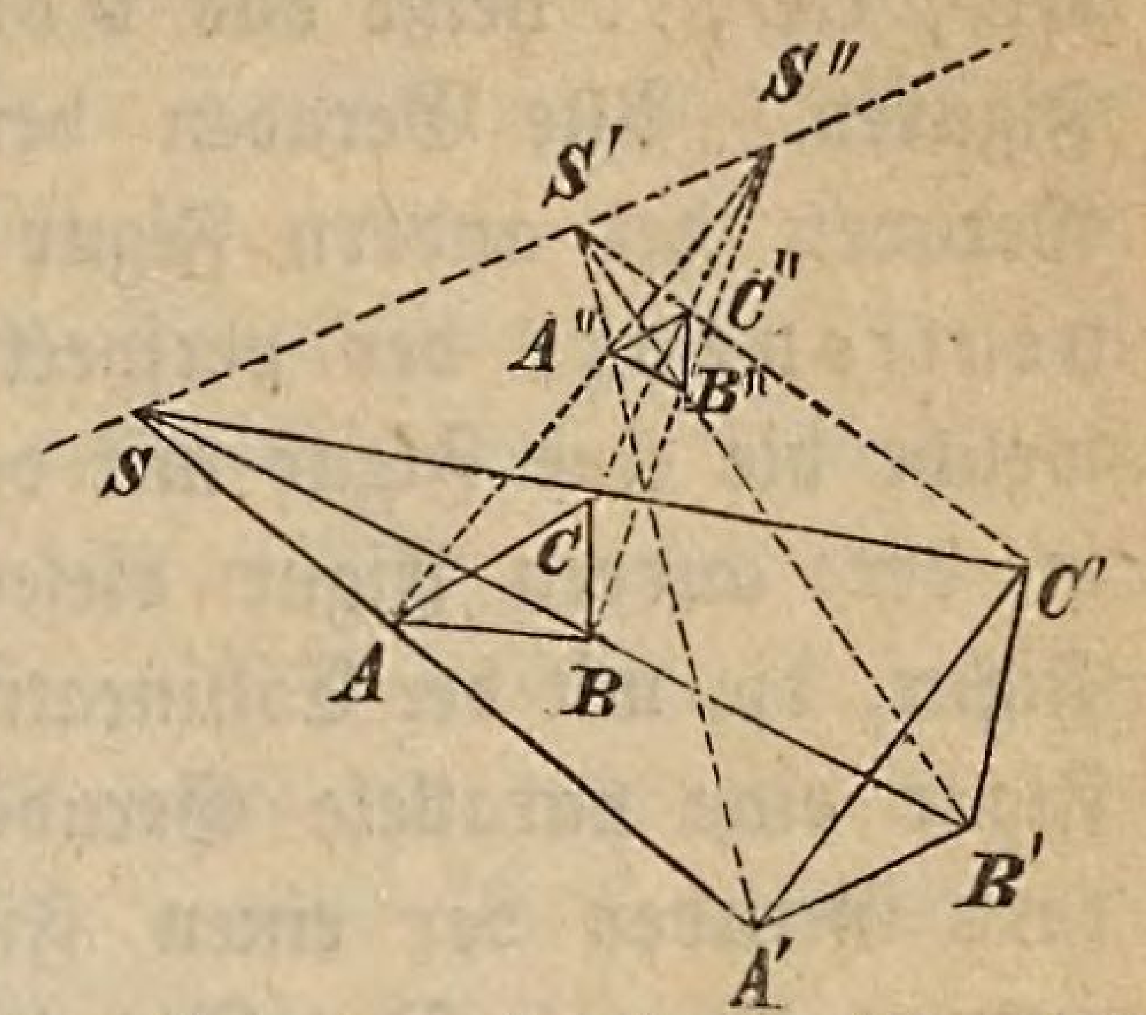



*) Nach Steiner syst. Entw. p. 4 und 29, Staudt Geom. d. Lage 89. Perspectivische Figuren werden in besondern Fällen ähnlich liegend genannt nach Eucl. VI, 18. XI, 27, homothetisch von Chasles Gerg. Ann. 18 p. 280, collinear liegend von Magnus Aufgaben d. anal. Geom. I p. 44.

**) Dieser Fundamentalsatz rührt von Desargues her Oeuvres éd. Poudra I p. 413. Vergl. Poncelet propr. proj. 168. Chasles Ap. hist. p. 80 d. Uebers. Die Gültigkeit des Satzes für zwei sphärische Dreiecke einer Kugel wird durch metrische Relationen erkannt. Gudermann nied. Sph. 211.

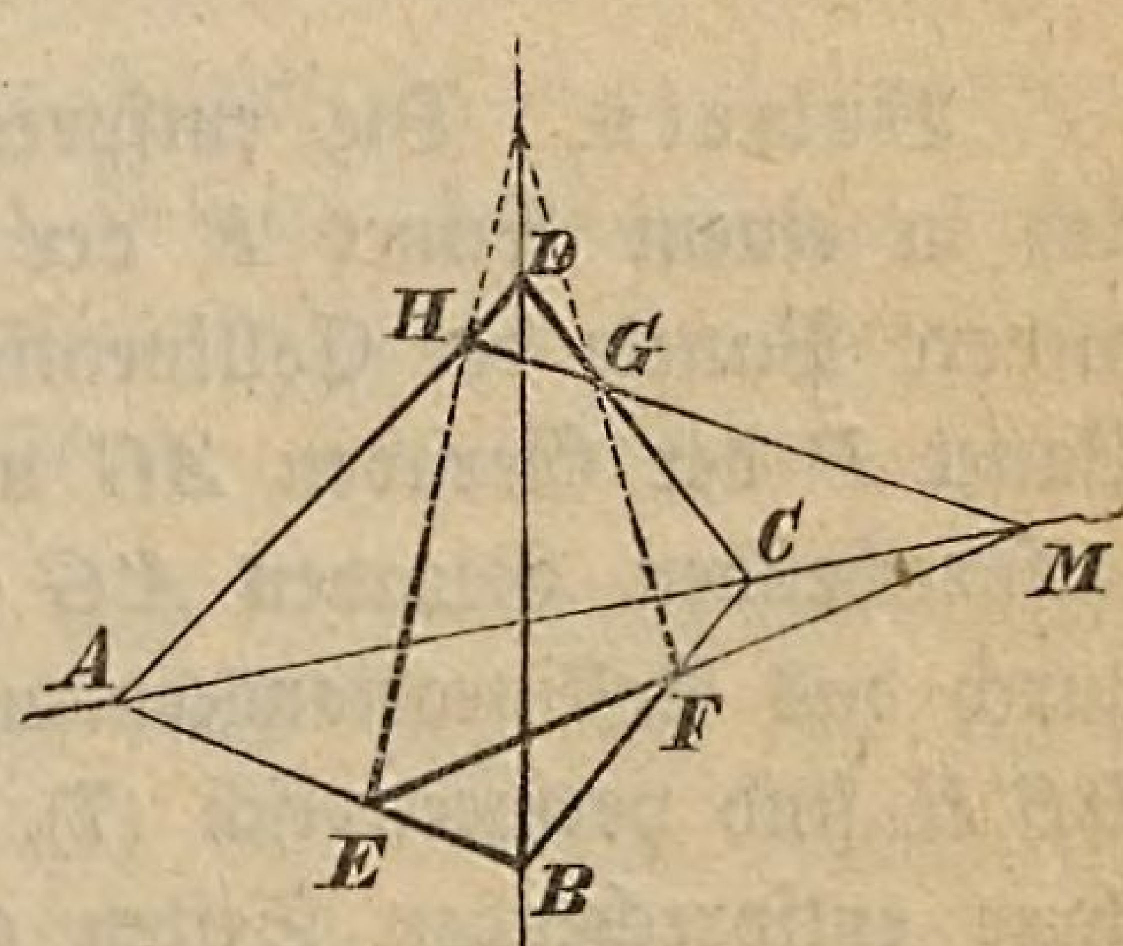
$CC''$ paarweise auf je einer Ebene und haben einen Punct gemein (§. 1, 3).

Wenn die perspectivischen Dreiecke $ABC$ und $A'B'C'$ auf einer Ebene liegen, so ziehe man die Geraden $A'S'$, $B'S'$, $C'S'$ nach einem beliebigen Punct $S'$ außer der gemeinschaftlichen Ebene, und die Geraden $AS''$, $BS''$, $CS''$ nach einem beliebigen Punct $S''$ der Geraden $SS'$. Die erstern Hülfslinien haben mit den letztern der Reihe nach die Puncte $A''$, $B''$, $C''$ gemein, so daß $A''B''C''$ sowohl mit $A'B'C'$, als auch mit $ABC$ perspectivisch ist. Nun gehn die Geraden $AB$, $A'B'$, $A''B''$ durch einen




Punct $F$, weil sie paarweise auf einer Ebene liegen; ebenso gehn $BC$ $B'C'$, $B''C''$ durch $G$, $CA$, $C'A'$, $C''A''$ durch $H$. Die Puncte $F$, $G$, $H$ liegen auf der Geraden, welche die Ebenen $ABC$ und $A''B''C''$ gemein haben.

Wenn andrerseits die Dreiecke $ABC$ und $A'B'C'$ auf einer Ebene so liegen, daß die Durchschnitte der entsprechenden Seiten auf einer Geraden $g$ liegen, so projicire man das Dreieck $A'B'C'$ auf eine durch $g$ gehende Ebene aus einem beliebigen Punct $S'$. Ist $A''B''C''$ diese Projection, so geht $A''B''$ durch den gemeinschaftlichen Punct von $AB$ und $A'B'$, u. s. w. Daher liegen $AA''$, $BB''$, $CC''$ paarweise auf einer Ebene und haben einen Punct $S''$ gemein. Den gemeinschaftlichen Punct der Geraden $S'S''$ und der Ebene $ABC$ haben die Geraden $AA'$, $BB'$, $CC'$ gemein.



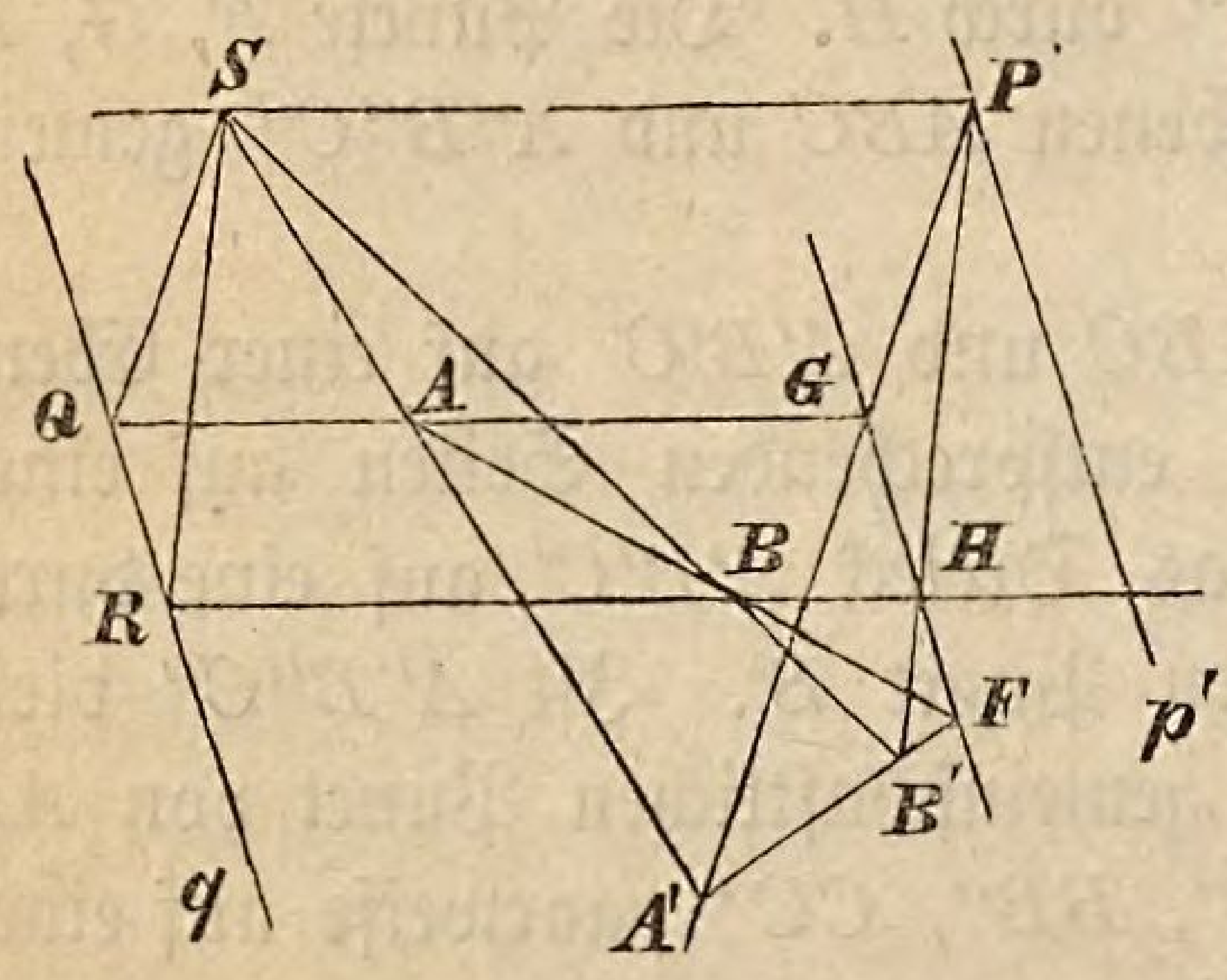

Anmerkung. Wenn einem ebenen oder unebenen Viereck $ABCD$ das Viereck $EFGH$ so eingeschrieben ist, daß ein Paar gegenüberliegende Seiten $EF$, $GH$ auf der Diagonale $AC$ sich schneiden, so schneiden sich die beiden andern $FG$, $HE$ auf der andern Diagonale $BD$.*) Denn die Dreiecke $AEH$ und $CFG$ sind perspectivisch, folglich u. s. w.

8. Wenn die Planfiguren $ABCD$ . . und $A'B'C'D'$ . . perspectivisch und nicht in einer Ebene enthalten sind, so liegen die Durchschnitte der entsprechenden Geraden $AB$ und $A'B'$; $AC$ und $A'C'$, $BC$ und $B'C'$, . . auf der Geraden, welche die Ebenen der Planfiguren gemein haben.

Wenn die Planfiguren $ABCD$ . . und $A'B'C'D'$ . . auf einer Ebene

*) Poncelet propr. proj. 166.

oder auf verschiedenen Ebenen so liegen, daß die entsprechenden Seiten der Dreiecke $ABC$ und $A'B'C'$, $ABD$ und $A'B'D'$, .. auf derselben Geraden sich schneiden, so sind sie perspectivisch (7). Der gemeinschaftliche Punct $S$ der die entsprechenden Puncte verbindenden Geraden $AA'$, $BB'$, $CC'$, .. heißt das Collineationscentrum der perspectivischen Figuren. Alle Geraden der einen Figur schneiden die entsprechenden Geraden der andern Figur auf derselben Geraden, welche die Collineationsaxe der perspectivischen Planfiguren heißt.*) Den Puncten, welche die eine Figur mit der Collineationsaxe gemein hat, entsprechen in der andern Figur dieselben Puncte. Einer Geraden der einen Figur, die mit der Collineationsaxe parallel ist, entspricht in der andern Figur eine parallele Gerade. Dem unendlich fernen Punct einer andern Geraden der einen Figur entspricht ein endlich ferner Punct der andern Figur. Die Puncte der Figur $ABC$.., welche den unendlich fernen Puncten der Figur $A'B'C'$ .. entsprechen, liegen auf einer Geraden $q$; die Puncte der Figur $A'B'C'$ .., welche den unendlich fernen Puncten der Figur $ABC$ .. entsprechen, liegen auf einer Geraden $p'$. Die Geraden $p'$, $q$ sind mit der Collineationsaxe parallel, die eine hat von der Collineationsaxe denselben Abstand, als der Collineationspunct von der andern.




Beweis. Die entsprechenden Geraden $AB$ und $A'B'$ schneiden sich in einem Punct $F$ der Collineationsaxe; sind $G$ und $H$ beliebige andere Puncte der Collineationsaxe, so entspricht dem gemeinschaftlichen Punct $P$ der Geraden $AG$ und $BH$ der gemeinschaftliche Punct $P'$ der entsprechenden Geraden $A'G$ und $B'H$ dergestalt, daß die Gerade $PP'$ durch das Collineationscentrum $S$ geht. Denn die Dreiecke $AA'G$ und $BB'H$ sind perspectivisch (7), mithin liegen die gemeinschaftlichen Puncte ihrer entsprechenden Seiten auf einer Geraden. Wenn nun $AG$ und $BH$ parallel sind, so ist $SP'$ mit ihnen parallel, und der ihrem gemeinschaftlichen unendlich fernen Punct entsprechende $P'$ liegt auf $A'G$ endlich fern. Eben so schließt man: wenn $P'$ auf $A'G$ so liegt, daß $SP'$

*) Die Planfiguren, welche eine Collineationsaxe besitzen, sind nicht verschieden von den homologischen Figuren Poncelet's (propr. proj. 297) und gehören zur Classe der von Möbius (baryc. Calcul p. 301) zuerst umfassend betrachteten und so benannten collinearen Figuren. Der von Chasles (Ap. hist. p. 259 d. Uebers.) gewählte Ausdruck homographisch ist die Uebersetzung von collinear. Die Namen Collineationscentrum, Collineationsaxe rühren von Magnus (anal.-geom. Aufg. I p. 43 ff.) her; derselbe hat die Geraden $p'$, $q$ Gegenaxen genannt.

und $AG$ parallel sind, so entsprechen den durch $P'$ gehenden Geraden $A'G$ und $B'H$ die parallelen Geraden $AG$ und $BH$. Vollendet man die Parallelogramme $GP'SQ$, $HP'SR$, . ., so entsprechen aus gleichen Gründen den durch $Q$, $R$, . . gehenden Büscheln von Geraden der Figur $ABC$ . . solche Büschel von Geraden der Figur $A'B'C'$ . ., die mit $A'G$, $B'H$, . . parallel sind. Die Strecken $GQ$, $HR$ sind parallel und gleich, also sind auch $QR$ und $GH$ parallel, u. s. w.

Wenn die Ebenen der perspectivischen Planfiguren $ABC$ . . und $A'B'C'$ . . nur die Collineationsaxe $FG$ . . gemein haben, so liegen die von $S$ nach den unendlich fernen Puncten von $A'B'C'$ . . gehenden Geraden auf einer Ebene, die mit der Ebene $A'B'C'$ parallel ist. Diese Ebene hat mit der Ebene $ABC$ die Gerade $q$ gemein, deren Puncte den unendlich fernen Puncten der Figur $A'B'C'$ . . entsprechen. Die Gerade $q$, welche der unendlich fernen Geraden der Ebene $A'B'C'$ entspricht, ist mit der Collineationsaxe parallel (§. 1, 5). Eben so findet man auf der Ebene $A'B'C'$ eine Gerade $p'$, entsprechend der unendlich fernen Geraden der Ebene $ABC$ und parallel mit der Collineationsaxe.

Anmerkung. Wenn die Planfiguren $ABC$ . . und $A'B'C'$ . . eine Collineationsaxe besitzen, und zwei der Verbindungslinien $AA'$, $BB'$, . . parallel sind, so sind alle parallel, das Collineationscentrum ist unendlich fern, und die Planfiguren sind perspectivisch affin.*) Unendlich fernen Puncten der einen Figur entsprechen nur unendlich ferne Puncte der andern Figur (die Dreiecke $AA'G$ und $BB'H$ sind nicht nur perspectivisch sondern auch ähnlich, also $A'G$ und $B'H$ parallel).

Wenn die entsprechenden Geraden $AB$ und $A'B'$, . . der Planfiguren $ABC$ . . und $A'B'C'$ . . parallel sind, so sind die Planfiguren perspectivisch ähnlich. Die Collineationsaxe ist unendlich fern, das Collineationscentrum heißt Aehnlichkeitscentrum. Vergl. Planim. §. 12.

**9.** Wenn von zwei Planfiguren, die eine Collineationsaxe besitzen, die eine um die Collineationsaxe gedreht wird, während die andere ruht, so bleiben die Figuren perspectivisch (8), das Collineationscentrum beschreibt einen Kreis, dessen Ebene zur Collineationsaxe normal steht und dessen Centrum auf der Geraden liegt, welche der unendlich fernen Geraden der bewegten Planfigur in der andern Planfigur entspricht.**)

---

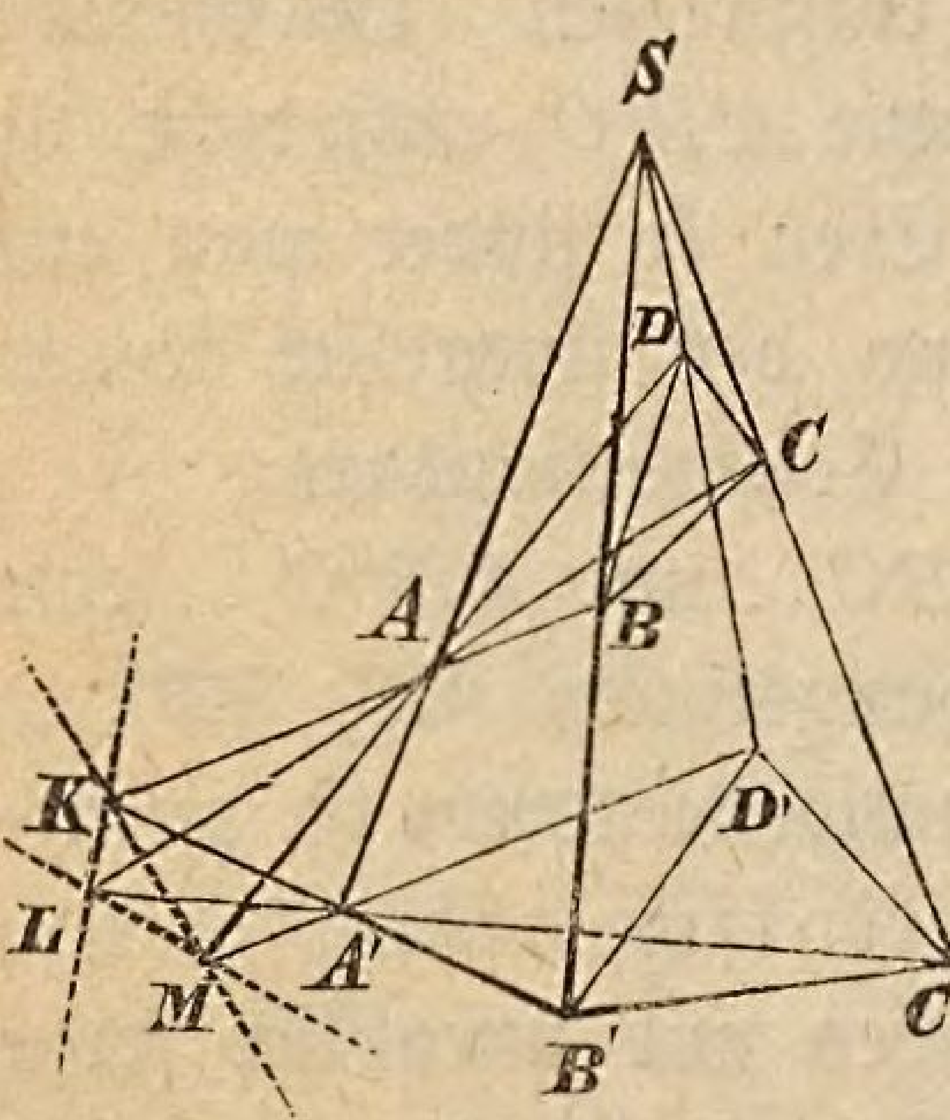
*) Die perspectivischen affinen Figuren sind von Clairault 1731 (Chasles Ap. hist. p. 655 d. Uebers.), Euler (Introd. II cap. 18), Poncelet (propr. proj. 326) betrachtet worden. Der Name Affinität rührt von Euler her. Umfassende Untersuchungen über die affinen Figuren hat zuerst Möbius angestellt (Baryc. Calcul 144 ff. 230).

**) Möbius baryc. Calcul p. 326. Bobillier Gerg. Ann. 17 p. 335. Steiner syst. Entw. p. 53. Magnus anal.-geom. Aufg. II §. 16. Chasles Ap. hist. p. 81 d. Uebers.

Beweis. Dreht man die Figur $ABC$.. um die Collineationsaxe $FG$, so bleiben $P'S$, $QS$ mit $AG$, $A'G$ parallel und $P'S$ behält ihre Länge. Weil sich der Winkel von $AG$ mit der Collineationsaxe nicht ändert, so bleibt der Winkel von $P'S$ mit der Geraden $p'$ unverändert. Daher beschreibt $P'S$ einen Rotationskegel um die Axe $p'$, $S$ einen Parallelkreis desselben.

**10.** Wenn die unebenen Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ perspectivisch sind, so liegen die Durchschnitte der entsprechenden Ebenen $ABC$ und $A'B'C'$, $ABD$ und $A'B'D'$, . . auf einer Ebene, und umgekehrt.*)

Beweis. Die gemeinschaftlichen Puncte von $AB$ und $A'B'$, $AC$ und $A'C'$, $AD$ und $A'D'$ werden durch $K$, $L$, $M$ bezeichnet. Dann ist $KL$ die Collineationsaxe der perspectivischen Dreiecke $ABC$ und $A'B'C'$, $LM$ die Collineationsaxe der perspectivischen Dreiecke $ACD$ und $A'C'D'$, $MK$ die Collineationsaxe der perspectivischen Dreiecke $ADB$ und $A'D'B'$. Die Geraden $BC$ und $B'C'$ schneiden sich auf $KL$ (7), die Geraden $CD$ und $C'D'$ schneiden sich auf $LM$, die Geraden $DB$ und $D'B'$ schneiden sich auf $MK$. Also ist $KLM$ die Collineationsebene der Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$.




Umgekehrt: Wenn die Ebenen $ABC$ und $A'B'C'$ die Gerade $f$, $ABD$ und $A'B'D'$ die Gerade $g$ gemein haben, $f$ und $g$ auf einer Ebene liegen, so haben sowohl $f$, $g$, $AB$ als auch $f$, $g$, $A'B'$ einen Punct gemein (§. 1, 3), also haben $AA'$ und $BB'$ einen Punct gemein. Eben so erkennt man, daß je zwei unter den Geraden $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$ einen Punct gemein haben, und schließt daraus, daß alle einen Punct gemein haben.

**11.** Wenn die Raumfiguren $ABCD$ und $A'B'C'D'$, $ABCE$ und $A'B'C'E'$, . . eine gemeinschaftliche Collineationsebene besitzen, auf der die entsprechenden Ebenen $ABC$ und $A'B'C'$, . . sich schneiden (10), so sind die Raumfiguren $ABCDE$.. und $A'B'C'D'E'$.. perspectivisch. Den

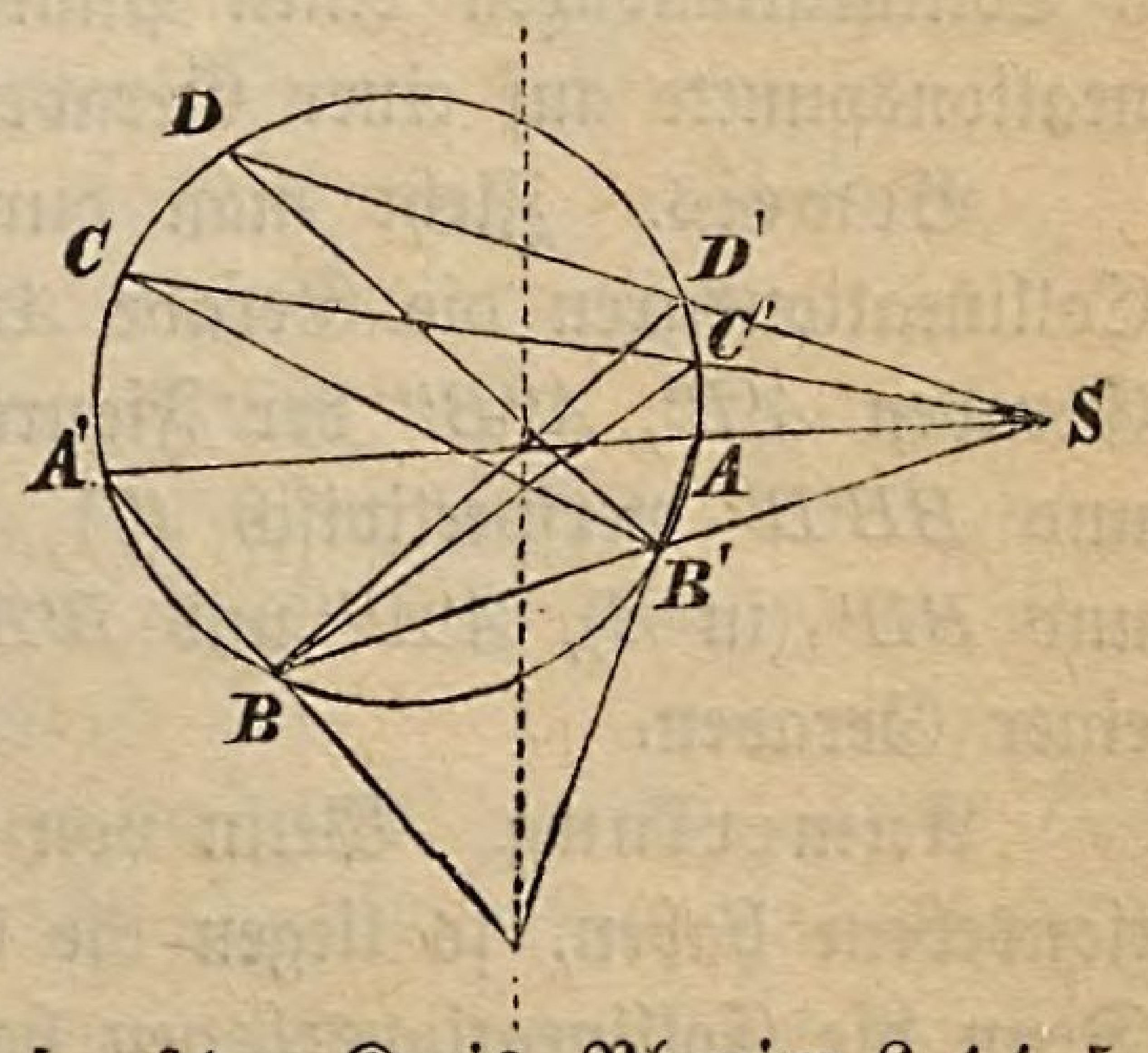
---

*) Poncelet propr. proj. 582. Ein allgemeinerer Satz über die unebenen Vierecke von Chasles (Ap. hist. p. 648 d. Uebers.) lautet: Wenn die Geraden $AA'$, . . auf einem Hyperboloid liegen, so liegen auch die Durchschnitte der Ebenen $ABC$ und $A'B'C'$, . . auf einem Hyperboloid. Vergl. Hermes in Crelle J. 56 p. 218.

Puncten, welche die eine Figur mit der Collineationsebene gemein hat, entsprechen in der andern Figur dieselben Puncte. Einer Geraden der einen Figur, die mit der Collineationsebene parallel ist, entspricht in der andern Figur eine parallele Gerade. Die Puncte der Figur $AB$.., welche den unendlich fernen Puncten der Figur $A'B'$ .. entsprechen, liegen auf einer Ebene $\vartheta$; die Puncte der Figur $A'B'$.., welche den unendlich fernen Puncten der Figur $AB$ .. entsprechen, liegen auf einer Ebene $\eta'$. Die Ebenen $\eta'$, $\vartheta$ sind mit der Collineationsebene parallel, die eine hat von der Collineationsebene denselben Abstand, als der Collineationspunct von der andern.*)

**Beweis.** Je zwei entsprechende Planfiguren, die zu den in Betracht gezogenen Raumfiguren gehören, haben eine auf der Collineationsebene liegende Collineationsaxe (8). Wenn den unendlich fernen Puncten von $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$, $A'E'$ die Puncte $Q$, $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, entsprechen, so sind die Geraden $QQ_1$, $QQ_2$, $QQ_3$, mit der Collineationsebene parallel, folglich liegen $Q$, $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ auf einer Ebene $\vartheta$, die mit der Collineationsebene parallel ist. Wenn dem unendlich fernen Punct von $AB$ der Punct $P'$ entspricht, wenn $S$ der Collineationspunct und $K$ der Durchschnitt von $AB$ mit der Collineationsebene ist, so ist das Viereck $QSP'K$ ein Parallelogramm; daher hat die Ebene $\vartheta$ der Puncte $Q$ von der Collineationsebene denselben Abstand, als das Collineationscentrum von der Ebene $\eta'$ der Puncte $P'$.

**12.** Wenn die Figuren $ABCD$ .. und $A'B'C'D'$ .. einem Kreise eingeschrieben und perspectivisch sind, so haben sie eine Collineationsaxe, auf der nicht nur die entsprechenden Strecken $AB$ und $A'B'$, $AC$ und $A'C'$, .., $BC$ und $B'C'$, .. sich schneiden, sondern auch die Geraden $AB'$ und $A'B$, .., und die Geraden, welche den Kreis in $A$ und $A'$, .. berühren. Dem Punct $B'$, wenn er als ein Punct der ersten Figur betrachtet wird, entspricht in der andern Figur der Punct $B$. Die Collineationsaxe ist die Polare des Collineationscentrum in Bezug auf den Kreis. Planim. §. 14, 5.




*) Eine dieser Raumfiguren ist ein Relief der andern. Poncelet propr. proj. 576. Nach übereinstimmender Methode hatte Breysig Reliefs construiren gelehrt: Versuch einer Erläuterung der Reliefs-Perspective, Magdeburg 1798. Vergl. Anger Grunert Archiv 4 p. 285. Die Collinearität von Raumfiguren ist nächst Möbius besonders von Magnus analytisch behandelt worden (Analyt.-geom. Aufgaben II p. 72 ff.).

Wenn die Figuren $ABCD$ .. und $A'B'C'D'$ .. einer Kugel eingeschrieben und perspectivisch sind, so haben sie eine Collineationsebene, die Polare des Collineationscentrum $S$ in Bezug auf die Kugel. Denn die in den Raumfiguren enthaltenen Planfiguren sind Kreisen eingeschrieben, und ihre Collineationsaxen sind normal zu dem nach $S$ gerichteten Radius der Kugel. Wird das Centrum der Kugel durch $M$, das Centrum eines Kreises, dessen Ebene den Punct $S$ enthält, durch $N$, die zu dieser Ebene gehörende Collineationsaxe durch $p$ bezeichnet, so ist $p$ normal zu $NS$ und zu $NM$, mithin normal zu $MS$.

Wenn die Figuren $ABCD$ .. und $A'B'C'D'$ .. je einem Kreise eingeschrieben und so perspectivisch sind, daß die Geraden $AA'$, $BB'$, .. in einem Aehnlichkeitspunct der Kreise zusammentreffen, ohne daß die Geraden $AB$ und $A'B'$ .. parallel sind, so haben die Figuren eine Collineationsaxe, auf der die Geraden $AB$ und $A'B'$, $AB'$ und $A'B$ .. sich schneiden. Die Puncte der Collineationsaxe haben gleiche Potenzen in Bezug auf die Kreise. Planim. §. 14, 6.

Wenn die Figuren $ABCD$ .. und $A'B'C'D'$ .. je einer Kugel eingeschrieben und so perspectivisch sind, daß die Geraden $AA'$, $BB'$, .. in einem Aehnlichkeitspunct der Kugeln zusammentreffen, ohne daß die Geraden $AB$ und $A'B'$ .. parallel sind, so haben die Figuren eine Collineationsebene. Jeder Punct der Collineationsebene hat in Bezug auf die Kugeln gleiche Potenzen.

**13.** Von 3 Planfiguren $f$, $f'$, $f''$ werde vorausgesetzt, daß je zwei eine Collineationsaxe haben und perspectivisch sind (8). Wenn die 3 Collineationsaxen einen Punct gemein haben, so liegen die 3 Collineationspuncte auf einer Geraden, und umgekehrt.*)

Beweis. Zieht man durch den gemeinschaftlichen Punct $O$ der Collineationsaxen die Gerade $AB$ der Figur $f$, und die entsprechenden Geraden $A'B'$, $A''B''$ der Figuren $f'$, $f''$, so sind die Dreiecke $AA'A''$ und $BB'B''$ perspectivisch (7), folglich schneiden sich die Geraden $AA'$ und $BB'$ (in $S$), $A'A''$ und $B'B''$ (in $S'$), $A''A$ und $B''B$ (in $S''$) auf einer Geraden.

Anmerkung. Wenn von 3 Raumfiguren je zwei eine Collineationsebene haben, so liegen die Collineationspuncte auf einer Geraden. Denn die Collineationsebenen haben einen Punct gemein.

**14.** Wenn zwei Figuren einer dritten Figur ähnlich und mit ihr perspectivisch sind, so sind sie selbst ähnlich und perspectivisch; die Aehn-

---

*) Magnus analyt.-geom. Aufgaben I p. 51. Vergl. Steiner Crelle J. 1 p. 41.

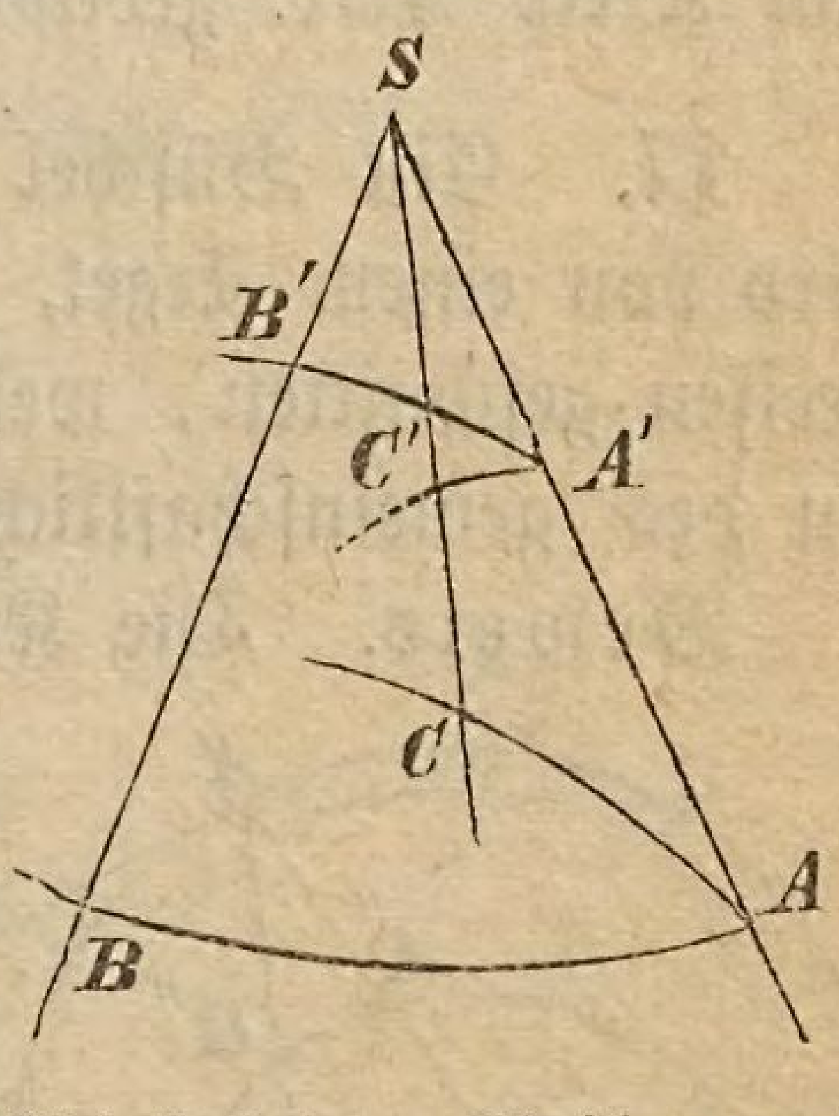
lichkeitspuncte liegen auf einer Geraden.*) Denn die entsprechenden Geraden z. B. $AB$, $A'B'$, $A''B''$ sind parallel und haben einen unendlich fernen Punct gemein, folglich u. s. w. (13).

Insbesondere können zwei Kreise auf einer Ebene oder auf parallelen Ebenen, so wie zwei Kugeln auf zwei Arten als ähnlich und perspectivisch betrachtet werden (Planim. §. 12, 7). Daher können 3 Kreise auf einer Ebene oder auf parallelen Ebenen, oder 3 Kugeln auf 4 Arten 3 Paare von ähnlichen und perspectivischen Figuren bilden; von den Aehnlichkeitspuncten $S_{12}$, $S_{13}$, $S_{23}$, $T_{12}$, $T_{13}$, $T_{23}$ liegen 4mal 3 auf je einer Geraden.**) Vier Kugeln können auf 8 Arten 6 Paare von ähnlichen und perspectivischen Figuren bilden; von den Aehnlichkeitspuncten $S_{12}, .., S_{34}, T_{12}, .., T_{34}$ liegen 8mal 6 auf je einer Ebene.

Drei Kreise einer Ebene können auch 3 Paare von perspectivischen und nicht ähnlichen Figuren bilden, deren Collineationspuncte mit den Aehnlichkeitspuncten zusammenfallen (12). Weil die Collineationspuncte auf einer Geraden liegen, so gehn die Collineationsaxen durch einen Punct, der in Bezug auf die 3 Kreise gleiche Potenzen hat. Planim. §. 14, 7.

**15.** Zwei sphärische Figuren einer Kugel, welche perspectivisch liegen, sind i s o g o n a l d. h. die entsprechenden Winkel sind gleich.***)

B e w e i s. $AB$, $AC$ sind Curven einer Kugel, $A'B'$, $A'C'$ ihre Centralprojectionen aus $S$ auf dieselbe Kugel; die Ebenen, welche die Gerade $SA$ gemein haben und die Curven $AB$, $AC$ berühren, schneiden die Kugel in den Kreisen $DAA'D'$, $EAA'E'$. Die Kreise $DAA'D'$, $EAA'E'$ berühren in $A$ die Curven $AB$, $AC$, in $A'$ die Curven $A'B'$, $A'C'$, weil die Ebenen $SAD$, $SAE$, auf welchen die Kreise liegen, die projicirenden Kegel berühren, auf denen die Curven $AB$, $A'B'$ und $AC$, $A'C'$ liegen (§. 3, 2). Daher sind die von den Curven $AB$, $AC$ und von den Curven $A'B'$, $A'C'$ gebildeten Winkel der Reihe nach nicht verschieden von den Winkeln der Kreisbogen $AD$, $AE$ und $A'D'$,




*) M a g n u s I p. 57, II p. 97.

**) M o n g e nach Poncelet's Angabe (propr. proj. 269), D'A l e m b e r t nach Fuß' Mittheilung (Nov. Act. Petrop. XIV p. 139). Die obigen Beziehungen sind von F u ß a. a. O. umfassend betrachtet worden.

***) Vergl. Planim. §. 14, 13 ff. M i q u e l Liouv. J. XI p. 72. Das einfache Princip des Beweises ist zuerst von D a n d e l i n bei der Theorie der stereographischen Projection angewendet worden. Vergl. Gerg. Ann. 16 p. 322.

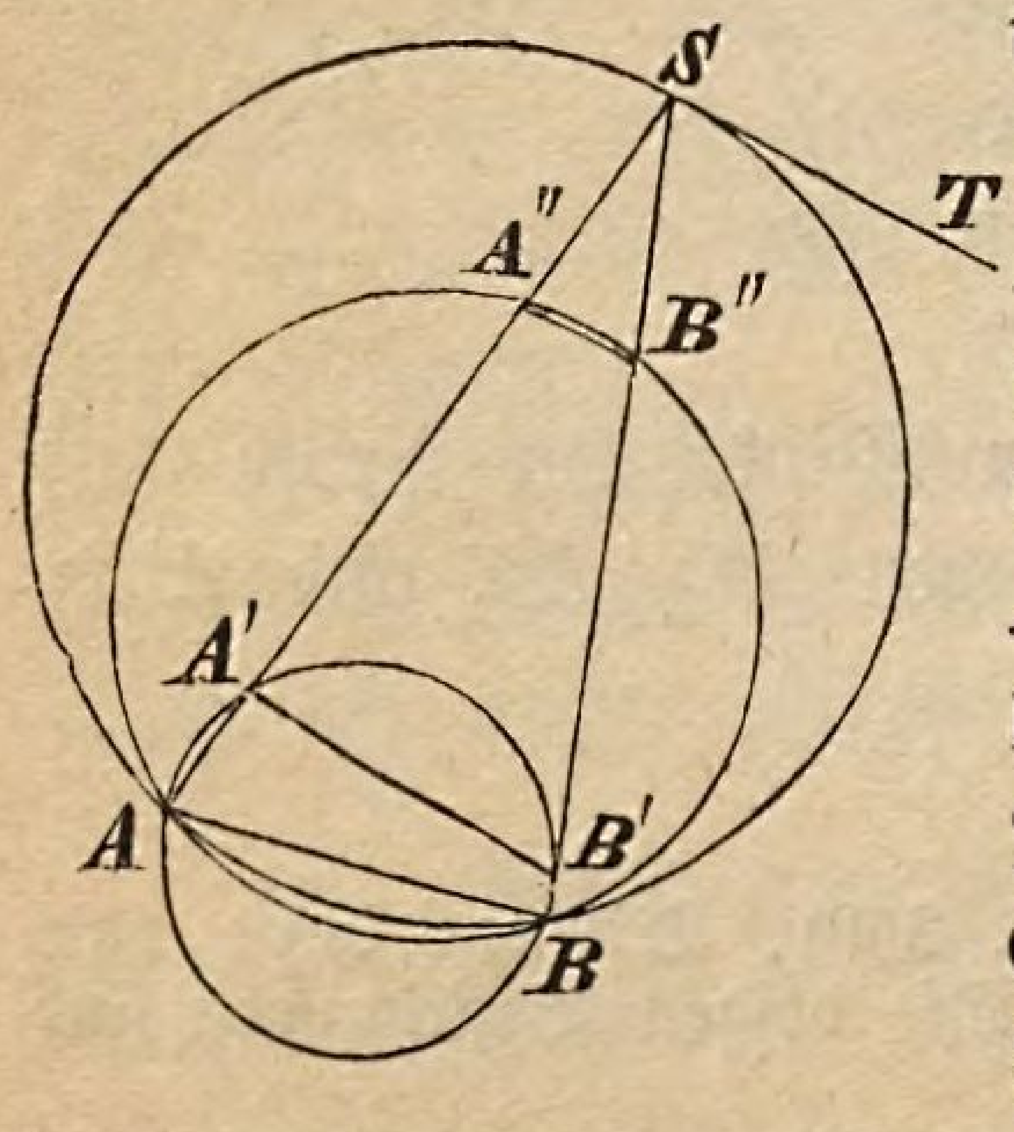
$A'E'$. Diese letztern Winkel sind einander gleich, weil die sphärischen Dreiecke, welche $A$ und $A'$ mit den sphärischen Centren der Kreise bilden, gleich und ähnlich sind; also sind auch die erstern Winkel einander gleich.

**16.** Zwei sphärische Figuren einer Kugel, welche perspectivisch liegen, sind homocyclisch (kreisverwandt), d. h. vier Puncten der einen Figur, die auf einem Kreis liegen, entsprechen vier Puncte der andern Figur, die ebenfalls auf einem Kreis liegen. Der Hauptkreis, dessen Ebene den Collineationspunct und das sphärische Centrum des einen Kreises enthält, geht auch durch das sphärische Centrum des andern Kreises.

Beweis. Die Kugel wird von den Ebenen $SAB$, $SBC$, $SCD$, $SDA$ in den Kreisen $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DAA'D'$ geschnitten, so daß die von Kreisbogen gebildeten Vierecke $ABCD$, $A'B'C'D'$ der Reihe nach gleiche Winkel haben (15). Wenn nun $D$ auf dem Kreis $ABC$ liegt, so ist die Summe von zwei nicht folgenden Winkeln des Vierecks $ABCD$ der Summe der beiden andern Winkel gleich (§. 4, 14. Vergl. Planim. §. 4, 4). Dieselbe Gleichung findet zwischen den Winkeln des Vierecks $A'B'C'D'$ statt, also liegt $D'$ auf dem Kreis $A'B'C'$. Ist $AB$ der sphärische Diameter des Kreises $ABC$, auf dessen Ebene $S$ liegt, so ist $A'B'$ ein sphärischer Diameter des Kreises $A'B'C'$, weil der von $A'B'$ mit dem Kreis $A'B'C'$ gebildete Winkel dem von $AB$ mit dem Kreis $ABC$ gebildeten Winkel gleich, also recht ist.

**17.** Ein Büschel von Kugeln, die einen Kreis gemein haben, wird von einem Kegel, auf welchem der gemeinschaftliche Kreis liegt, in Kreisen geschnitten, welche parallel sind und stereographische Projectionen des gemeinschaftlichen Kreises aus dem Centrum des Kegels.*)

Beweis. Die Kugeln haben mit dem Kegel, dessen Centrum $S$ ist, den Kreis $ABC$ gemein und werden von dem Kegel in den sphärischen Figuren $A'B'C'$, $A''B''C''$, .. geschnitten, die mit $ABC$ isogonal und homocyclisch, also Kreise sind. Auf der Ebene $ABS$ liegen die Kreise $ABB'A'$, $ABB''A''$, . ., $ABS$ und die Tangente des letztern $ST$; die Winkel $2AA'B'$, $2AA''B''$, . ., $2AST$ sind gleich (Planim. §. 4, 3), also die Geraden $A'B'$, $A''B''$, . ., $ST$ parallel; u. s. w. Folglich sind die Ebenen $A'B'C'$, $A''B''C''$, . .



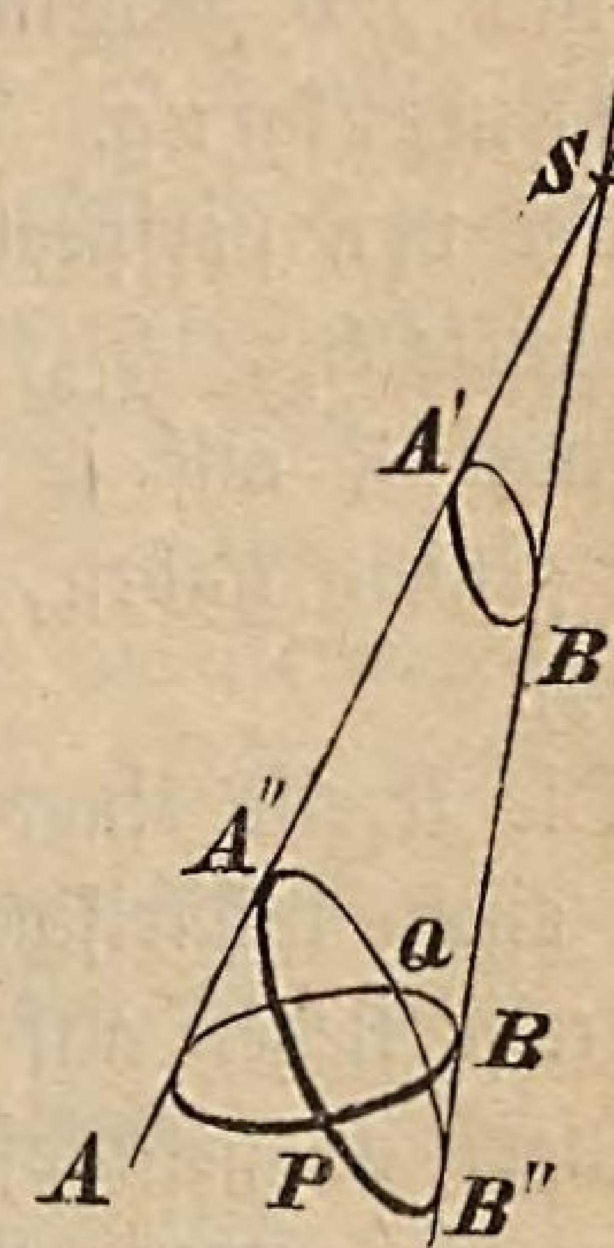

*) Vergl. den Aufsatz des Verf. Crelle J. 54 p. 165. Im Allgemeinen haben

mit der Ebene parallel, welche die Kugel $ABCS$ in $S$ berührt, d. h. die Kreise $A'B'C'$, $A''B''C''$, .. sind stereographische Projectionen des Kreises $ABC$ aus $S$ (6).

Kreise wie $ABC$ und $A'B'C'$ sind sogenannte Wechselschnitte des Kegels (5). Bei dem Rotationskegel sind dieselben parallel.

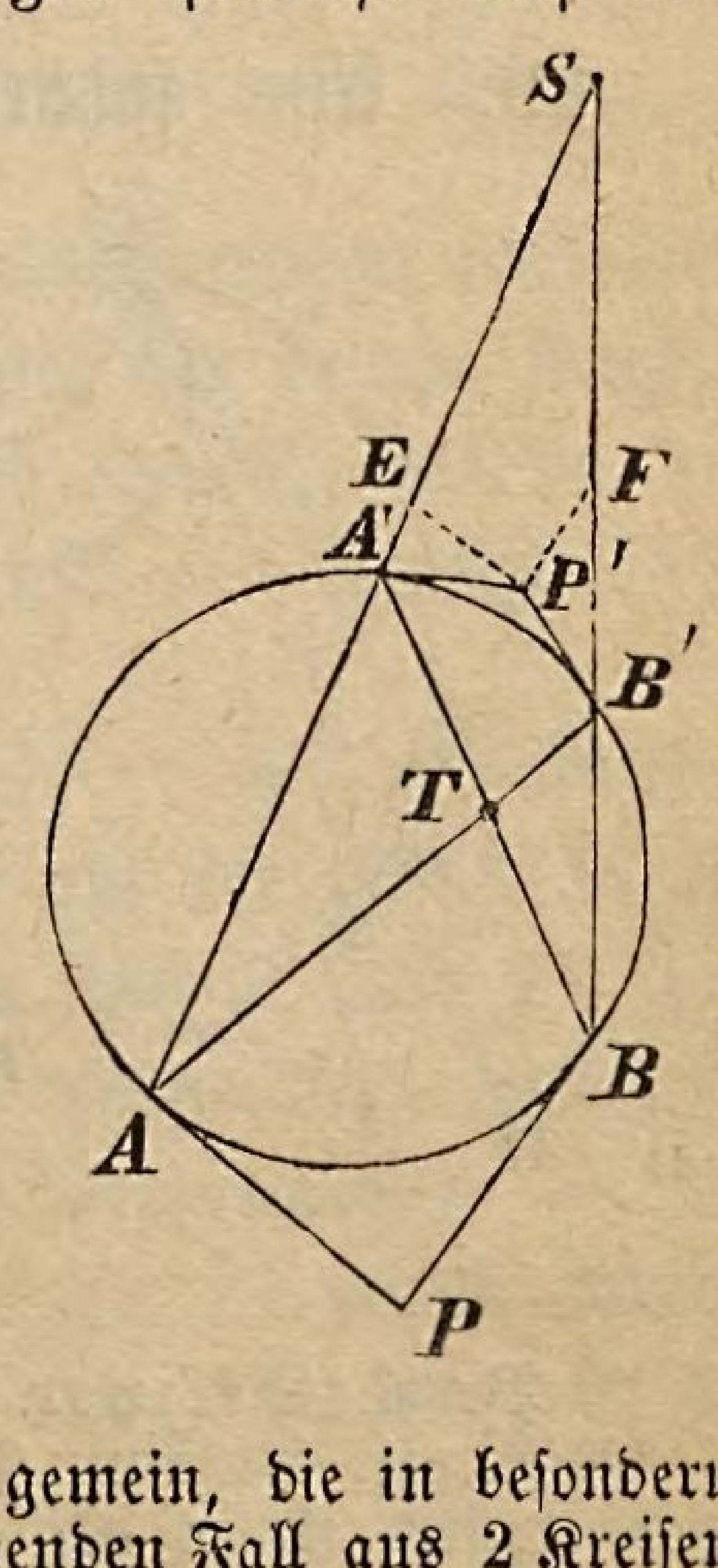
**18.** Wenn zwei nicht parallele Kreise auf einem Kegel (perspectivisch) liegen, so liegen sie auf einer Kugel.

Beweis. Haben die Kreise zwei Puncte gemein, so liegen sie auf einer Kugel (§. 3, 9). Haben die Kreise keinen realen Punct gemein, z. B. $ABC$ und $A'B'C'$, so ziehe man die Sehne $PQ$ des Kreises $ABC$ parallel mit der Ebene $A'B'C'$, und lege durch $PQ$ den Kegelschnitt $A''B''C''$ parallel mit $A'B'C'$, der ein Kreis ist wie $A'B'C'$. Die Kreise $ABC$ und $A''B''C''$ liegen auf einer Kugel, weil sie die Puncte $P$ und $Q$ gemein haben. Der gegebene Kegel enthält den Kreis $ABC$ und schneidet zum zweitenmal die Kugel $ABCA''$ in dem Kreis $A''B''C''$, die Kugel $ABCA'$ in einem Kreis, welcher mit dem Kreise $A''B''C''$ parallel ist (17) und deshalb mit dem Kreis $A'B'C'$ zusammenfällt.




**19.** Wenn zwei Kreise auf einer Kugel liegen, so sind sie auf 2 Arten perspectivisch. Ihre Collineationspuncte liegen sowohl auf der Ebene des Hauptkreises, welcher durch die sphärischen Centren der Kreise geht, als auch auf der Geraden, welche die Centren der Kegel verbindet, von denen die Kugel längs der beiden Kreise berührt wird.

Beweis. Der Hauptkreis, welcher durch die sphärischen Centren der Kreise geht, schneidet den einen Kreis $k$ in $A$ und $B$, den andern $k'$ in $A'$ und $B'$; die Geraden $AA'$ und $BB'$ schneiden sich in $S$. Der Kegel, welcher den Kreis $k$ aus $S$ auf die Kugel projicirt, schneidet dieselbe in einem Kreis, für den der Hauptkreisbogen $A'B'$ ein sphärischer Diameter ist (16), und mit dem also der




2 Flächen 2ter Ordnung eine unebene Linie 4ter Ordnung gemein, die in besondern Fällen aus 2 (planen) Linien 2ter Ordnung, in dem vorliegenden Fall aus 2 Kreisen besteht. Vergl. Chasles Corresp. sur l'Ecole polyt. 3 p. 13 und Poncelet propr. proj. 600.

Kreis $k'$ zusammenfällt. Durch gegenseitige Vertauschung von $A'$ und $B'$ findet man den zweiten Collineationspunct $T$ der gegebenen Kreise.

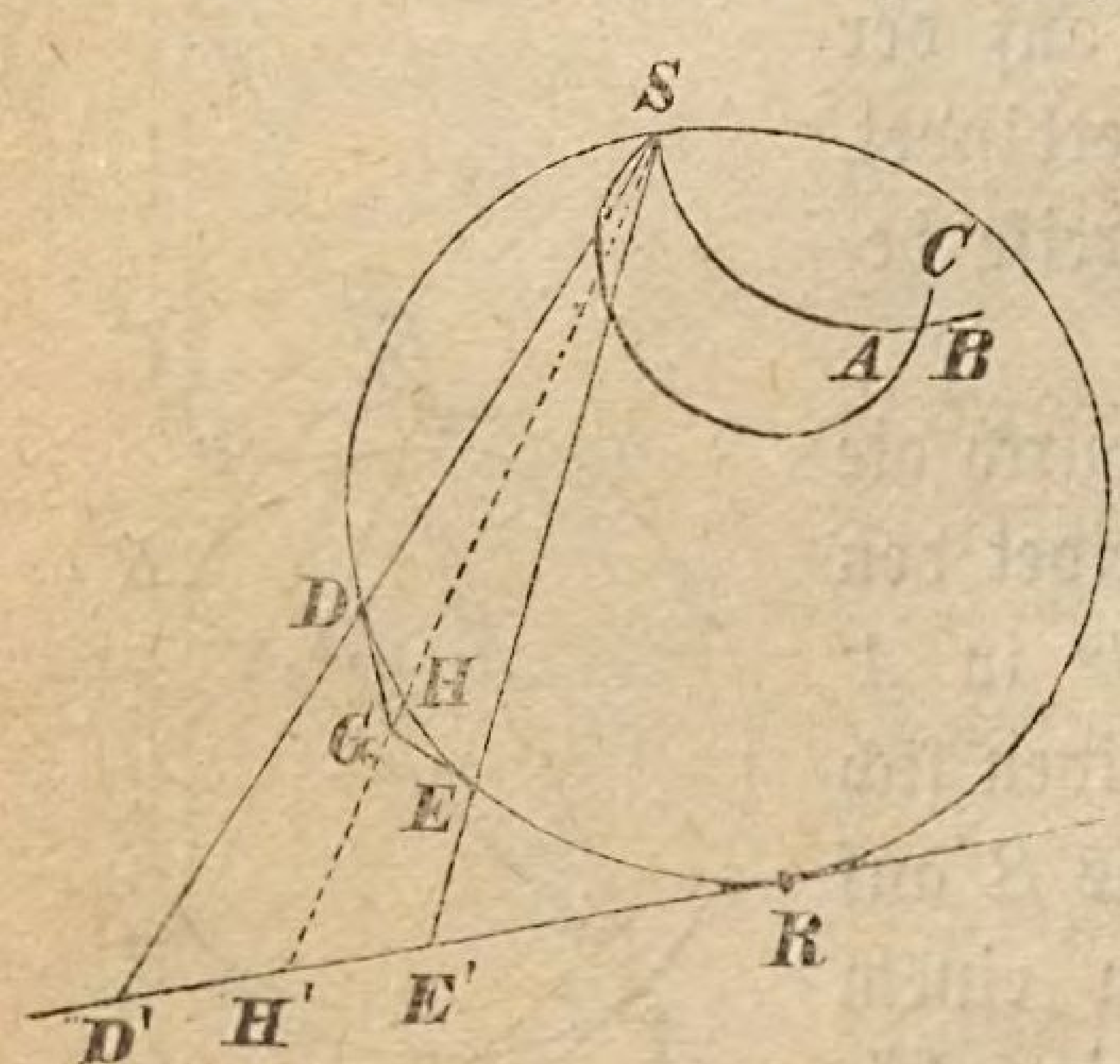
Die Geraden, welche den Hauptkreis an den Enden der Sehnen $A'B'$ und $AB$ berühren, schneiden sich in $P'$ und $P$, den Centren der Kegel, welche die Kugel längs der Kreise $k'$ und $k$ berühren (§. 3, 6). Zieht man $P'E$ und $P'F$ parallel mit $PA$ und $PB$, so ist $P'E = P'A'$, $P'F = P'B'$, also $P'E = P'F$. Daher sind die Dreiecke $P'EF$ und $PAB$ ähnlich und perspectivisch, d. h. die Gerade $PP'$ geht durch $S$.

Die Gerade $ST$ ist die Polare des Punctes, welchen die Geraden $A'B'$ und $AB$ gemein haben, in Bezug auf den Kreis $ABB'A'$ (12).

Anmerkung. Drei Kreise einer Kugel können auf 4 Arten als 3 Paare von perspectivischen Figuren betrachtet werden. Die Collineationspuncte $S_{12}$, $S_{13}$, $S_{23}$, $T_{12}$, $T_{13}$, $T_{23}$ liegen auf einer Ebene, nämlich 4mal 3 auf je einer Geraden, weil die Collineationsaxen einen Punct gemein haben, den gemeinschaftlichen Punct der Kreisebenen (13 und 14).

Die Kreise einer Kugel, deren Ebenen eine Gerade gemein haben, bilden einen sphärischen Büschel. Die sphärischen Centren ihrer Orthogonalkreise liegen auf dem Hauptkreise des Büschels.*) Aus einem von der Kugel ausgeschlossenen Punct $P$ der gemeinschaftlichen Geraden $g$ gehn gleiche gerade Tangenten an die Kreise des Büschels, weil die Kreise auf einer Kugel liegen; die Projection des Punctes $P$ auf die Kugel aus dem Centrum derselben ist das sphärische Centrum eines bestimmten Kreises, der die Kreise des Büschels normal schneidet.

**20.** Eine sphärische Figur und eine stereographische Projection derselben sind isogonal und homocyclisch. Die Gerade, welche das Centrum des Kegels projicirt, der die Kugel längs eines Kreises berührt, geht durch das Centrum der stereographischen Projection des Kreises.**)




Beweis. Zwei sphärische Curven $Au$ und $Av$ werden aus dem Punct $S$ der Kugel durch Kegel auf eine Ebene projicirt, die mit der Tangentenebene der Kugel, welche durch $S$ geht, parallel

*) Vergl. Steiner in Crelle J. 1 p. 182. Miquel a. a. O. p. 73.

**) Vergl. Planim. §. 14, 14. Das Centrum der stereographischen Projection eines Kreises ist in der angegebenen Weise von Chasles 1817 bestimmt worden (Ap. hist. p. 216 d. Uebers.). Die einfache Begründung dieser Theorie rührt, wie oben (15) bemerkt, von Dandelin her.

ist und z. B. die Kugel in $R$, dem Gegenpunct von $S$, berührt. Die Ebenen, welche die projicirenden Kegel in $SA$ berühren, enthalten gerade Tangenten sowohl der sphärischen Curven $Au$ und $Av$, als auch ihrer Projectionen $A'u'$ und $A'v'$, sie schneiden die Kugel in den Kreisen $SAB$ und $SAC$, die auf Tangentenebenen der projicirenden Kegel liegen und deshalb die sphärischen Curven in $A$ berühren; sie schneiden die Tangentenebene der Kugel, mit der die Projectionsebene parallel ist, in den Geraden $Su''$ und $Sv''$, welche die Kreise $SAB$ und $SAC$ berühren, und mit den Geraden $A'u'$ und $A'v'$ parallel sind. Der Winkel der sphärischen Curven oder der sie berührenden Kreise ist dem in $S$ von denselben Kreisen gebildeten Winkel gleich (15), folglich ist er auch dem von den Tangenten $Su''$ und $Sv''$ oder von den Tangenten $A'u'$ und $A'v'$ gebildeten Winkel, d. i. seiner stereographischen Projection gleich.

Man bezeichne nun durch $G$ das Centrum des Kegels, welcher die Kugel in dem Kreise $DEF$ berührt, durch $H$ die Projection von $G$ auf die Kugel aus dem Punct $S$, durch $D'$, $E'$, $F'$, $H'$ die stereographischen Projectionen von $D$, $E$, $F$, $H$. Die Kreise $SHD$, $SHE$, $SHF$ schneiden den Kreis $DEF$ normal, weil ihre Tangenten $DG$, $EG$, $FG$ den Kreis $DEF$ normal schneiden. Also schneiden die Geraden $H'D'$, $H'E'$, $H'F'$ als die stereographischen Projectionen der Kreise $SHD$, $SHE$, $SHF$ die stereographische Projection $D'E'F'$ des Kreises $DEF$ gleichfalls normal. Hieraus erkennt man, daß die Curve $D'E'F'$ ein Kreis und $H'$ dessen Centrum ist. Auch kann man wie oben (19) beweisen, daß $H'D' : H'E' = GD : GE$, u. s. w.

Anmerkung. Die stereographische Projection eines sphärischen Büschels von Kreisen (19, Anm.) ist ein planer Büschel von Kreisen.

**21.** Eine sphärische Figur und die unähnliche Projection derselben auf eine andere Kugel aus einem Aehnlichkeitspunct der beiden Kugeln sind isogonal und homocyclisch. Die Centren von Kegeln, welche die Kugeln in entsprechenden Kreisen berühren, liegen mit dem Projectionscentrum auf einer Geraden.*)

Beweis. Ist $f$ eine Figur der ersten Kugel, $f'$ die unähnliche, $f''$ die ähnliche Projection der sphärischen Figur $f$ auf die zweite Kugel aus einem Aehnlichkeitspunct der beiden Kugeln, so sind $f'$ und $f''$ isogonal und homocyclisch (15 und 16), $f''$ und $f$ desgleichen, weil sie ähnlich sind, also sind auch $f'$ und $f$ isogonal und homocyclisch. Sind $P$, $P'$, $P''$ die Centren der Kegel, welche die Kugeln in einem Kreis von $f$ und in den entsprechenden Kreisen von $f'$ und $f''$ berühren, so

---

*) Miquel a. a. O. p. 72.

liegt $P'$ auf der Geraden, welche $P''$ projicirt (19), und $P''$ auf der Geraden, welche $P$ projicirt, wegen der Aehnlichkeit von $f''$ und $f$, also liegt $P'$ auf der Geraden, welche $P$ projicirt.

Bezeichnet man die Centren der Kugeln durch $M$ und $M'$, ihre Radien durch $r$ und $r'$, den äußern Aehnlichkeitspunct durch $S$, so hat man $SM : r = SM' : r'$. Wenn nun das Centrum der zweiten Kugel $M'$ in unendliche Ferne entweicht, so wird $SM : r = 1$, die Kugel geht in eine $SM$ normal schneidende Ebene über und die Projection wird eine stereographische.

## §. 6. Tetraeder und Parallelepiped.

1. Eine aus planen Polygonen bestehende geschlossene Fläche heißt ein **Polyeder**, mit Rücksicht auf den eingeschlossenen Raum ein (geometrischer) **Körper**. Die verbundenen Polygone heißen seine **Flächen** (ἕδραι, faces). Jede Seite eines Polygons fällt mit einer Seite eines angrenzenden Polygons zusammen und wird eine **Kante** (§. 2, 5) des Polyeders genannt. Jede Kante des Polyeders ist die Kante eines Flächenwinkels des Polyeders. Jeder Winkel eines Polygons hat mit je einem Winkel von zwei oder mehr andern Polygonen den Scheitel gemein; diese Winkel bilden eine drei- oder mehrseitige Ecke, welche eine **Ecke** (§. 5, 1) des Polyeders heißt. Dabei wird vorausgesetzt, daß je zwei Eckpuncte des Polyeders, die nicht eine Kante begrenzen, durch eine aus Kanten zusammengesetzte Linie verbunden werden können, und daß man aus einer Fläche, indem man durch Ueberschreitung einer Kante in eine angrenzende Fläche übergeht, nach und nach in jede Fläche zu gelangen vermag. Zur Bestimmung eines Polyeders gehört die Angabe der Zahl und Art sowohl seiner Flächen als seiner Ecken.

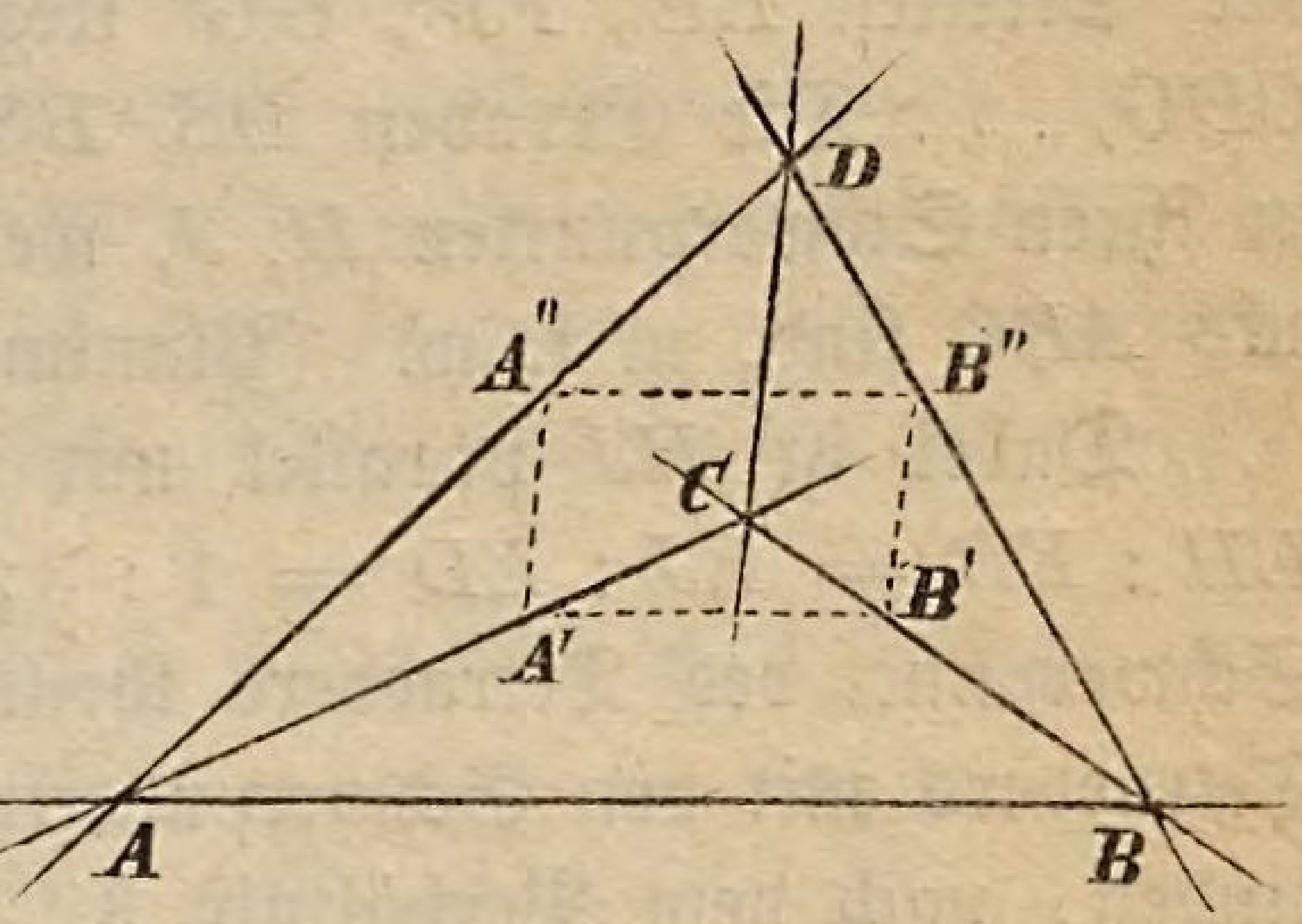
Die Ebenen, welche man durch das Centrum einer Kugel, deren Radius eine Längeneinheit ist, parallel mit den Flächen eines Polyeders legt, schneiden die Kugel in einem System von Hauptkreisen, welches die Winkel der Kanten durch die sphärischen Abstände der Durchschnittspuncte von Hauptkreisen, die Flächenwinkel des Polyeders durch die Winkel von Hauptkreisen, die Ecken durch ihre Kugelschnitte zur Anschauung bringt (§. 5, 2).

2. Ein Körper, der von einer Ecke durch eine Ebene abgeschnitten wird, heißt eine **Pyramide**, und zwar $n$**seitig**, wenn sie ein Theil einer $n$seitigen Ecke ist. Die Oberfläche dieser Pyramide besteht aus einem $n$Eck und $n$ Dreiecken; von ihren Ecken ist eine $n$seitig, die übrigen $n$ sind dreiseitig; die $n$seitige Pyramide hat $2n$ Kanten. Eine mehr-

seitige Pyramide kann sowie jedes Polyeder durch Diagonal-Dreiecke in dreiseitige Pyramiden zerlegt werden. Ein (durch eine Ebene begrenzter) Kegel kann als unendlichseitige Pyramide betrachtet werden.

Die zwischen parallelen Ebenen enthaltene Schicht eines Prisma (im weitern Sinne) heißt ein **Prisma** (im engern Sinne), und zwar $n$seitig, wenn es ein Theil eines $n$seitigen Prisma ist (§. 5, 4). Die Oberfläche desselben besteht aus 2 congruenten $n$Ecken und $n$ Parallelogrammen; seine $2n$ Ecken ergänzen sich paarweise zu einem Flächenwinkel; von seinen $3n$ Kanten sind $2n$ paarweise gleich und parallel, die übrigen $n$ sind sämmtlich gleich und parallel. Ein mehrseitiges Prisma kann durch Diagonal-Parallelogramme in dreiseitige Prismen zerlegt werden. Eine Schicht eines Cylinders kann als unendlichseitiges Prisma betrachtet werden. Prisma und Cylinder heißen **gerade**, wenn sie durch Normalschnitte begrenzt sind.

3. Vier Ebenen, welche nicht alle einen Punct gemein haben, theilen den Raum in 15 Räume; denn von den 8 Ecken, die durch 3 der gegebenen Ebenen gebildet werden, wird nur eine von der vierten Ebene nicht getheilt. Einer dieser 15 Räume $ABCD$ ist vollständig begrenzt und heißt ein **Tetraeder**; er kann auf 4 Arten als eine dreiseitige Pyramide betrachtet werden, von seinen Kanten liegen 3mal 2 nicht auf einer Ebene und heißen **gegenüberliegend***),




$AB$ und $CD$, $BC$ und $AD$, $CA$ und $BD$. Vier andere Räume ($A$), ($B$), ($C$), ($D$) sind 3seitige Ecken, und zwar die Gegenecken der Ecken des Tetraeders. Vier andere Räume ($ABC$), ($BCD$), ($CAD$), ($ABD$) liegen außen an den Flächen des Tetraeders und werden von dem Tetraeder zu den Ecken desselben ergänzt. Die 6 übrigen Räume ($AB$) und ($CD$), ($BC$) und ($AD$), ($CA$) und ($BD$) liegen außen an den Kanten des Tetraeders.

Eine Ebene, die mit zwei gegenüberliegenden Kanten $AB$, $CD$ des Tetraeders parallel ist, schneidet das Tetraeder in einem Parallelogramm $A'B'B''A''$. Denn $A'B'$ und $A''B''$ sind mit $AB$ parallel, $A'A''$ und $B'B''$ sind mit $CD$ parallel. Vergl. §. 5, 7. Anm.

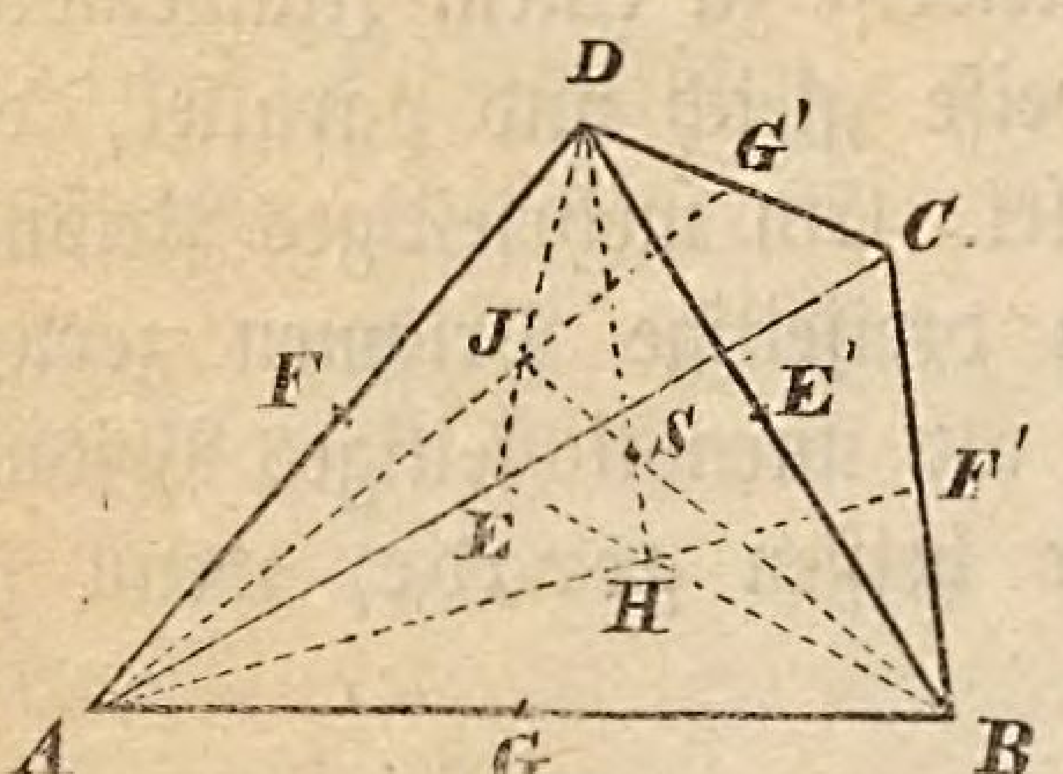
Die Winkel der Kanten eines Tetraeders, die Flächenwinkel und die Ecken stehn in demselben Zusammenhang unter einander, als die

---

*) Monge Corresp. sur l'éc. polyt. I p. 440.

Seiten, Winkel, Flächen einer von 4 Hauptkreisen gebildeten sphärischen Figur (1).

**4.** Die Ebenen, welche je eine Kante des Tetraeders und die Mitte der gegenüberliegenden Kante enthalten; die Geraden, welche die Mitten der gegenüberliegenden Kanten verbinden; die Geraden, welche die Spitzen des Tetraeders mit den Schwerpuncten der gegenüberliegenden Flächen verbinden, — gehn durch einem Punct, den Schwerpunct des Tetraeders.*) Sind $E$ und $E'$ die Mitten von $AC$ und $BD$, $F$ und $F'$ die Mitten von $BC$ und $AD$, $G$ und $G'$ die Mitten von $AB$ und $CD$, so sind $EFE'F'$, $FGF'G'$, $GEG'E'$ concentrische Parallelogramme, die Mittelschnitte des Tetraeders. Vergl. Planim. §. 8, 3. Die Ebenen $ACE'$ und $BDE$ schneiden sich in der Geraden $EE'$, u. s. w. Die gemeinschaftliche Mitte $S$ der Strecken $EE'$, $FF'$, $GG'$ liegt auf jeder von den Ebenen $ABG'$, $CDG$, . . . Die Geraden $DS$, $BS$ schneiden die Dreiecke $ABC$, $ACD$ in ihren Schwerpuncten $H$, $J$, weil $AF'$ und $BE$ Mittellinien des Dreiecks $ABC$ sind, u. s. w. (Planim. §. 8, 4).




Dabei ist $HJ$ parallel mit $BD$, und $HJ : BD = 1 : 3$, weil $EH : EB = EJ : ED = 1 : 3$; also $HS : SD = 1 : 3$, d. h. der Schwerpunct des Tetraeders theilt die Geraden, welche die Spitzen des Tetraeders mit den Schwerpuncten der gegenüberliegenden Flächen verbinden, nach dem Verhältniß 3. Die Schwerpuncte der Flächen eines Tetraeders sind die Ecken eines ähnlichen Tetraeders, welches mit dem erstern perspectivisch liegt. Vergl. unten (17) und Planim. §. 12, 8.

**5.** Wenn zwei Tetraeder eine Ecke und die anliegenden Kanten der Reihe nach gleich und ähnlich haben, so sind sie gleich und ähnlich, d. h. die Flächen, Kanten, Winkel, Ecken des einen sind den gleichliegenden Stücken des andern der Reihe nach gleich und ähnlich, und ihre Volume sind gleich. Die beiden Tetraeder sind aber nur dann congruent, wenn ein Paar gleiche und ähnliche Ecken congruent sind. In dem entgegengesetzten Falle wird die Gleichheit der Volume durch Zerlegung der incongruenten Tetraeder in congruente Tetraeder erkannt.**)

---

*) Commandinus de centro gravitatis 1565, prop. 17. 22. Aus Archimedes' Büchern über die schwimmenden Körper sieht man, wie Commandino selbst angiebt, daß Archimedes die Schwerpuncte auch von zusammengesetzteren Körpern bestimmt hat.

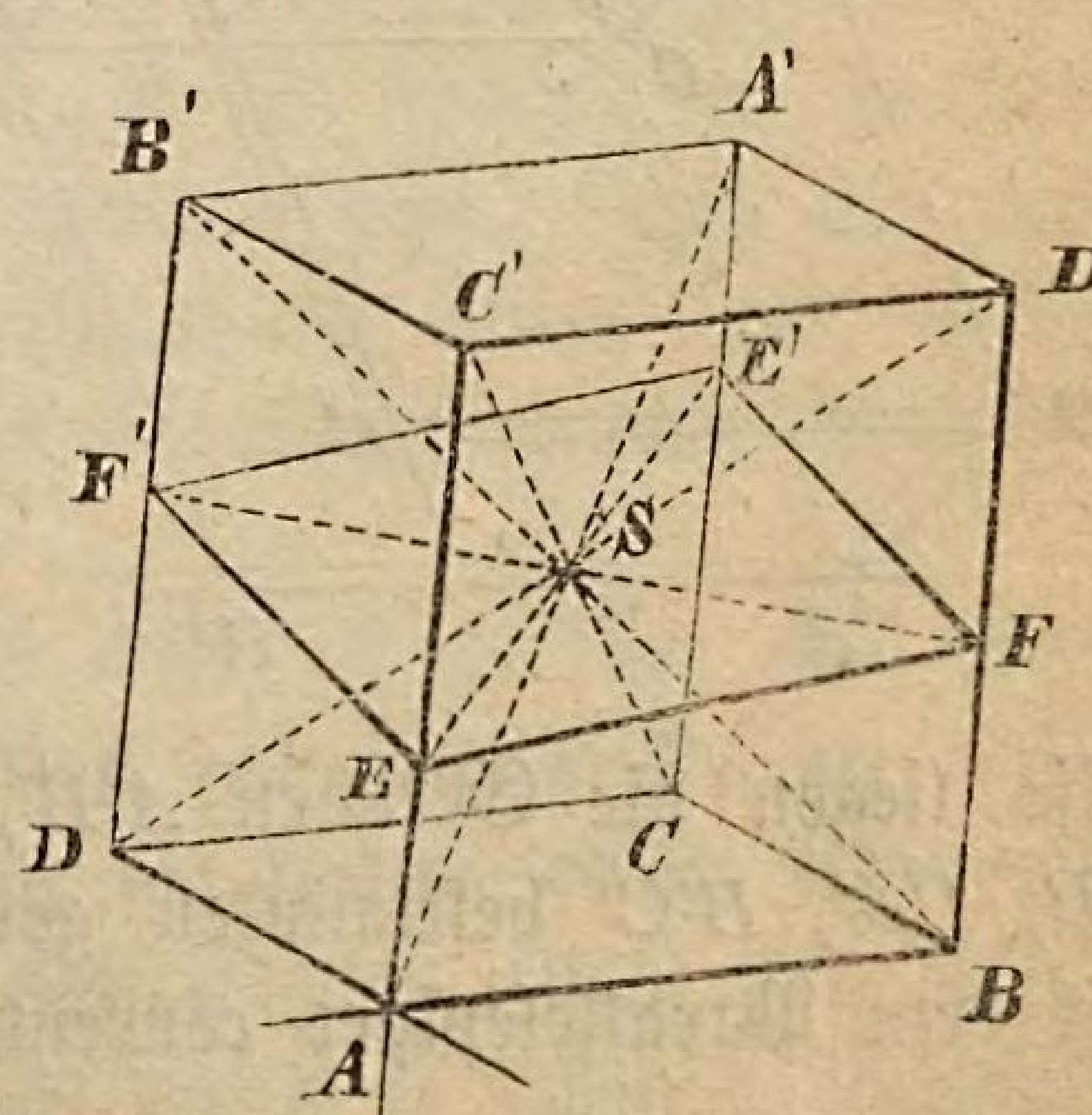
**) Diesen Beweis hat Legendre (Géom. Note 7, 2te Ausg.) aus derselben

Es seien $M$ und $M'$ die Centren der Kugeln $ABCD$ und $A'B'C'D'$ (§. 3, 9), $N$ und $N'$ die Centren der Kreise $ABC$ und $A'B'C'$, so können die gleichen und ähnlichen Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ in je 4mal 3 Tetraeder, $ABNM$, $BCNM$, $CANM$, . . und $A'B'N'M'$, . . zerlegt werden, die der Reihe nach congruent sind, weil die Ecken $N$ und $N'$, . . congruent sind.

**6.** Der Raum, welchen 3 zwischen parallelen Ebenen enthaltene Schichten gemein haben, heißt ein **Parallelepiped** (παραλληλ-επί-πεδον). Dieses Polyeder kann auf 3 Arten als ein vierseitiges Prisma betrachtet werden; es hat 6 Flächen, welche Parallelogramme sind, darunter 3mal 2 congruente und parallele; es hat 8 dreiseitige Ecken, welche in demselben Zusammenhang stehn, als die von 3 Ebenen um einen Punct gebildeten Ecken (§. 5, 3); es hat 12 Kanten, darunter 3mal 4 gleiche und parallele.

Wenn eine Ecke drei rechte Winkel hat, so sind alle Ecken congruent und das Parallelepiped ist **rectangulär**; wenn eine Ecke drei gleiche Kanten hat, so sind alle Kanten gleich, und das Parallelepiped ist **rhombisch** *); wenn beide Bedingungen zugleich erfüllt sind, so heißt das Parallelepiped ein **Würfel** (κύβος, cubus) und ist wegen der Congruenz seiner Ecken und Flächen (Quadrate) ein **reguläres Hexaeder**.

Es giebt im Parallelepiped 3mal 2 Diagonal-Parallelogramme, $ABA'B'$ und $CDC'D'$, . . und 4 Diagonalen, $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$, die im **Centrum des Parallelepipeds** sich schneiden. Denn $AA'$ wird von $BB'$ halbirt im Parallelogramm $ABA'B'$, desgleichen von $CC'$ und $DD'$. Jede Ebene $EFE'F'$, welche durch das Centrum $S$ des Parallelepipeds geht, theilt das Parallelepiped in zwei gleiche und ähnliche, aber incongruente Polyeder. Denn die Tetraeder $SEFA$ und $SE'F'A'$ sind gleich und ähnlich, aber incongruent wie die am Centrum liegenden Ecken (5), u. s. w.



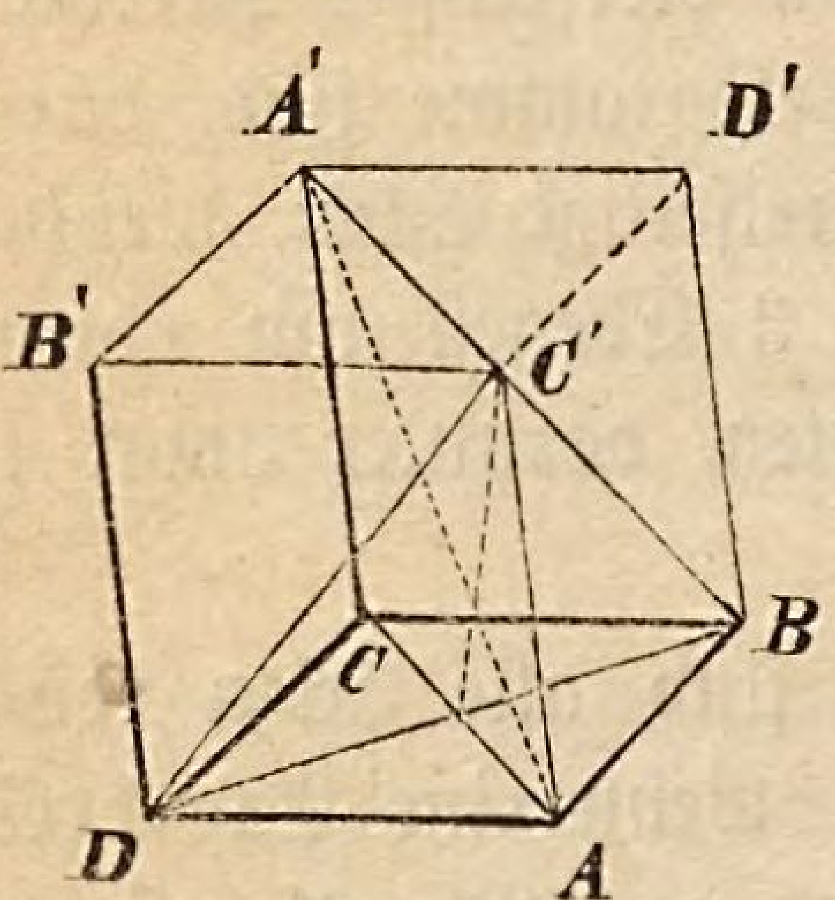

---

Quelle mitgetheilt, wie den Beweis der Gleichheit sphärischer Gegendreiecke. Vergl. §. 4, 4.

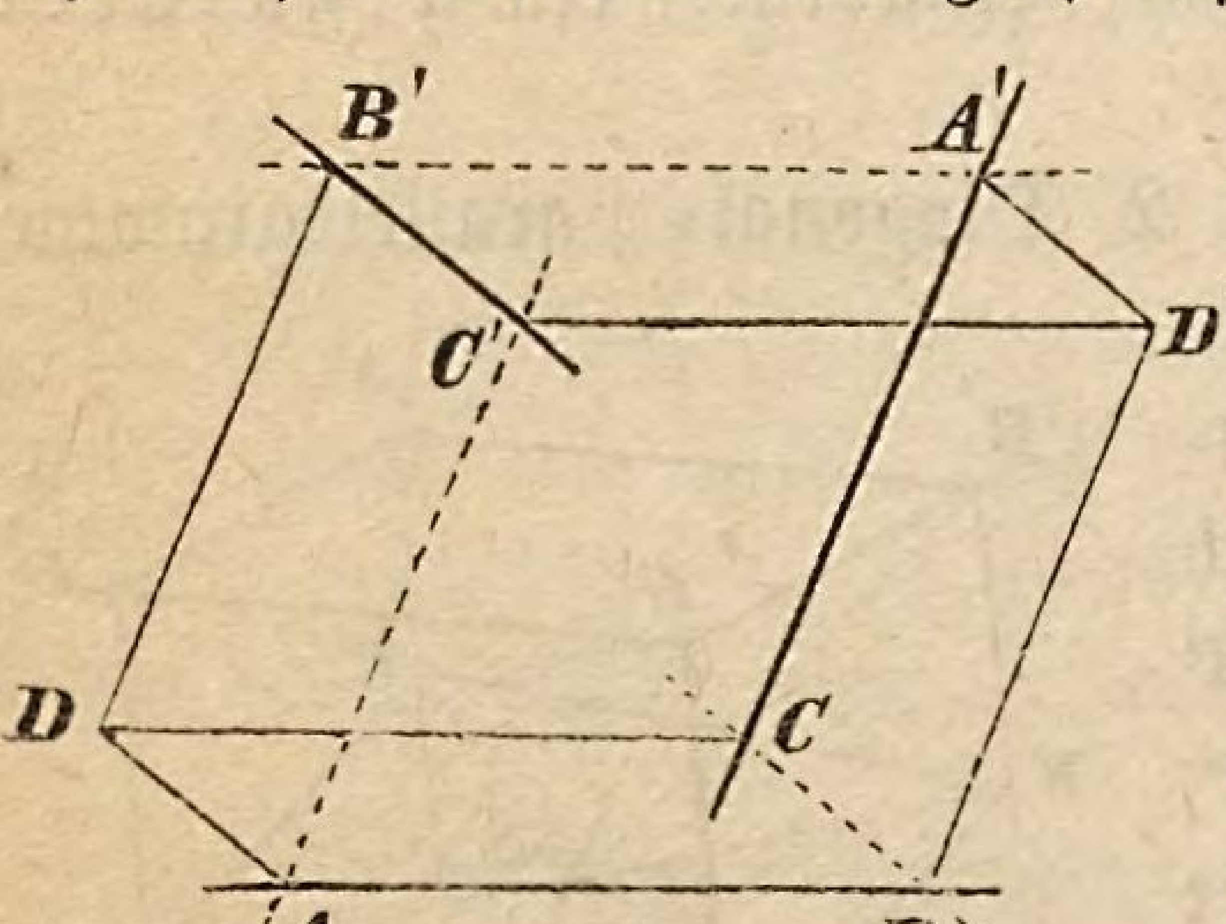
*) Wenn seine Flächen congruente Rhomben sind, so heißt das Parallelepiped ein Rhomboeder. Vergl. unten §. 7, 5.

7. Es giebt im Parallelepiped 4mal 2 parallele und congruente Diagonal-Dreiecke, welche von den gegenüberliegenden Ecken gleiche und ähnliche aber incongruente Tetraeder abschneiden. Zwei parallele und congruente Diagonal-Dreiecke werden von einer Diagonale in ihren Schwerpuncten geschnitten und theilen die Diagonale in 3 gleiche Theile, z. B. $AA'$ und eine Mittellinie des Dreiecks $BC'D$ theilen sich nach dem Verhältniß 1 : 2 (Planim. §. 8, 2).

Die nicht parallelen Diagonal-Dreiecke des Parallelepipeds begrenzen zwei Tetraeder, $BDA'C'$ und $B'D'AC$, die dem Parallelepiped so eingeschrieben sind, daß je zwei gegenüberliegende Kanten derselben auf parallelen Flächen des Parallelepipeds liegen.*) Diese Tetraeder sind perspectivisch, gleich und ähnlich (nicht congruent), weil die Strecken $BB'$, $DD'$, $A'A$, $C'C$ das Centrum des Parallelepipeds zur gemeinschaftlichen Mitte haben (5). Ihre Schwerpuncte sind im Centrum des Parallelepipeds vereint; denn die Diagonale $AA'$ geht durch den Schwerpunct der Fläche $BDC'$, u. s. w. (4).



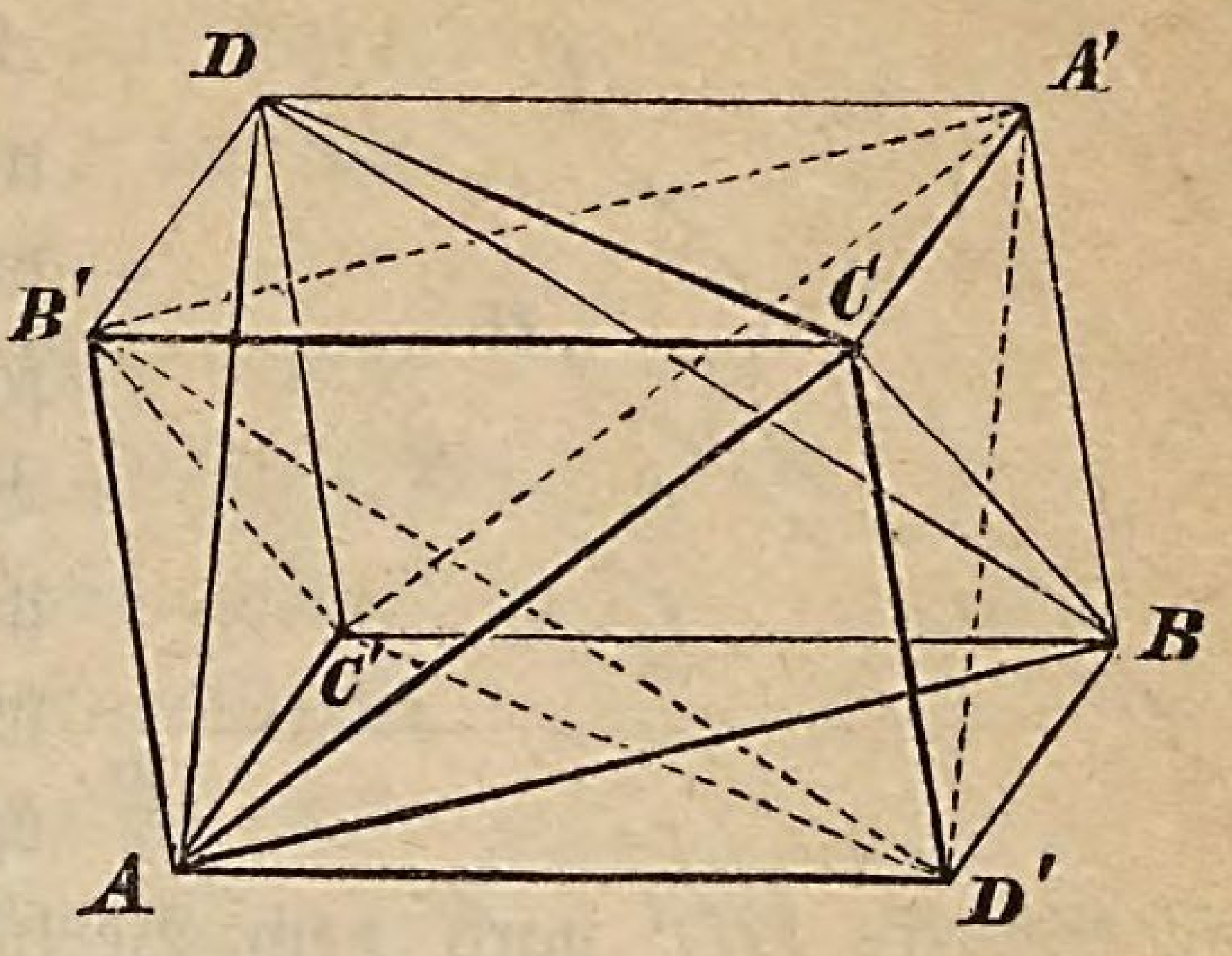

Anmerkung. Drei Gerade $AB$, $CA'$, $B'C'$, von denen je zwei nicht auf einer Ebene liegen, bestimmen 3 Schichten, mithin ein Parallelepiped, von welchem $AB$, $CA'$, $B'C'$ nicht folgende Kanten sind. Jede der Kanten $A'B'$, $C'A$, $BC$, welche mit jenen der Reihe nach parallel sind, hat mit den Geraden $AB$, $CA'$, $B'C'$ je einen Punct gemein, z. B. $A'B'$ hat mit $AB$ den unendlich fernen Punct derselben, mit $CA'$ den Punct $A'$, mit $B'C'$ den Punct $B'$ gemein, u. s. w. Also liegen die Geraden $A'B'$, $C'A$, $BC$ auf dem durch die Geraden $AB$, $CA'$, $B'C'$ bestimmten geradlinigen Hyperboloid (§. 1, 8), welches mit dem Parallelepiped concentrisch ist.**)




8. Die Ebenen, welche durch die Mitten der Kanten eines Tetraeders normal zu den jedesmal gegenüberliegenden Kanten gestellt werden, haben einen Punct gemein. Die Strecke zwischen diesem Punct und dem Centrum der dem Tetraeder umgeschriebenen Kugel wird durch den Schwerpunct des Tetraeders halbirt.***)

*) Monge Corresp. sur l'Ec. polyt. II p. 266.
**) Hachette Crelle J. 1 p. 345.
***) Monge Corresp. sur l'Éc. polyt. II p. 266.

Beweis. Die gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders $ABCD$ bestimmen 3 Schichten, mithin ein Parallelepiped, welches nicht nur dem Tetraeder $ABCD$, sondern auch dem gleichen und ähnlichen Tetraeder $A'B'C'D'$ umgeschrieben ist (7). Diese Tetraeder liegen perspectivisch, so daß die Geraden $AA'$, $BB'$, .. den Schwerpunct des Tetraeders $ABCD$ zur gemeinschaftlichen Mitte haben; daher liegen insbesondere die Centren der Kreise $ABC$ und $A'B'C'$, die Centren der Kugeln $ABCD$ und $A'B'C'D'$ so, daß die zwischen ihnen enthaltenen Strecken von dem Schwerpunct des Tetraeders halbirt werden. Die Ebene, welche $AB$ halbirt und $CD$ normal schneidet, halbirt die Kante $C'D'$ normal, u. s. w. Die Ebenen, welche die Kanten des Tetraeders $A'B'C'D'$ normal halbiren, gehn durch das Centrum der Kugel $A'B'C'D'$ (§. 3, 9). Also geht jede Ebene, welche eine Kante des Tetraeders $ABCD$ z. B. $AB$ halbirt und die gegenüberliegende Kante $CD$ normal schneidet, durch das Centrum der Kugel $A'B'C'D'$.



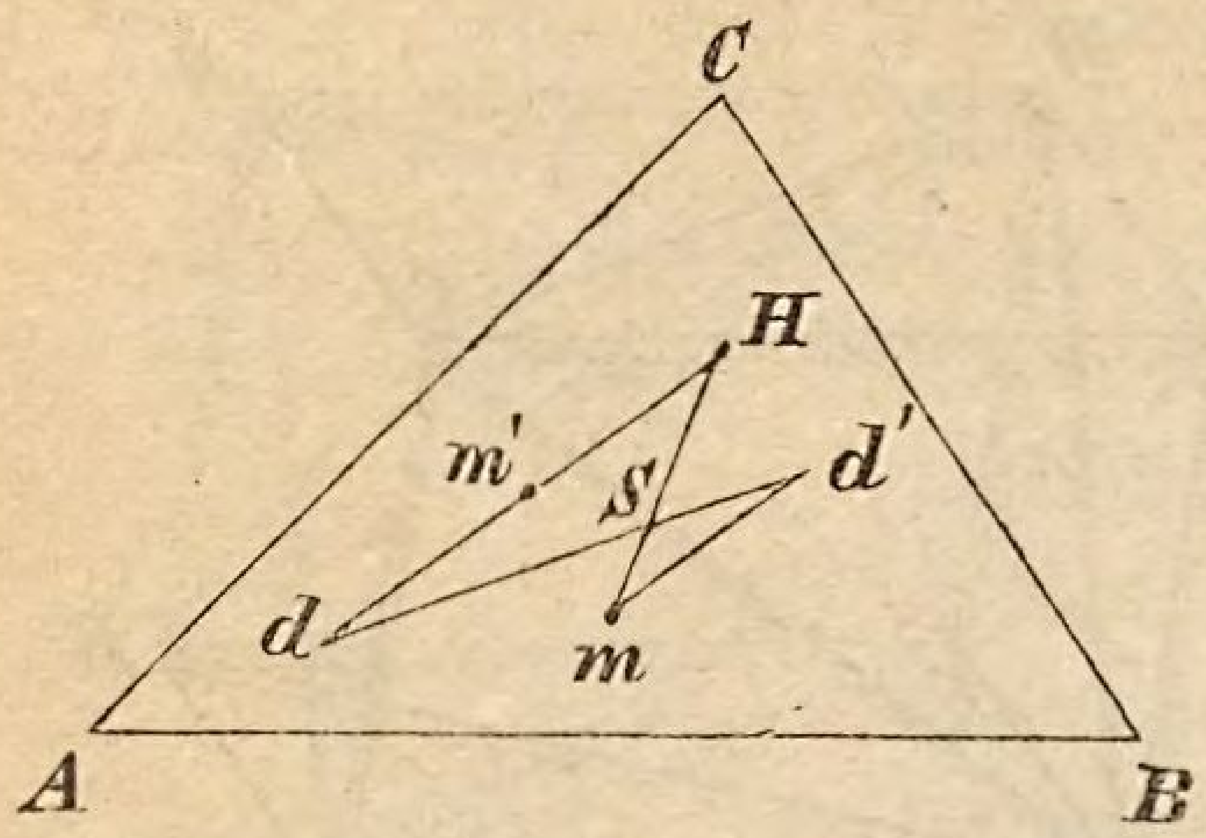

9. Die Höhen eines Tetraeders $ABCD$ — d. h. die Normalen aus den Eckpuncten $A$, $B$, .. zu den gegenüberliegenden Flächen $CBD$, $ACD$, .. — gehn im Allgemeinen nicht durch einen Punct, sondern liegen auf einem durch 3 derselben bestimmten geradlinigen Hyperboloid (§. 1, 8). Auf demselben Hyperboloid liegen die Normalen der Flächen des Tetraeders, die durch deren Höhenpuncte gehn. Das Centrum des Hyperboloids ist der gemeinschaftliche Punct der Ebenen (8), welche durch die Mitten der Kanten des Tetraeders normal zu den jedesmal gegenüberliegenden Kanten gestellt sind.*)

Wenn $H$ der Höhenpunct des Dreiecks $ABC$ ist, so sind $AH$, $BH$, $CH$ von den durch $A$, $B$, $C$ gehenden Höhen des Tetraeders die Normalprojectionen auf die Ebene $ABC$. Denn die Ebene, welche die durch $A$ gehende Höhe projicirt, ist normal zu den Ebenen $BCD$ und $ABC$, folglich zu der Geraden $BC$, u. s. w. Die durch $H$ gehende Normale der Ebene $ABC$ schneidet also die durch $A$, $B$, $C$ gehenden Höhen des Tetraeders und hat mit der durch $D$ gehenden Höhe den unendlich fernen Punct gemein. U. s. w.

---

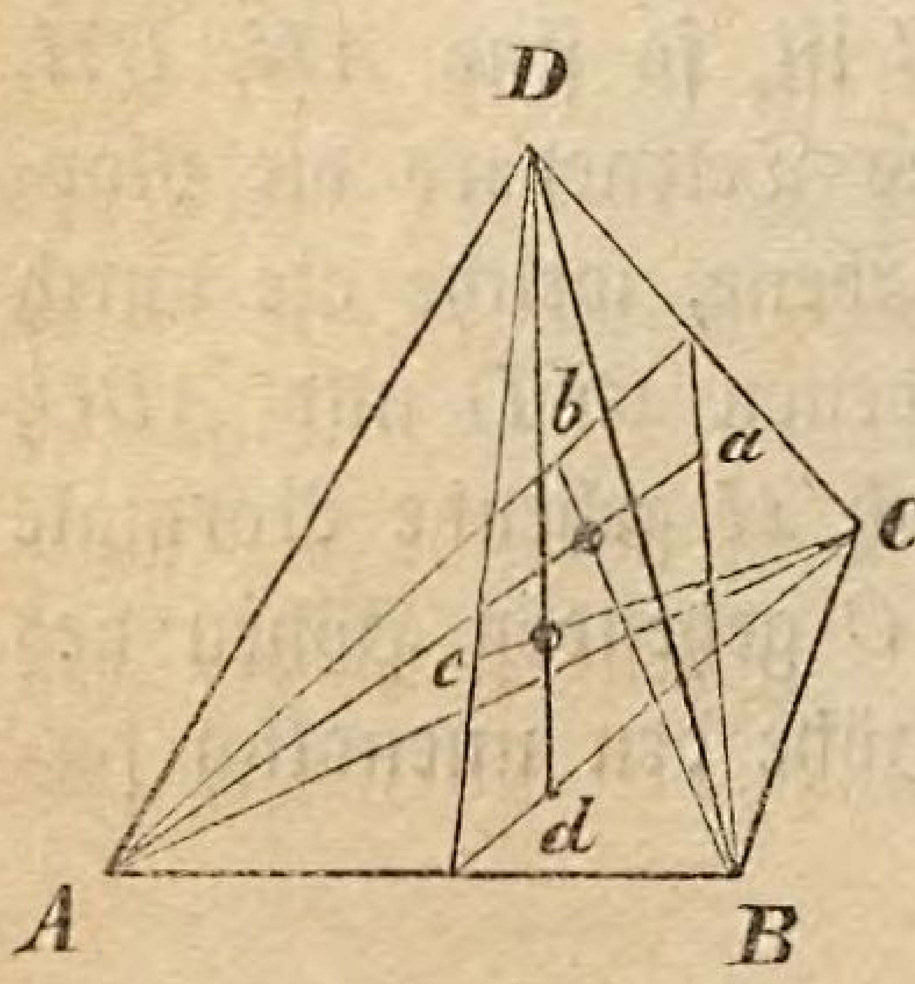
*) Steiner Crelle J. 2 p. 97 und syst. Entw. p. 316. Vergl. Hermes Crelle J. 56 p. 241. Die Eigenschaft der Normalen zu den Flächen durch deren Höhenpuncte und die Lage des Centrum des Hyperboloid ist von Joachimsthal bemerkt worden. Grunert Archiv 32 p. 109.

Das Centrum des Hyperboloids liegt auf der Halbirenden des Streifens, dessen Schenkel zu den Geraden des Hyperboloids gehören (7, Anm.). Ist nun $d$ die Normalprojection von $D$ auf die Ebene $ABC$, $m'$ die Mitte von $dH$, so ist $m'$ die Normalprojection des Centrum des Hyperboloids. Ist ferner $S$ der Schwerpunct des Dreiecks $ABC$, $m$ das Centrum des Kreises $ABC$ und die Normalprojection des Centrum der Kugel $ABCD$ auf die Ebene $ABC$, so theilt $S$ die Strecke $Hm$ nach dem Verhältniß 2 (Planim. §. 12, 8). Nimmt man das Tetraeder $A'B'C'D'$ hinzu, welches mit $ABCD$ demselben Parallelepiped eingeschrieben ist (7), so theilt $S$ die Strecke $DD'$ nach dem Verhältniß 2, und wenn man durch $d'$ die Normalprojection von $D'$ auf die Ebene $ABC$ bezeichnet, so hat man auch $dS : Sd' = 2$. Daher sind $md'$ und $dm'$ parallel und gleich, $mm'$ wird von $dd'$ halbirt, also ist $m'$ die Normalprojection des Centrum der Kugel $A'B'C'D'$ (8). Dieselben Bemerkungen gelten für jede Fläche des Tetraeders $ABCD$, also ist das Hyperboloid mit der Kugel $A'B'C'D'$ concentrisch.




**10.** Wenn in einem Tetraeder eine Kante mit der gegenüberliegenden einen rechten Winkel bildet, so liegen die durch ihre Endpuncte gehenden Höhen des Tetraeders auf einer Ebene, und umgekehrt. Wenn in einem Tetraeder zwei folgende Kanten mit den ihnen gegenüberliegenden rechte Winkel bilden, so haben die Höhen des Tetraeders einen Punct gemein, und umgekehrt.*)

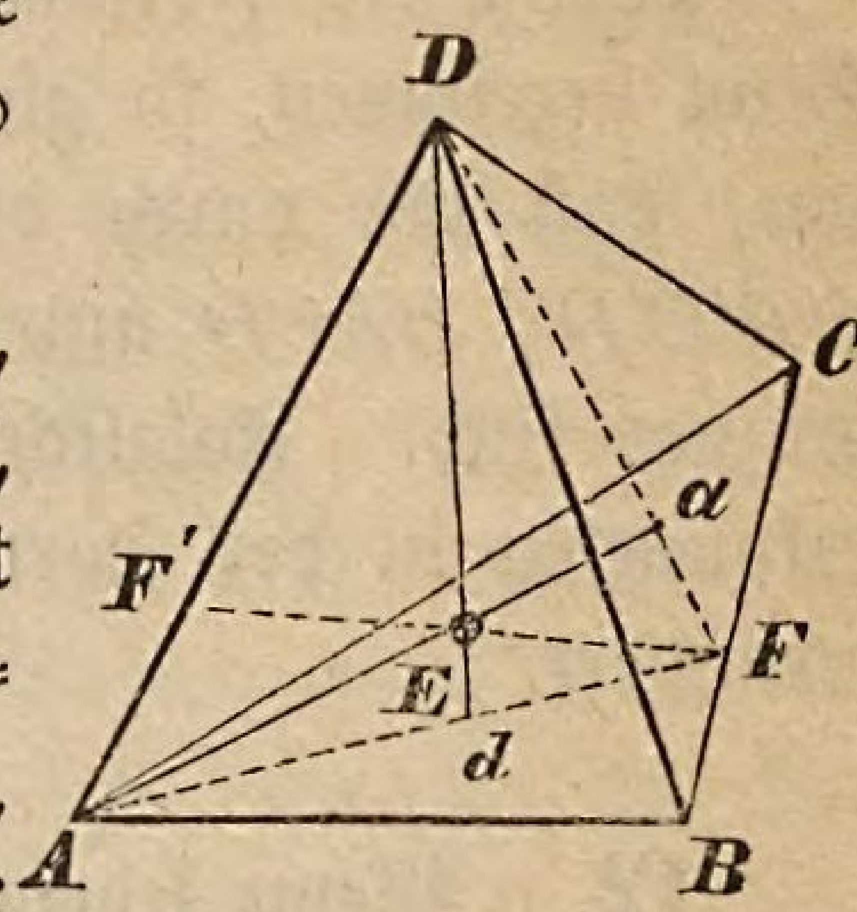
Beweis. Sind $Aa$, $Bb$, $Cc$, $Dd$ die Höhen des Tetraeders $ABCD$, und ist $CD$ normal zu $AB$, so steht die Ebene $CDd$ normal zu $AB$, mithin normal zur Ebene $ABD$, und enthält die Höhe $Cc$. Eben so erkennt man, daß die Ebene $ABb$ die Höhe $Aa$ enthält. Die Ebene der Höhen $Aa$, $Bb$ ist normal zu $CD$, die Ebene der Höhen $Cc$, $Dd$ ist normal zu $AB$, also sind diese Ebenen normal zu einander.




*) Dieses Tetraeder kommt bei L'Huilier vor de relatione mutua p. 151. Vergl. Ferriot in Gerg. Ann. 2 p. 133. Feuerbach die dreieckige Pyramide §. 40 ff. C. F. A. Jacobi zu van Swinden p. 453 ff.

Wenn die Höhen $Cc$, $Dd$ auf einer Ebene liegen, so ist diese Ebene normal zu den Ebenen $ABD$, $ABC$, mithin zu der Geraden $AB$, also ist auch $CD$ normal zu $AB$.

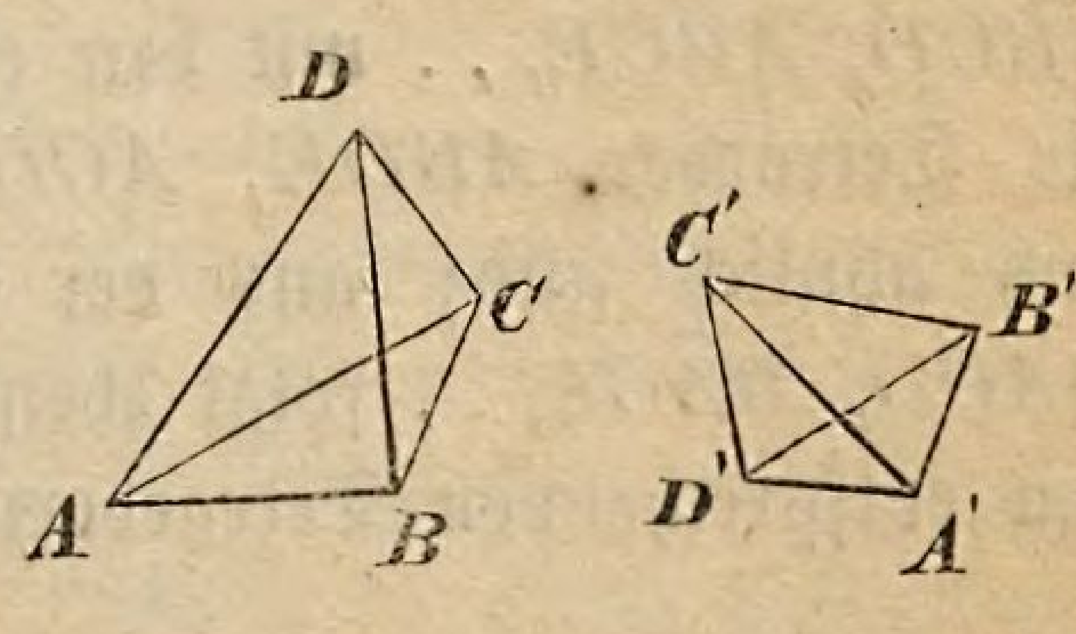
Wenn $AB$ normal zu $CD$, und $BC$ normal zu $AD$ ist, so liegen je zwei Höhen auf einer Ebene, und alle haben einen Punct $E$ gemein (§. 1, 3). Hieraus folgt, daß auch die Kante $CA$ normal zu $BD$ ist. Vergl. §. 4, 15 und §. 5, 3.




Anmerkung. Die Ebenen $ADE$, $BDE$, $CDE$ schneiden die Geraden $BC$, $CA$, $AB$ in $F$, $G$, $H$, so daß $E$ der gemeinschaftliche Höhenpunct der Dreiecke $ADF$, $BDG$, $CDH$ ist. Die Geraden $FE$, $GE$, $HE$ schneiden die Geraden $AD$, $BD$, $CD$ rechtwinkelig in $F'$, $G'$, $H'$. Daher gehn durch den gemeinschaftlichen Punct der Höhen des Tetraeders, wenn ein solcher vorhanden ist, auch die gemeinschaftlichen Normalen $FF'$, $GG'$, $HH'$ der gegenüberliegenden Kanten.

Zugleich sind die Producte $AE \,.\, Ea$, $BE \,.\, Eb$, $CE \,.\, Ec$, $DE \,.\, Ed$, $FE \,.\, EF'$, $GE \,.\, EG'$, $HE \,.\, EH'$ einander gleich (Planim. §. 14, 7). Daher liegt $G'$ auf dem Kreis $FF'G$, $H'$ auf dem Kreis $FF'H$, mithin liegen $G'$ und $H'$ auf der Kugel $FF'GH$. Ebenso liegen $b$ und $c$ auf der Kugel $ABCa$, u. s. w. Der Punct $E$ hat gleiche Potenzen in Bezug auf die 5 Kugeln $ABCa$, $BCDb$, $CADc$, $ABDa$, $FGHF'$.

11. Um zwei Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$, die durch ihre der Reihe nach gegebenen Eckpuncte bestimmt sind, hinsichtlich ihres Sinnes zu vergleichen, hat man sich zuerst in die Kante $AB$ von $A$ nach $B$ aufwärts zu versetzen und zu beachten, ob die Bewegung von $C$ nach $D$ linksum oder rechtsum gehend erscheint; dann versetze man sich in die Kante $A'B'$ von $A'$ nach $B'$ aufwärts und beachte, ob die Bewegung von $C'$ nach $D'$ linksum oder rechtsum gehend erscheint. Je nachdem beide Bewegungen auf den angegebenen Standpuncten dem Sinne nach übereinstimmen oder nicht, sind die Tetraeder einerlei Sinnes oder entgegengesetzten Sinnes. In dem ersten Falle erscheint von $A$ aus die Bewegung von $B$ über $C$ nach $D$ auf dem Perimeter $BCD$ in demselben Sinne gehend, als von $A'$ aus die Bewegung von $B'$ über $C'$ nach $D'$ auf dem Perimeter $B'C'D'$; in dem zweiten Falle erscheinen die Sinne dieser Bewegungen von den angegebenen Gesichtspuncten aus einander entgegengesetzt.



Hiernach sind die Tetraeder *ABCD* und *ABCE* einerlei oder entgegengesetzten Sinnes, je nachdem die Spitzen *D* und *E* auf derselben Seite in Bezug auf die Ebene *ABC* liegen oder nicht. In dem ersten Falle wird die Strecke *DE* von der Ebene *ABC* außen getheilt, in dem zweiten Falle innen.

Wenn die Formeln *ABCD* und *A'B'C'D'* Tetraeder von einerlei Sinn bezeichnen, so giebt die angezeigte Art der Vergleichung zu erkennen, daß die durch die Formeln *ABDC* und *A'B'C'D'*, *ACBD* und *A'B'C'D'*, *BACD* und *A'B'C'D'* bezeichneten Tetraeder entgegengesetzten Sinnes sind. Folglich wird durch gegenseitige Vertauschung von zwei Eckpuncten in der Formel des Tetraeders jedesmal der Sinn desselben verändert.*)

12. Wenn jedem Punct einer Raumfigur ein Punct einer andern Raumfigur so entspricht, daß die Tetraeder *ABCD*, *ABCE*, . ., welche von drei Puncten der einen Figur mit den übrigen Puncten derselben Figur gebildet werden, den entsprechenden Tetraedern der andern Figur *A'B'C'D'*, *A'B'C'E'*, . . der Reihe nach gleich und ähnlich sind, und wenn die folgenden Tetraeder *ABCE*, . . mit dem ersten *ABCD* einerlei oder entgegengesetzten Sinn haben, je nachdem *A'B'C'E'*, . . mit *A'B'C'D'* von einerlei oder entgegengesetztem Sinne sind: so sind die Raumfiguren *ABCDE* . . und *A'B'C'D'E'* gleich und ähnlich, d. h. alle andern Tetraeder der einen Figur sind den entsprechenden Tetraedern der andern Figur gleich und ähnlich. Die Raumfiguren sind von einerlei oder entgegengesetztem Sinne, je nachdem ein Paar entsprechende Tetraeder derselben von einerlei oder entgegengesetztem Sinne sind.**)

Beweis. Aus der Gleichheit und Aehnlichkeit der Tetraeder *ABCD*, *ABCE*, . . mit den entsprechenden Tetraedern schließt man, daß die Tetraeder *ABDE*, *ACDE*, . . den entsprechenden Tetraedern gleich und ähnlich sind; aus der Gleichheit und Aehnlichkeit der Tetraeder *BACD*, *BACE*, . . folgt ebenso, daß die Tetraeder *BADE*, *BCDE*, . . den entsprechenden Tetraedern gleich und ähnlich sind, u. s. f.

13. Zu zwei gleichen und ähnlichen Dreiecken von verschiedener Stellung *ABC* und *A'B'C'* giebt es eine Axe *s* von der Art, daß sowohl die Flächenwinkel *AsA'*, *BsB'*, *CsC'*, als auch die Normalprojectionen der Strecken *AA'*, *BB'*, *CC'* auf *s* einander gleich sind.***)

---

*) Möbius baryc. Calc. 19. Statik 63.
**) Vergl. Planim. §. 7, 1 und die daselbst citirte Abhandlung (34).
***) Vergl. §. 35 der citirten Abhandlung.

Beweis. Aus dem Centrum $O$ einer beliebig gewählten Kugel ziehe man die Radien $O\beta$, $O\gamma$, $O\beta'$, $O\gamma'$ in den Richtungen $AB$, $AC$, $A'B'$, $A'C'$ und construire den Punct $\sigma$ der Kugel, welcher so liegt, daß die sphärischen Dreiecke $\sigma\beta\gamma$ und $\sigma\beta'\gamma'$ congruent sind (§. 4, 18). Zieht man nun $AD$ und $A'D'$ in der Richtung des Radius $O\sigma$, so sind die an den Scheiteln $A$ und $A'$ gebildeten Ecken $\overline{A}BCD$ und $\overline{A'}B'C'D'$ congruent.

Ferner lege man durch $A$ und $A'$ die zu $AD$, $A'D'$ normalen Ebenen, bilde auf denselben die Normalprojectionen $EF$ und $E'F'$ von $BC$ und $B'C'$, und auf der Ebene $AEF$ die Normalprojection $A''E''F''$ von $A'E'F'$. Dann sind die Dreiecke $AEF$, $A'E'F'$, $A''E''F''$ gleich und ähnlich und einerlei Sinnes, weil die Dreiecke $AEB$ und $A'E'B'$, $AFC$ und $A'F'C'$, $A'E'F'$ und $A''E''F''$ gleich und ähnlich, und die Winkel $EAF$ und $E'A'F'$ Normalschnitte der gleichen Flächenwinkel $B\overline{AD}C$ und $B'\overline{A'D'}C'$ sind.

Construirt man endlich den Punct $S$ der Ebene $AEF$, welcher so liegt, daß die Figuren $SAEF$ und $SA''E''F''$ congruent sind (Planim. §. 7, 2), und bildet man auf der Ebene $A'E'F'$ die Normalprojection $S'$ des Punctes $S$, so ist $SS'$ die gesuchte Axe $s$. Denn die entsprechenden Ecken an den Scheiteln $A$ und $A'$ sind congruent, die entsprechenden Kanten derselben sind gleich, also sind die Raumfiguren $AEFBC$ und $A'E'F'B'C'$ congruent. Zugleich sind die Figuren $AEFS$ und $A'E'F'S'$ congruent, also sind die Raumfiguren $AEFBCS$ und $A'E'F'B'C'S'$ congruent (12), d. h. die Winkel $ASE$ und $A'S'E'$, $ASF$ und $A'S'F'$, $ESF$ und $E'S'F'$ sind gleich. Hieraus erkennt man die Gleichheit der Flächenwinkel $A\overline{SS'}A'$, $B\overline{SS'}B'$, $C\overline{SS'}C'$. Wird die Gerade $SS'$ von den Normalen aus $B$ und $B'$ in $T$ und $T'$ geschnitten, so ist $ST = S'T'$, folglich $TT' = SS'$, u. s. w.

**14.** Zu zwei gleichen und ähnlichen Raumfiguren von einerlei Sinn $ABCD$ . . und $A'B'C'D'$ . . giebt es eine Axe $s$ von der Art*), daß sowohl die Flächenwinkel $AsA'$, $BsB'$, . ., als auch die Normalprojectionen der Strecken $AA'$, $BB'$, . . auf $s$ einander gleich sind (13).

Wenn die erste Figur um die Axe $s$ rotirend den Winkel $AsA'$ zurücklegt, so wird sie mit der andern Figur perspectivisch, die Geraden $AA'$, $BB'$, . . werden nach Richtung und Länge übereinstimmend, denn

*) Die Axe $s$ ist von Euler bei der Untersuchung der Bewegung eines starren Körpers entdeckt worden. Nov. Comm. Petrop. 20 p. 199. Theoria motus corp. solid. 978. Die augenblickliche Drehungsaxe (axe instantané) eines bewegten Körpers war von D'Alembert (Précession des équinoxes 1749 p. 83) bemerkt worden. Vergl. Euler Mém. de Berlin 1750 p. 185.

die Normalprojectionen beider Raumfiguren auf eine zur Axe $s$ normale Ebene fallen zusammen. Wenn die erste Figur nun in der Richtung der Axe $s$ fortschreitend die Strecke $AA'$ zurücklegt, so fällt sie mit der andern Figur zusammen.

Wenn die erste Figur in der Richtung der Axe $s$ fortschreitet, bis die Normalprojectionen von $AA'$, $BB'$, .. auf $s$ verschwinden, wenn dann die erste Figur um die Axe $s$ rotirend den Winkel $AsA' + 180^0$ zurücklegt, so kommt sie in solche Lage gegen die zweite Figur, daß in jeder durch die Axe $s$ gehenden Ebene gleiche und ähnliche Planfiguren zu den beiden Raumfiguren gehören, welche gegen die Axe $s$ symmetrisch liegen.

**15.** Zu zwei gleichen und ähnlichen Dreiecken von verschiedener Stellung $ABC$ und $A'B'C'$ giebt es einen Diameter $n$ von der Art, daß die Flächenwinkel $AnA'$, $BnB'$, $CnC'$ einander gleich sind und daß die Normalprojectionen der Strecken $AA'$, $BB'$, $CC'$ auf $n$ eine gemeinschaftliche Mitte $S$ haben.*)

Beweis. Aus dem Centrum $O$ einer beliebig gewählten Kugel ziehe man die Radien $O\beta$, $O\gamma$, $O\beta'$, $O\gamma'$ in den Richtungen $AB$, $AC$, $A'B'$, $A'C'$ und construire den Punct $\nu$ der Kugel und seinen Gegenpunct $\nu'$, welche so liegen, daß die sphärischen Dreiecke $\nu\beta\gamma$ und $\nu'\beta'\gamma'$ entgegengesetzt gleich und ähnlich sind (§. 4, 19). Zieht man nun die Geraden $AH$ und $A'H'$ in den Richtungen der Radien $O\nu$ und $O\nu'$, so sind die an den Scheiteln $A$ und $A'$ gebildeten Ecken $\overline{ABCH}$ und $\overline{A'B'C'H'}$ entgegengesetzt gleich und ähnlich. Hat $A'H''$ die Richtung $O\nu$, so sind die Flächenwinkel $B\overline{AH}C$ und $B'\overline{A'H''}C'$ einander gleich.

Ferner lege man durch die Mitte von $AA'$ die zu der Geraden $AH$ normale Ebene, und bilde auf derselben die Normolprojectionen $JKL$ und $J'K'L'$ der Dreiecke $ABC$ und $A'B'C'$. Die in den gleichen Flächenwinkeln $B\overline{AH}C$ und $B'\overline{A'H''}C'$ liegenden Dreiecke $JKL$ und $J'K'L'$ sind gleich und ähnlich und einerlei Sinnes. Construirt man endlich den Punct $S$ der Ebene $JKL$, welcher so liegt, daß die Figuren $SJKL$ und $S'J'K'L'$ congruent sind (Planim. §. 7, 3), so ist die in der Richtung $AH$ durch $S$ gezogene Gerade der gesuchte Diameter $n$. Denn die Raumfiguren $SJKLABC$ und $S'J'K'L'A'B'C'$ sind gleich und ähnlich und entgegengesetzten Sinnes, u. s. w.

**16.** Zu zwei gleichen und ähnlichen Raumfiguren von entgegengesetztem Sinn, $ABCD$ .. und $A'B'C'D'$ .., giebt es einen Diameter $n$

*) Vergl. §. 37 der citirten Abhandlung.

von der Art, daß die Flächenwinkel $AnA'$, $BnB'$, .. einander gleich sind, und ein sich selbst entsprechendes Centrum $S$*), die gemeinschaftliche Mitte von den Normalprojectionen der Strecken $AA'$, $BB'$, .. auf $n$ (15).

Wenn die erste Figur um den Diameter $n$ rotirend den Winkel $AnA'$ zurücklegt, so kommt sie mit der andern Figur in symmetrische Lage zu der Centralebene, deren Normale der Diameter $n$ ist.

Wenn die erste Figur um den Diameter $n$ rotirend den Winkel $AnA' + 180^0$ zurücklegt, so kommt sie mit der andern Figur in perspectivische Lage und die Mitten der Strecken $AA'$, $BB'$ vereinigen sich in dem Centrum $S$.

**17.** Wenn von zwei Tetraedern $ABCD$ und $A'B'C'D'$ die Ecken $A$ und $A'$ gleich und ähnlich, und die Verhältnisse der entsprechenden Kanten an diesen Ecken $AB : AC : AD$ und $A'B' : A'C' : A'D'$ der Reihe nach gleich sind, so sind die Tetraeder ähnlich, d. h. die Flächen des einen Tetraeders sind den entsprechenden Flächen des andern ähnlich, die übrigen Ecken des einen Tetraeders sind den entsprechenden Ecken des andern gleich und ähnlich. Denn zufolge der Voraussetzung sind die Dreiecke $BAC$ und $B'A'C'$, $CAD$ und $C'A'D'$, $DAB$ und $D'A'B'$, $DCB$ und $D'C'B'$ ähnlich; die Gleichheit und Aehnlichkeit der übrigen Ecken wird hiernach aus der Gleichheit ihrer Seiten erkannt.

Die Aehnlichkeit von zwei Raumfiguren $ABCDE$ .. und $A'B'C'D'E'$ .. ist analog wie die Gleichheit und Aehnlichkeit derselben (12) durch die Aehnlichkeit der entsprechenden Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$, $ABCE$ und $A'B'C'E'$, .. bestimmt.

Zu zwei ähnlichen Raumfiguren von einerlei Sinn $ABCD$ .. und $A'B'C'D'$ .. giebt es eine Axe $s$ und einen sich selbst entsprechenden Punct derselben $S$ von der Art, daß die Flächenwinkel $AsA'$, $BsB'$, .. gleich und die Raumfiguren $SABCD$ .. und $SA'B'C'D'$ .. ähnlich und einerlei Sinnes sind. Wenn die erste Figur um die Axe $s$ rotirend den Winkel $AsA'$ zurücklegt, so wird sie mit der andern Figur perspectivisch und der Punct $S$ wird der äußere Aehnlichkeitspunct von beiden Figuren.

Zu zwei ähnlichen Raumfiguren von entgegengesetztem Sinn $ABCD$ .. und $A'B'C'D'$ .. giebt es einen Diameter $n$ und einen sich selbst entsprechenden Punct desselben $S$ von der Art, daß die Flächenwinkel $AnA'$, $BnB'$, .. gleich und die Raumfiguren $SABCD$ .. und $SA'B'C'D'$ .. entgegengesetzt ähnlich sind. Wenn die erste Figur um den Diameter $n$

*) Magnus analyt.-geometr. Aufg. II p. 109. Vergl. die citirte Abhandlung.

rotirend den Winkel $AnA' + 180^0$ zurücklegt, so wird sie mit der andern Figur perspectivisch und der Punct $S$ der innere Aehnlichkeitspunct der beiden Figuren.*)

## §. 7. Die Polyeder.

**1.** Eine endliche ein einziges Stück bildende Fläche (plan, polyedrisch, krumm) ist mit einem oder mehrern Rändern (Perimetern) versehen; eine geschlossene überall in sich zurückkehrende Fläche kann als eine mit einem unendlich kleinen Rand irgendwo versehene betrachtet werden. Auf jeder Fläche können in sich zurückkehrende Schnitte gemacht werden, welche die Fläche in getrennte Stücke theilen, von denen eines ganz durch den Schnitt begrenzt ist.

Wenn die Fläche so beschaffen ist, daß jeder geschlossene Schnitt ein Stück Fläche abtrennt, welches durch den Schnitt allein vollständig begrenzt wird, so ist sie eine Fläche von einfachem Zusammenhang (connexio) und heißt einfach zusammenhangend**), z. B. eine plane Polygonfläche, deren Perimeter sich selbst nicht schneidet, eine Kreisfläche, ein Tetraeder, eine Kugelfläche, eine Kugelzone mit einem Rand. Wenn es dagegen geschlossene Schnitte von der Art giebt, daß durch einen allein ein Stück Fläche nicht vollständig begrenzt wird, so hat die Fläche mehrfachen Zusammenhang und heißt mehrfach zusammenhangend, z. B. ein planer Streifen zwischen zwei geschlossenen Linien, eine Zone mit zwei Rändern, eine Ringfläche. Eine Zone mit zwei Rändern wird durch einen zwischen den Rändern sich erstreckenden geschlossenen Schnitt zwar zerstückt, aber es wird nicht jedes von beiden Stücken allein durch den Schnitt vollständig begrenzt; hingegen wird die Zone durch einen von dem einem Rand zu dem andern Rand geführten Querschnitt in eine einfach zusammenhangende Fläche aufgelöst, und ist deshalb zweifach zusammenhangend. Eine runde Ringfläche kann durch einen in sich zurückkehrenden Schnitt in eine zweifach zusammenhangende Fläche aufgelöst werden, und ist deshalb dreifach zusammenhangend. Eine Fläche ist $n$fach zusammenhangend, wenn sie nach $n - 1$ successiven Zerschneidungen

---

*) Euler de centro similitudinis 1777 (Nov. Act. Petrop. 9 p. 154). Magnus analyt.-geometr. Aufgaben II p. 89 ff. Vergl. §. 50 ff. der citirten Abhandlung.

**) Diese wichtige Unterscheidung verdankt man Riemann Grundlagen ꝛc. 1851 (6). Lehrsätze aus der analysis situs 1857 Crelle J. 54 p. 105. Vergl. Neumann Abel'sche Integrale 1865 p. 291. Listing Census räumlicher Complexe 1861 (Gött. Abh. Bd. 10) und Gött. Nachr. 1867 Nov. 13. Jordan Crelle J. 66 p. 22. 68 p. 297. Dieselbe Unterscheidung ist von Möbius Theorie der Elementar-Verwandtschaft (Leipz. Berichte 1863 p. 18) gemacht worden.

noch unzerstückt aber einfach zusammenhangend ist. Eine mit $r$ Rändern versehene Fläche ist $(r + 2k)$fach zusammenhangend, wobei $k$ eine der Zahlen 0, 1, 2, . . bedeutet.

In den folgenden Sätzen ist unter einem Polyeder (§. 6, 1) ein gemeines (mit nicht mehrfach zusammenhangender Oberfläche) zu verstehn, welches auch (nach Hessel) ein Euler'sches Polyeder genannt wird.

2. Ein Polyeder von $f$ Flächen und $e$ Ecken hat $f + e - 2$ Kanten.*)

Beweis 1. Nach Wegnahme eines der Polygone, aus denen das Polyeder besteht, behält man ein offenes Polyeder von $f - 1$ Flächen, $e$ Eckpuncten und $k$ Kanten. Nimmt man vom Rande desselben ein Polygon weg, so behält man ein offenes Polyeder von $f_1 = f - 2$ Flächen, $e_1 = e$ Eckpuncten und $k_1 = k - 1$ Kanten. Nimmt man vom Rande desselben wiederum ein Polygon weg, so behält man ein offenes Polyeder von $f_2 = f_1 - 1$ Flächen, $e_2 = e_1 - m$ Eckpuncten und $k_2 = k_1 - m - 1$ Kanten. U. s. w. Dabei ist

$$f - 1 + e - k = f_1 + e_1 - k_1 = f_2 + e_2 - k_2 = \ldots$$

Endlich bleibt 1 Polygon mit eben so viel Eckpuncten als Kanten (Seiten) übrig. Also ist $f - 1 + e - k = 1$, $f + e - k = 2$.

Beweis 2. Um von jeder Ecke zu jeder andern Ecke auf einer aus Kanten bestehenden Linie überzugehn, sind $e - 1$ Kanten erforderlich und hinreichend. Nachdem das Polyeder längs dieser Kanten zerschnitten worden ist, muß es, um in seine $f$ Flächen zerstückt zu werden, noch längs der übrigen Kanten zerschnitten werden. Zu der Zerstückung in $f$ Theile sind $f - 1$ Zerschneidungen erforderlich. Also hat das Polyeder $e - 1 + f - 1$ Kanten.

Anmerkung. Wenn man Polyeder so zusammenstellt, daß nur zum Theil eine Fläche des einen von einer Fläche des andern, oder eine

---

*) Dieses Grundgesetz der Polyedrometrie (welches vielleicht schon im Alterthum erkannt worden war, weil Archimedes die Reihe der halbregulären Polyeder vollständig anzugeben vermocht hat) ist enthalten in einem 1860 herausgegebenen Fragment von Descartes (Oeuvres inédites de Descartes p. M. Foucher de Careil, II p. 214). Vergl. den Aufsatz des Verf. im Monatsbericht der Berl. Acad. 1861 p. 1043. Bekannt gemacht wurde das Gesetz zuerst durch den neueren Entdecker desselben Euler 1752 Nov. Comm. Petrop. 4 p. 109 und bewiesen p. 156. Andere Beweise hat man von Cauchy 1813 J. de l'Ec. polyt. Cah. 16 p. 77 und Grunert Crelle J. 2 p. 367 (Beweis 1.), Staudt 1847 Geom. d. Lage 46 und Thieme briefl. Mittheilung, Petersburg 1867 Nov. 10 (Beweis 2.), August Progr. d. köln. Realgymn. Berlin 1854 p. 4, endlich durch Betrachtung von Winkelsummen sphärischer oder planer Polygone von Legendre Geom. VII, 25, L'Huilier 1812 Gerg. Ann. 3 p. 178 und Steiner Crelle J. 1 p. 364.

Ecke des einen von einer Ecke des andern gedeckt wird, so erhält man ein außerordentliches Polyeder, bei welchem die Anzahlen der Flächen, Ecken und Kanten von dem obigen Zusammenhang mehr oder weniger sich entfernen.*)

Wenn man ein Polyeder durch Hinzufügung von Ecken und Flächen in eine Summe von $n$ Polyedern zerlegt, an denen es im Ganzen $f$, $e$, $k$ verschiedene Flächen, Ecken, Kanten giebt, so ist $f + e - k = 1 + n$.**) Gesetzt, das erste unter den vereinten Polyedern hat $f_1$ Flächen, $e_1$ Ecken und $k_1$ Kanten; das folgende hat mit dem ersten $f_2$ Flächen, $e_2$ Ecken, $k_2$ Kanten nicht gemein; das folgende hat mit den vorhergehenden $f_3$ Flächen, $e_3$ Ecken, $k_3$ Kanten nicht gemein, u. s. w. Jedes Polyeder hat aber mit dem folgenden ein ebenes oder unebenes Polygon gemein, also ist nach dem Obigen

$$f_1 + e_1 - k_1 = 2$$
$$f_2 + e_2 - k_2 = 1$$
$$f_3 + e_3 - k_3 = 1, \text{ u. s. w.}$$

Die Addition giebt $f + e - k = 1 + n$.

3. Die Anzahl der Polygonwinkel auf einem Polyeder ist zweimal so groß als die Anzahl der Kanten. Denn jedes Polygon hat so viel Winkel als Seiten; unter den Seiten aller Polygone kommt jede Kante zweimal vor. Die Anzahl der Polygonwinkel ist gerade, also können unter den Flächen und Ecken des Polyeders Polygone von ungerader Eckenzahl und Ecken von ungerader Seitenzahl nur in gerader Anzahl vorkommen.

Bei einem Polyeder von $f$ Flächen, $e$ Ecken und $k$ Kanten ist***)

$$6 + k \leqq 3f \leqq 2k$$
$$6 + k \leqq 3e \leqq 2k$$
$$4 + e \leqq 2f \leqq 4e - 8$$
$$4 + f \leqq 2e \leqq 4f - 8$$

Denn es giebt $2k$ Polygonwinkel, und jede Fläche ist mindestens dreieckig, jede Ecke mindestens dreiseitig. Nun ist (2) $f = 2 + k - e$, $e = 2 + k - f$, folglich $6 + 3k - 3e \leqq 2k$, u. s. w. Aus den ersten beiden Begrenzungen folgen die beiden letzten, indem man $k$ durch $f + e - 2$ ersetzt.

---

*) Poinsot 1801 J. de l'Ec. polyt. Cah. 10 p. 46, L'Huilier a. a. O., der die Fälle, in denen das Euler'sche Gesetz nicht gilt, bereits classificirt hat, Hessel Crelle J. 8 p. 13. Vergl. Jacobi zu van Swinden Geom. p. 436.

**) Cauchy a. a. O. p. 85.

***) Descartes und Euler a. a. O.

Es können weder alle Flächen mehr als fünfeckig, noch alle Ecken mehr als fünfseitig sein; sonst wäre die Anzahl der Polygonwinkel mindestens $6f$ oder $6e$, also $k$ mindestens $3f$ oder $3e$, während doch $6 + k$ weder $3f$ noch $3e$ übersteigen kann.

Es giebt kein Polyeder von 7 Kanten, denn die 3fache Anzahl der Flächen oder Ecken müßte zwischen 13 und 14 liegen.

Eine Classification der möglichen Polyeder von $k$ Kanten (von $f$ Flächen und $e$ Ecken) ist noch nicht zu Stande gebracht worden.*)

**4.** Wenn unter den $f$ Flächen eines Polyeders $f_3$ dreieckige, $f_4$ viereckige, . ., unter den $e$ Ecken desselben $e_3$ dreiseitige, $e_4$ vierseitige, . . sind, und das Polyeder $k$ Kanten hat, so ist**)

$$f = f_3 + f_4 + f_5 + \ldots$$
$$e = e_3 + e_4 + e_5 + \ldots$$
$$2k = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots$$
$$= 3e_3 + 4e_4 + 5e_5 + \ldots$$

Nun hat man (2) $2f + 2e = 4 + 2k$, also

$$\text{I.}\quad 2(f_3 + f_4 + \ldots) = 4 + e_3 + 2e_4 + 3e_5 + \ldots$$
$$2(e_3 + e_4 + \ldots) = 4 + f_3 + 2f_4 + 3f_5 + \ldots$$

Hieraus findet man durch Addition

$$\text{II.}\quad f_3 + e_3 = 8 + (f_5 + e_5) + 2(f_6 + e_6) + \ldots$$

Wenn man die Gleichungen (I) addirt, nachdem man die eine mit 2 multiplicirt hat, so erhält man

$$\text{III.}\quad 3f_3 + 2f_4 + f_5 = 12 + 2e_4 + 4e_5 + \ldots + f_7 + 2f_8 + \ldots$$
$$3e_3 + 2e_4 + e_5 = 12 + 2f_4 + 4f_5 + \ldots + e_7 + 2e_8 + \ldots$$

Wenn man die Gleichungen (I) addirt, nachdem man die eine mit 3, die andere mit 2 multiplicirt hat, so erhält man

$$\text{IV.}\quad 4f_3 + 2f_4 + e_3 = 20 + 2e_4 + 5e_5 + 8e_6 + \ldots + 2f_6 + 4f_7 + \ldots$$
$$4e_3 + 2e_4 + f_3 = 20 + 2f_4 + 5f_5 + 8f_6 + \ldots + 2e_6 + 4e_7 + \ldots$$

Aus (II) schließt man, daß bei keinem Polyeder dreieckige Flächen und dreiseitige Ecken zugleich fehlen können; es sind deren zusammen wenigstens 8 vorhanden.

Die Gleichungen (III) lehren:

Ein Polyeder ohne dreieckige und viereckige Flächen hat wenigstens 12 fünfeckige Flächen; ohne dreiseitige und vierseitige Ecken hat es wenigstens 12 fünfseitige Ecken.

---

*) Vergl. die Anfänge bei Euler a. a. O. Steiner 1828 Gerg. Ann. 19 p. 36, Poinsot Compt. rend. 1858ᵃ p. 65, Jordan a. a. O.

**) Diese Betrachtungen sind von Legendre (Géom. Note 8) begonnen und von Gergonne (Ann. de Math. 15 p. 157) dualistisch ausgeführt worden.

Ein Polyeder ohne dreieckige und fünfeckige Flächen hat wenigstens 6 viereckige Flächen; ohne dreiseitige und fünfseitige Ecken hat es wenigstens 6 vierseitige Ecken.

Ein Polyeder ohne viereckige und fünfeckige Flächen hat wenigstens 4 dreieckige Flächen; ohne vierseitige und fünfseitige Ecken hat es wenigstens 4 dreiseitige Ecken.

Ein Polyeder, dessen Ecken sämmtlich dreiseitig sind, und unter dessen Flächen außer beliebig viel sechseckigen nur entweder dreieckige, oder viereckige, oder fünfeckige vorkommen, hat nicht mehr und nicht weniger als 4 dreieckige, 6 viereckige, 12 fünfeckige Flächen.

Ein Polyeder, dessen Flächen sämmtlich dreieckig sind, und unter dessen Ecken außer beliebig viel sechsseitigen nur entweder dreiseitige, oder vierseitige, oder fünfseitige vorkommen, hat 4 dreiseitige, 6 vierseitige, 12 fünfseitige Ecken.

Die Gleichungen (IV) lehren:

Ein Polyeder ohne dreieckige und viereckige Flächen hat wenigstens 20 dreiseitige Ecken; ohne dreiseitige und vierseitige Ecken hat es wenigstens 20 dreieckige Flächen.

Ein Polyeder, dessen Flächen fünfeckig und dessen Ecken dreiseitig sind, hat 20 Ecken. Ein Polyeder, dessen Ecken fünfseitig und dessen Flächen dreieckig sind, hat 20 Flächen.

Anmerkung. Die an besondern Polyedern früher*) wahrgenommene Dualität ist durchgängig vorhanden: jedem gegebenen Polyeder läßt sich ein polares Polyeder so beiordnen, daß jeder $m$seitigen Ecke des einen eine $m$eckige Fläche des andern, jeder $n$eckigen Fläche des einen eine $n$seitige Ecke des andern entspricht, und daß beide Polyeder gleichviel Kanten haben. Man hat nur nöthig, in Bezug auf eine beliebig gewählte Kugel die Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, ..$ aufzusuchen, deren Pole die Eckpuncte des gegebenen Polyeders $A, B, C, ..$ sind (§. 5, 12).

5. Unter den Polyedern sind besonders die regulären (Platonischen) beachtet worden**), welche reguläre Flächen und reguläre Ecken von je einer Art haben.

Ein reguläres Polyeder, dessen Flächen Dreiecke sind, hat entweder dreiseitige, oder vierseitige, oder fünfseitige Ecken. In dem ersten Falle hat es 4 Dreiecke und 4 dreiseitige Ecken (4, III und II), und

---

*) Maurolycus 1532 (vergl. J. H. T. Müller in Grunert Archiv 34 p. 1). Keppler harm. mundi V, 1. Meister 1785 Comm. Götting. VII p. 39. Der allgemeine Satz hat seinen genauern Ausdruck durch Gergonne a. a. O. erhalten.

**) Die Entdeckung der Platonischen Polyeder (Plato Tim. p. 55 und de anima mundi p. 98) wird der Pythagoreischen Schule zugeschrieben. Von denselben handelt Euclides Elem. XIII ff.

heißt ein Tetraeder. In dem zweiten Falle hat es 8 Dreiecke und 6 vierseitige Ecken, und heißt ein Octaeder. In dem dritten Falle hat es 20 Dreiecke und 12 fünfseitige Ecken (4, IV und III), und heißt ein Icosaeder. Es können nicht alle Ecken sechsseitig sein (3).

Ein reguläres Polyeder, dessen Flächen Vierecke sind, kann nur dreiseitige Ecken haben, und hat deren 8 (4, II) nebst 6 Flächen (4, III), und heißt ein Hexaeder.

Ein reguläres Polyeder, dessen Flächen Fünfecke sind, kann nur dreiseitige Ecken haben und hat deren 20 (4, IV) nebst 12 Flächen (4, III), und heißt ein Dodecaeder. Es können nicht alle Flächen Sechsecke sein.

Davon bilden das Tetraeder mit sich selbst, Octaeder und Hexaeder, Icosaeder und Dodecaeder je ein Paar, so daß jeder $m$eckigen Fläche des einen Polyeders eine $m$seitige Ecke des andern entspricht.

**6.** Unter halbregulären (Archimedeischen) Polyedern*) werden solche verstanden, die gleiche und ähnliche Ecken haben, eingeschlossen von regulären Flächen verschiedener Arten. Denselben zugeordnet sind solche Polyeder, die gleiche und ähnliche Flächen haben, und an jeder Fläche reguläre Ecken verschiedener Arten.

I. Wenn das Polyeder nur $m$seitige Ecken hat, so ist (4)

$$2k = me = 2e + 2f - 4$$

$$e = 2\frac{f-2}{m-2}$$

Die möglichen Flächen sind (3)

$$m = 3,\quad 2k = 3e = 6(f-2)$$
$$m = 4,\quad k = 2e = 2(f-2)$$
$$m = 5,\quad 2k = 5e = \tfrac{10}{3}(f-2)$$

II. Wenn an jeder Ecke des Polyeders $\alpha$ $a$eckige, $\beta$ $b$eckige, $\gamma$ $c$eckige, .. Flächen liegen, so ist

$$2k = (\alpha + \beta + ..)e$$

Auf dem Polyeder giebt es $\alpha e$ Winkel, die den $a$eckigen Flächen angehören, und den $a$ten Theil so viel Flächen von dieser Art, u. s. w., folglich ist

$$f = \left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + ..\right)e$$

*) Die von Archimedes entdeckten halbregulären Polyeder sind von Pappus V. Einleitung zu prop. 18 beschrieben worden. Die Oberflächen-Netze findet man bei A. Dürer Unterweisung u. s. w. 1538. Vergl. Keppler harmonice mundi II. 28. Meier Hirsch geom. Aufg. II p. 127 ff. Die halbregulären Polyeder, welche den Archimedeischen polar zugeordnet sind, finden sich zuerst in J. H. T. Müller's Trigonometrie 1852 p. 345 erwähnt.

Vermöge der Gleichung $2f + 2e - 2k = 4$ hat man also

$$\left(\frac{2\alpha}{a} + \frac{2\beta}{b} + \ldots + 2 - \alpha - \beta - \ldots\right)e = 4$$

oder

$$\left(2 - \alpha\frac{a-2}{a} - \beta\frac{b-2}{b} - \ldots\right)e = 4^{*)}$$

Der Subtrahend hat seinen geringsten Werth, wenn $\alpha = \beta = \ldots = 1$, $a = 3$, $b = 4, \ldots$ Nun ist aber $2 < \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \frac{4}{6}$; also giebt es kein Polyeder, dessen Ecken sämmtlich auf gleiche Weise von mehr als dreierlei Polygonen eingeschlossen werden.

III. Wenn alle Ecken des Polyeders auf gleiche Weise von $\alpha$ $a$eckigen, $\beta$ $b$eckigen und $\gamma$ $c$eckigen Flächen eingeschlossen sind, und eine der Zahlen $a$, $b$, $c$, z. B. $a$ ungerade ist, so muß eine der Zahlen $\alpha - 1$, $\beta$, $\gamma$ mindestens 2 betragen.**) Vereinigt man mit der ersten, dritten, fünften, .. Seite eines $a$Ecks jedesmal eine Seite eines $a$Ecks, so treffen zuletzt an einer Ecke drei $a$Ecke zusammen. Vereinigt man mit der ersten, dritten, fünften, .. Seite des $a$Ecks jedesmal eine Seite eines $b$Ecks, so treffen zuletzt an einer Ecke zwei $b$Ecke zusammen. Daher kann nicht jede der Zahlen $\alpha - 1$, $\beta$, $\gamma$ weniger als 2 betragen.

IV. Hiernach ergeben sich als möglich

Archimedeische Polyeder mit dreiseitigen Ecken:
Jede Ecke wird von einem $a$Eck und zwei $b$Ecken eingeschlossen. Die Zahl $b$ muß gerade sein (III). Man hat (II)

$$\left(\frac{2}{a} + \frac{4}{b} - 1\right)e = 4$$

und erhält folgende Auflösungen

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $n$ | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| $b$ | 4 | 6 | 8 | 10 | 6 | 6 |
| $c$ | $2n$ | 12 | 24 | 60 | 24 | 60 |

Ein Polyeder dieser Art hat $\frac{e}{a}$ $a$eckige und $\frac{2e}{b}$ $b$eckige Flächen.

Wird jede Ecke von einem $a$Eck, einem $b$Eck und einem $c$Eck eingeschlossen, so müssen $a$, $b$, $c$ gerade Zahlen sein. Die Gleichung

$$\left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} - 1\right)e = 4$$

hat nur zwei Auflösungen

---

*) Meier Hirsch a. a. O. p. 171.
**) Keppler a. a. O. II, 17. Meier Hirsch a. a. O. p. 142.

| $a$ | $b$ | $c$ | $e$ |
|---|---|---|---|
| 4 | 6 | 8 | 48 |
| 4 | 6 | 10 | 120 |

Ein solches Polyeder hat $\frac{e}{a}$ $a$eckige, $\frac{e}{b}$ $b$eckige und $\frac{e}{c}$ $c$eckige Flächen.

Archimedeische Polyeder mit vierseitigen Ecken: Jede Ecke wird von drei $a$Ecken und einem $b$Eck eingeschlossen. Die Gleichung

$$\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}-1\right)e=2$$

hat die Auflösungen

| $a$ | $b$ | $e$ |
|---|---|---|
| 3 | $n$ | $2n$ |
| 4 | 3 | 24 |

Ein solches Polyeder hat $\frac{3e}{a}$ $a$eckige und $\frac{e}{b}$ $b$eckige Flächen.

Wird jede Ecke von zwei $a$Ecken und zwei $b$Ecken eingeschlossen, so hat man die Gleichung

$$\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}-1\right)e=2$$

mit den Auflösungen

| $a$ | $b$ | $e$ |
|---|---|---|
| 3 | 4 | 12 |
| 3 | 5 | 30 |

Ein solches Polyeder hat $\frac{2e}{a}$ $a$eckige und $\frac{2e}{b}$ $b$eckige Flächen.

Wird jede Ecke von einem $a$Eck, zwei $b$Ecken und einem $c$Eck eingeschlossen, so muß $b$ gerade sein. Aus der Gleichung

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}-1\right)e=2$$

folgt nur

| $a$ | $b$ | $c$ | $e$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 | 60 |

Dieses Polyeder hat 20 Dreiecke, 30 Vierecke und 12 Fünfecke.

Archimedeische Polyeder mit fünfseitigen Ecken: Jede Ecke wird von vier $a$Ecken und einem $b$Eck eingeschlossen. Die Gleichung

$$\left(\frac{8}{a}+\frac{2}{b}-3\right)e=4$$

hat die Auflösungen

| $a$ | $b$ | $e$ |
|---|---|---|
| 3 | 4 | 24 |
| 3 | 5 | 60 |

Ein solches Polyeder hat $\frac{4e}{a}$ $a$eckige und $\frac{e}{b}$ $b$eckige Flächen.

Anmerkung. Pappus und Keppler zählen 13 Archimedeische Polyeder, weil sie wegen ihrer Unbestimmtheit die $2n$eckigen Polyeder weglassen, deren Ecken entweder jede von zwei Vierecken und einem $n$Eck oder jede von drei Dreiecken und einem $n$Eck eingeschlossen werden.

V. Für Polyeder, welche nur $m$eckige Flächen haben, erhält man die entsprechenden Resultate durch gegenseitige Vertauschung von $e$ und $f$, $a$eckigen Flächen und $a$seitigen Ecken, und findet den Archimedeischen polar zugeordnete Polyeder mit dreieckigen, viereckigen, fünfeckigen Flächen. Unter diesen Polyedern sind besonders die Rhomboeder (§. 6, 6) mit mehrerlei Ecken*) betrachtet worden; das eine von 12 Rhomben hat an jeder Fläche zwei dreiseitige und zwei vierseitige Ecken, das andere von 30 Rhomben hat an jeder Fläche zwei dreiseitige und zwei fünfseitige Ecken.

7. Nach andern als den oben angegebenen Bestimmungen sind Platonische und Archimedeische Polyeder nicht möglich. Die Realität eines ganz oder zum Theil regulären Polyeders, dessen Bestimmungen der Natur eines solchen nicht widersprechen, wird erkannt, indem man eine Kugelfläche durch Hauptkreise in ein sphärisches Polyeder theilt, dessen Polygone sphärisch sind und dieselbe Art, Anzahl, Reihenfolge haben als die planen Polygone des zu construirenden Polyeders.

Dazu ist erforderlich, daß man aus einem willkürlich gewählten Punct $O$ der Kugel die Bogen $OA_1$, $OA_2$, .. von gleicher Länge so zieht, daß die Winkel der Sehnen $A_1OA_2$, $A_2OA_3$, .. den Winkeln der regulären planen Polygone gleich werden, die eine Ecke des Polyeders einschließen.**) Dann enthalten die Ebenen $A_1OA_2$, $A_2OA_3$, ..

*) Keppler a. a. O. II, 27. Meier Hirsch a. a. O. p. 186.

**) Bezeichnet man den gesuchten Centriwinkel der gleichen Bogen $OA_1$, $OA_2$, .. durch $\eta$, die gesuchten Winkel der Bogen $A_1OA_2$, $A_2OA_3$, .. durch $\vartheta_1$, $\vartheta_2$, .., die gegebenen Winkel der Sehnen $A_1OA_2$, $A_2OA_3$, .. durch $\lambda_1$, $\lambda_2$, .., so bilden die Sehnen mit dem von $O$ ausgehenden Radius der Kugel den Winkel $90^0-\frac{1}{2}\eta$, und man hat aus sphärisch-trigonometrischen Gründen

$$\cos\tfrac{1}{2}\eta=\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1:\sin\tfrac{1}{2}\lambda_1=\,..$$

reguläre plane Polygone, die der Kugel eingeschrieben sind, und deren Seiten eben so lang sind als die gleichen Sehnen $OA_1$, $OA_2$, ... Die Eckpuncte dieser Polygone bestimmen wiederum reguläre sphärische Polygone, und zwar $\alpha$ $a$Ecke, $\beta$ $b$Ecke, $\gamma$ $c$Ecke, die um den Punct $O$ in der gesuchten Weise liegen. In der That betragen $\frac{\alpha e}{a}$ solche reguläre sphärische $a$Ecke, $\frac{\beta e}{b}$ $b$Ecke, $\frac{\gamma e}{c}$ $c$Ecke zusammen eine Kugelfläche. Sind nämlich $\vartheta_1$, $\vartheta_2$, $\vartheta_3$ die Winkel der regulären sphärischen $a$Ecke, $b$Ecke, $c$Ecke, so hat die Fläche des $a$Ecks (§. 4, 5) den Werth $a\vartheta_1 - (a-2) . 180^0$, u. s. w. Es ist aber (5, II)

$$\frac{\alpha e}{a}[a\vartheta_1 - (a-2) . 180^0] + \frac{\beta e}{b}[b\vartheta_2 - (b-2) . 180^0]$$
$$+ \frac{\gamma e}{c}[c\vartheta_3 - (c-2) . 180^0]$$
$$= \left[\alpha\vartheta_1 + \beta\vartheta_2 + \gamma\vartheta_3 - \left(\alpha + \beta + \gamma - \frac{2\alpha}{a} - \frac{2\beta}{b} - \frac{2\gamma}{c}\right) . 180^0\right]e$$
$$= 4 . 180^0, \text{ weil } \alpha\vartheta_1 + \beta\vartheta_2 + \gamma\vartheta_3 = 2 . 180^0$$

Hiernach liegen alle Ecken eines Archimedeischen Polyeders auf einer Kugel; die Ecken desselben, welche mit einer Ecke durch Kanten verbunden sind, liegen auf einer Ebene.

Zu einem Archimedeischen Polyeder findet man das polare, indem man durch die Eckpuncte die Ebenen legt, welche die umgeschriebene Kugel berühren. Wenn mehrere Eckpuncte auf einer Ebene liegen, so gehn die dazu gehörigen Tangentenebenen durch einen Punct (§. 3, 6). Einem regulären $a$Eck entspricht daher eine reguläre $a$seitige Ecke, statt der $m$seitigen Ecken erhält man bestimmte $m$eckige Flächen. Alle Flächen des polaren Polyeders berühren eine Kugel; die Flächen desselben, welche mit einer Fläche durch Kanten verbunden sind, haben (erweitert) einen Punct gemein.

Die Eckpuncte eines Platonischen Polyeders liegen auf einer Kugel, deren Centrum von den Flächen und von den Kanten je gleiche Abstände hat. Also werden die Flächen in ihren Mitten (den Eckpuncten eines polaren Polyeders) und die Kanten in ihren Mitten von je einer concentrischen Kugel berührt. Die Centralebene, welche eine Kante $2a$ des Polyeders enthält, schneidet die Kugeln in Hauptkreisen derselben mit

---

also
$$\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1 : \sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2 : \sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3 = \sin\tfrac{1}{2}\lambda_1 : \sin\tfrac{1}{2}\lambda_2 : \sin\tfrac{1}{2}\lambda_3$$
nebst $\alpha\vartheta_1 + \beta\vartheta_2 + \gamma\vartheta_3 = 360^0$. Vergl. Meier Hirsch a. a. O. p. 151 und 176.

den Radien $r$, $r'$, $r''$, und das Polyeder in einem symmetrischen Polygon, das Tetraeder in einem Dreieck, das Octaeder und das Hexaeder in einem Viereck, das Icosaeder und das Dodecaeder in einem Sechseck. Nachdem man den Radius $r''$ und den Radius $\varrho$ des einer Fläche des Polyeders umgeschriebenen Kreises durch $a$ ausgedrückt hat, findet man $r^2 = r''^2 - a^2$, $r'^2 = r^2 - \varrho^2$.*)

Anmerkung. Neben dem Platonischen Icosaeder und Dodecaeder giebt es noch ein Stern-Icosaeder und Stern-Dodecaeder, jenes mit 12 fünfseitigen Ecken, deren Kugelschnitte reguläre sphärische Stern-Fünfecke sind, und die von regulären Dreiecken eingeschlossen werden; dieses mit 20 dreiseitigen Ecken, die von regulären Stern-Fünfecken eingeschlossen werden. Außerdem kennt man zwei außerordentliche (2, Anm.) reguläre Polyeder, beide mit 12 fünfseitigen Ecken, deren Scheitel mit denen eines Platonischen Icosaeders zusammenfallen und deren Kugelschnitte reguläre sphärische Stern-Fünfecke bei dem einen, gemeine Fünfecke bei dem andern sind, beide mit 12 Flächen, die bei dem einen reguläre gemeine Fünfecke, bei dem andern Stern-Fünfecke sind; beide mit 30 Kanten.**)

8. Wenn das Polyeder $e$ Ecken hat und seine Flächen Polygone sind, deren Perimeter sich selbst nicht schneiden, so beträgt die Summe der Polygonwinkel auf dem Polyeder $(2e - 4) \,.\, 180^0$, doppelt soviel als die Summe der Winkel eines planen $e$Ecks.***)

Beweis 1. Das Polyeder habe $k$ Kanten und $f$ Flächen, darunter eine $a$eckige, eine $b$eckige, ... Die Summe der Winkel des planen $a$Ecks von der vorausgesetzten Beschaffenheit beträgt $(a - 2) \,.\, 180^0$. Also beträgt die Summe der Winkel auf dem Polyeder $(a + b + \,.\,. - 2f) \,.\, 180^0$. Nun ist $a + b + \,.\,.$ die Anzahl dieser Winkel, welche $2k$ beträgt, folglich (2)

$$a + b + \,.\,. - 2f = 2k - 2f = 2e - 4$$

Beweis 2. Eine $a$seitige Ecke des Polyeders ist von $a$ Dreiecken umgeben, welche eine gemeinschaftliche Spitze haben und deren Basen ein

*) Amthor Brief Dresden 1871.

**) Das Stern-Dodecaeder und das außerordentliche Polyeder von Stern-Fünfecken sind von Keppler 1619 (Harm. mundi II, 26) zuerst beschrieben und gezeichnet, die beiden andern regulären Polyeder von Poinsot 1801 (J. de l'Ec. polyt. Cah. 10 p. 39). Von den möglichen Varietäten der Platonischen Polyeder handeln außer Poinsot a. a. O. noch Cauchy J. de l'Ec. polyt. Cah. 16 p. 68 und Bertrand Compt. rend. 1858 p. 79. Vergl. Cayley Philos. Mag. 1859 p. 123. Wiener Vielecke und Vielflache, Leipzig 1864. Heis und Eschweiler Trigon. 1867 p. 294. Hessel Gleicheckige Polyeder, Marburg 1871. Heß Varietäten der Archimedeischen Körper, Marburger Berichte 1872.

***) Descartes und Euler a. a. O.

Polygon bilden. Wenn man diese Dreiecke von dem Polyeder abtrennt, so entsteht eine Oeffnung, die man mit $a - 2$ Dreiecken bedecken kann. Von dem Polyeder mit $e$ Ecken, dessen Flächen aus $d$ Dreiecken bestanden, behält man demnach ein Polyeder mit $e - k$ Ecken, dessen Flächen aus $d - 2k$ Dreiecken bestehn. Bei 4 Ecken giebt es 4 Dreiecke, also ist

$$d - 2(e - 4) = 4, \quad d = 2e - 4$$

9. Wenn das Polyeder $f$ Flächen hat und seine Ecken Kugelschnitte haben, deren Perimeter sich selbst nicht schneiden, so beträgt die doppelte Summe seiner Flächenwinkel weniger die Summe seiner Ecken $(2f - 4) . 180^0$, doppelt so viel als die Summe der Winkel eines planen $f$Ecks.*)

Beweis. Das Polyeder habe $k$ Kanten und $e$ Ecken, darunter eine $a$seitige, eine $b$seitige, ... Die Winkel der $a$seitigen Ecke haben die Summe $\alpha$, u. s. w. Dann beträgt die $a$seitige Ecke $\alpha - (a - 2) . 180^0$. Vergl. §. 4, 5 und §. 5, 2. Also hat die Summe $v$ der Ecken des Polyeders den Werth $\alpha + \beta + .. - (a + b + .. - 2e) . 180^0$. Nun ist $\alpha + \beta + ..$ die doppelte Summe $2u$ der Flächenwinkel des Polyeders, $a + b + ..$ die doppelte Anzahl $2k$ der Polygonwinkel des Polyeders, folglich

$$v = 2u - (2k - 2e) . 180^0 = 2u - (2f - 4) . 180^0$$

Anmerkung. Bezeichnet man die Summe der Polygonwinkel des Polyeders durch $t$, so ist

$$t = (2e - 4) . 180^0$$
$$2u - v = (2f - 4) . 180^0$$

folglich

$$t + 2u - v = (2k - 4) . 180^0$$

doppelt soviel als die Summe der Winkel eines planen $k$Ecks.

## §. 8. Cubatur der Prismen und Pyramiden.

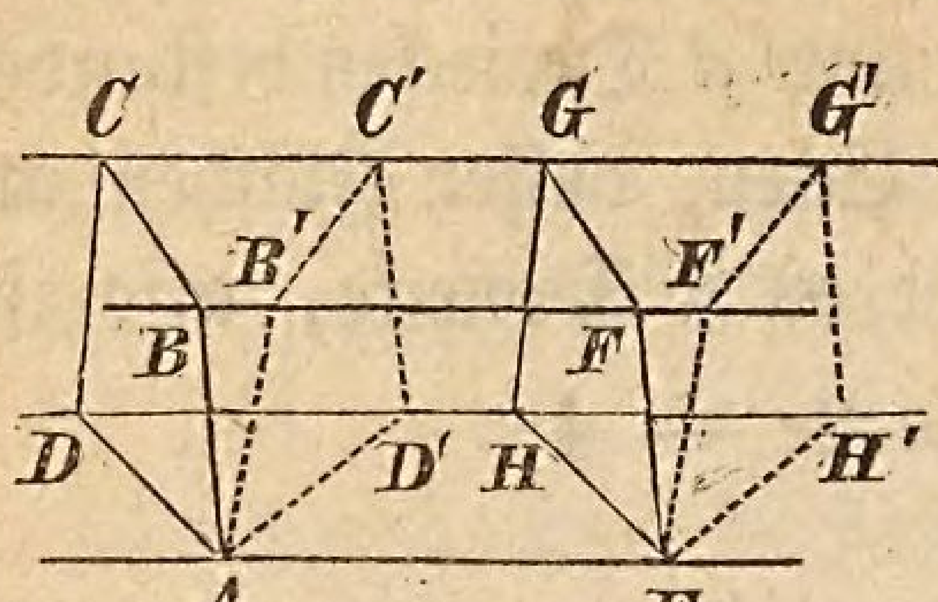
1. Wenn zwei Prismen (Cylinder) congruente Normalschnitte und gleiche Längenkanten haben, so haben sie gleiche Volume.**)

Beweis. Die unbegrenzten Prismen, deren Segmente in Betracht

*) Français Gerg. Ann. 3 p. 189. Grunert Crelle J. 5 p. 41. Brianchon J. de l'Ec. polyt. Cah. 25 p. 317. Den entsprechenden Satz für das Tetraeder hatte De Gua bemerkt Mém. de Paris 1783 p. 369.

**) Dieser Satz kommt bei Eucl. XI, 28 in dem Beweise vor. Den gebührenden Rang hat er bei den Neuern erhalten, z. B. Bretschneider Geom. §. 466, J. H. T. Müller Stereom. p. 93.

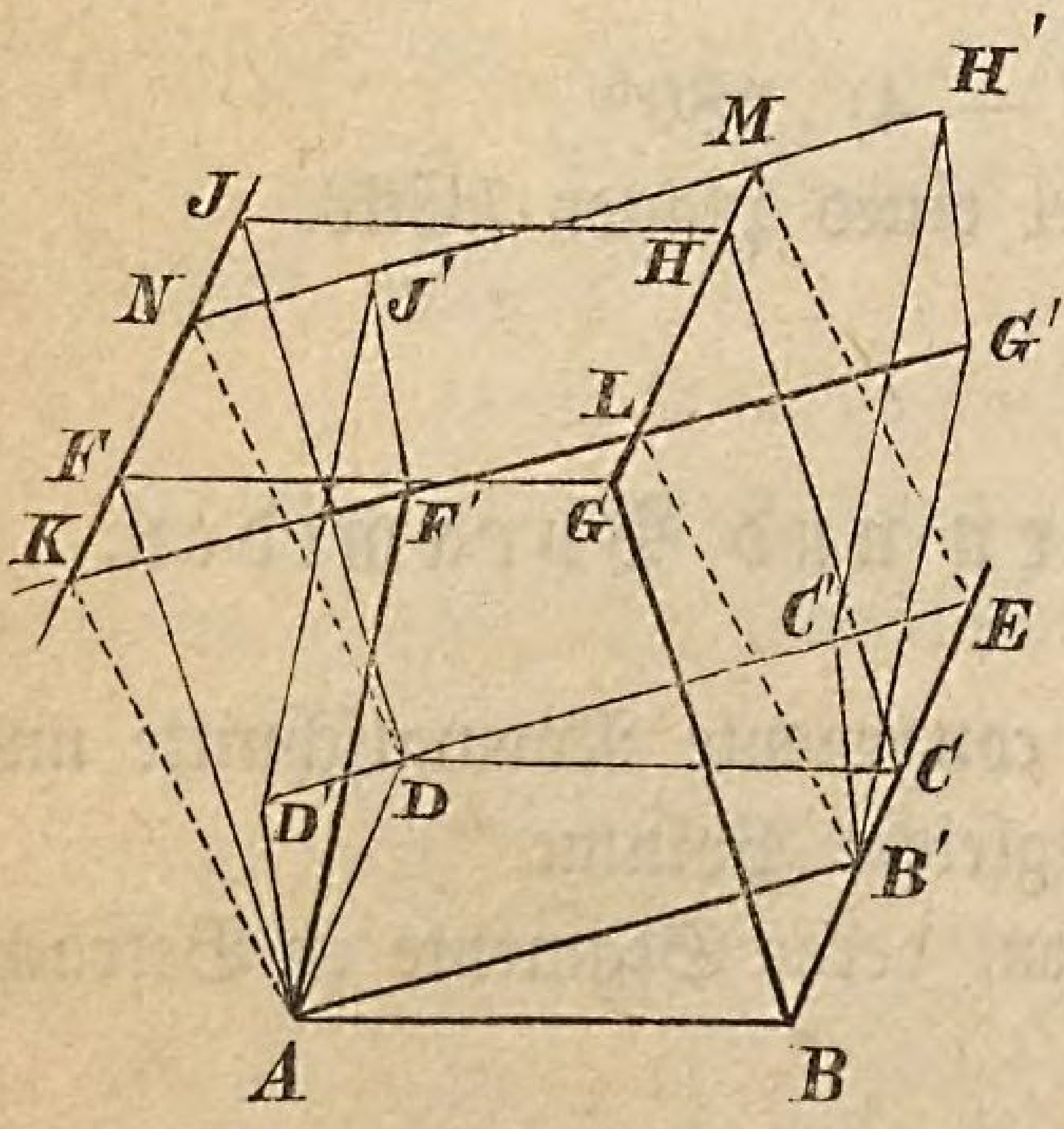
kommen, lassen sich wegen der Congruenz ihrer Normalschnitte (§. 5, 4) so vereinigen, daß ein Paar gleiche Längenkanten z. B. in $AE$ zusammenfallen. Die Vergleichung der Volume $ABCDEFGH$ und $AB'C'D'EF'G'H'$ beruht nun auf der Vergleichung der Polyeder $ABCDB'C'D'$ und $EFGHF'G'H'$. Die Flächen $ABCD$ und $EFGH$ sind congruent, eben so die Ecken $A$ und $E$, $B$ und $F$, $C$ und $G$, $D$ und $H$, dazu sind die Kanten $BB'$ und $FF'$, $CC'$ und $GG'$, $DD'$ und $HH'$ gleich, also sind die Polyeder $ABCDB'C'D'$ und $EFGHF'G'H'$ congruent. Nach der Subtraction dieser Polyeder von dem Polyeder $ABCDEF'G'H'$ behält man die gleichen Prismen $ABCDEFGH$ und $A'B'C'D'E'F'G'H'$.




Anmerkung. Ein dreiseitiges Prisma ist halb so groß an Volum als ein Parallelepiped, das mit ihm eine Ecke und die anliegenden Kanten gemein hat. Denn das Parallelepiped wird durch ein Diagonalparallelogramm in zwei dreiseitige Prismen getheilt, welche congruente Normalschnitte und gleiche Längenkanten, mithin gleiche Volume haben. Vergl. §. 6, 6.

2. Wenn zwei Parallelepipede gleiche Basen und gleiche Höhen haben, so sind sie gleich an Volum.*)

Beweis. Die gleichen Basen $ABCD$ und $A'B'C'D'$ der beiden Parallelepipede $p$ und $p'$ können, wenn z. B. $A'B' > AB$ ist, so auf eine Ebene gelegt werden, daß $A'$ auf $A$ und $B'$ auf $BC$ fällt. Dann geht die Gerade $C'D'$ durch den Punct $D$, weil das Dreieck $AB'D$ halb so groß ist als das Parallelogramm $ABCD$, mithin auch halb so groß als das Parallelogramm $A'B'C'D'$. Die den Basen gegenüberliegenden Flächen $FGHJ$ und $F'G'H'J'$ der Parallelepipede liegen auf einer Ebene, weil die Parallelepipede gleiche Höhen haben. Die Kanten $FJ$ und $F'G'$ schneiden sich in $K$. Die Vergleichung der Parallelepipede $p$ und $p'$ beruht nun auf ihrer Vergleichung mit dem Parallelepiped $q$, dessen Basis $AB'ED$ und dessen gegenüberliegende



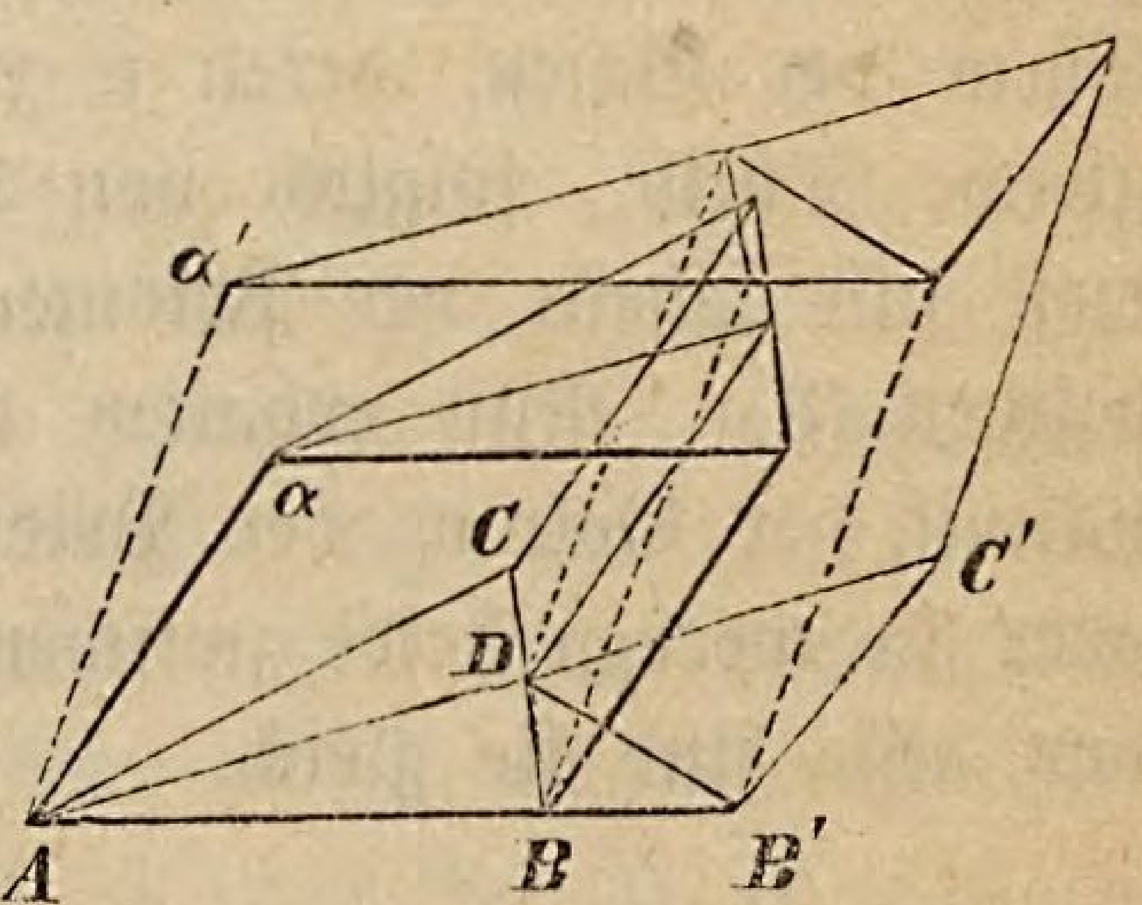

*) Eucl. XI, 31. Die den Beweis wesentlich vereinfachende Zusammenlegung der Basen ist von J. H. T. Müller (Stereom. p. 96) angegeben worden.

Fläche $KLMN$ ist. Die Parallelepipede $p$ und $q$ sind Prismen von gleichem Volum (1), weil ihre Längenkanten gleich $AD$ und ihre Normalschnitte congruent sind als Normalschnitte des vierseitigen Prisma, dessen Kanten $AD$, $BE$, $GM$ und $KJ$. Ebenso sind die Parallelepipede $p'$ und $q$ Prismen von gleichem Volum, weil ihre Längenkanten gleich $AB'$ und ihre Normalschnitte congruent sind als Normalschnitte des vierseitigen Prisma, dessen Kanten $AB'$, $D'E$, $NH'$, $KG'$. Aus den Gleichungen $p = q$ und $p' = q$ folgt $p = p'$.

Anmerkung. Wenn zwei dreiseitige Prismen gleiche Basen und gleiche Höhen haben, so sind sie gleich an Volum. Z. B. die dreiseitigen Prismen von gleichen Höhen, deren Basen die gleichen Dreiecke $ABC$ und $AB'C'$ sind, haben gleiche Volume, weil sie halb so groß sind als die gleichen Parallelepipede $p$ und $p'$ (1, Anm.).

3. Wenn zwei Prismen (Cylinder) gleiche Höhen haben, so ist das Verhältniß ihrer Volume dem Verhältniß ihrer Basen gleich. Eucl. XI, 32.

Beweis. Die zu vergleichenden Prismen $p$ und $q$ werden durch Diagonalparallelogramme in dreiseitige Prismen von gleichen Höhen zerlegt, zu deren Basen z. B. die Dreiecke $ABC$ und $AB'C'$ gehören. Die Gerade $BC$ wird von der Geraden $AC'$ in $D$ geschnitten. Auf der Basis $ABD$ construire man sowohl das Prisma, dessen Kanten mit den Kanten des auf $ABC$ stehenden Prisma die Richtung und Länge $A\alpha$ gemein haben, als auch das Prisma, dessen Kanten mit den Kanten des auf $AB'C'$ stehenden Prisma die Richtung und Länge $A\alpha'$ gemein haben; diese Prismen, welche durch $ABD\alpha$ und $ABD\alpha'$ bezeichnet werden, sind gleich an Volum (2, Anm.).




Um zunächst das Verhältniß der Volume der Prismen $ABC\alpha$ und $ABD\alpha$ zu finden, legt man durch die Kante $A\alpha$ Diagonalparallelogramme von beliebiger Anzahl, deren je zwei folgende auf der Geraden $BC$ gleiche Theile, folglich auf der Basis $ABC$ gleiche Dreiecke, und von dem Prisma $ABC\alpha$ gleiche Prismen (2, Anm.) abschneiden. Daher sind die Verhältnisse $BC : BD$, $ABC : ABD$, $ABC\alpha : ABD\alpha$ gleich, indem sie entweder denselben rationalen Werth haben oder zwischen denselben beliebig nahen Grenzen liegen (Algebra §. 1, 2). Aus der Proportion $ABC\alpha : ABD\alpha = ABC : ABD$ und den auf gleiche Weise sich ergebenden Proportionen $ABD\alpha' : AB'D\alpha' = ABD : AB'D$,

$AB'D\alpha' : AB'C'\alpha = AB'D : AB'C'$, in denen $ABD\alpha'$ und $ABD\alpha$ nicht verschieden sind, schließt man durch Multiplication $ABC\alpha : AB'C'\alpha' = ABC : AB'C'$.

Bestehn nun die Prismen $p$ und $q$ aus den dreiseitigen Prismen $p_1, p_2, ..$ und $q_1, q_2, ..$, ihre Basen $a$ und $b$ aus den Dreiecken $a_1$, $a_2, ..$ und $b_1, b_2, ..$, so hat man

$$p_1 : q_1 = a_1 : b_1$$
$$p_2 : q_1 = a_2 : b_1, \text{ u. s. f.}$$

also durch Addition $p : q_1 = a : b_1$. Endlich ist

$$q_1 : p = b_1 : a$$
$$q_2 : p = b_2 : a, \text{ u. s. f.}$$

also durch Addition $q : p = b : a$.

Anmerkung. Wenn zwei Prismen gleiche Höhen haben, so ist ihre Summe oder Differenz einem Prisma von derselben Höhe gleich, dessen Basis die Summe oder Differenz der Basen der gegebenen Prismen ist.

4. Wenn zwei Prismen (Cylinder) gleiche Basen haben, so ist das Verhältniß ihrer Volume dem Verhältniß ihrer Höhen gleich. Eucl. XI, 25.

Beweis. Nachdem man die Basen der Prismen auf eine Ebene gelegt hat, construirt man Ebenen in beliebiger Anzahl parallel mit der Ebene der Basen, deren je zwei folgende von den Höhen der Prismen gleiche Theile, folglich von den Prismen gleiche Prismen abschneiden, weil alle Theile der Prismen außer den gleichen Höhen gleiche Basen besitzen (3). Nun erhalten das Verhältniß der Höhen und das Verhältniß der Volume der Prismen entweder denselben rationalen Werth, oder sie werden beide zwischen denselben beliebig nahen Grenzen gefunden, also sind sie gleich.

5. Das Verhältniß der Volume von zwei Prismen (Cylindern) ist das Product der Verhältnisse ihrer Basen und ihrer Höhen.

Beweis. Die Prismen $p$ und $p'$ haben die Basen $b$ und $b'$, und die Höhen $h$ und $h'$. Man construire ein Prisma $q$ auf der Basis $b'$ mit der Höhe $h$. Dann hat man

$$p : q = b : b' \ (3), \quad q : p' = h : h' \ (4)$$

folglich durch Multiplication (Algebra §. 1, 3)

$$p : p' = (b : b')(h : h').$$

Anmerkung. Wenn die Verhältnisse der Basen und der Höhen von zwei Prismen reciprok sind, so haben die Prismen gleiche Volume. Eucl. XI, 34.

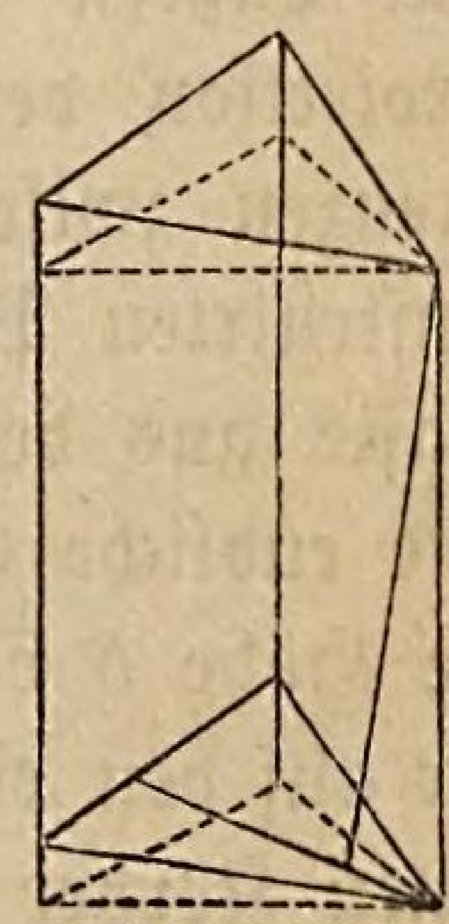
6. Das Volum eines Körpers wird durch sein Verhältniß zur **Volumeinheit** angegeben. Als Volumeinheit wird gewöhnlich eine **Cubikeinheit** gebraucht, d. h. ein Cubus, dessen Kanten Längeneinheiten und dessen Flächen demnach Quadrateinheiten sind. Denn ein Cubus ist durch eine Kante bestimmt, und gehört zu den Prismen, deren Volum-Verhältnisse nach (5) gefunden werden. Die Angabe des Volums eines Körpers heißt deshalb die **Cubatur** desselben.

Wenn man abkürzend Größe für ihr Verhältniß zur Einheit sagt (vergl. Planim. §. 10, 4), also Höhe für ihr Verhältniß zur Längeneinheit, Basis für ihr Verhältniß zur Quadrateinheit, Körper für sein Verhältniß zur Cubikeinheit, so hat man (5)

Prisma = Basis × Höhe

Parallelepiped = Länge × Breite × Höhe

Cubus = (Kante)$^3$



Wenn man durch die Endpuncte einer Längenkante eines Prisma Normalschnitte construirt, so erhält man zwischen denselben ein Prisma, welches mit dem gegebenen Prisma von gleichem Volum ist (1). Daher ist auch

Prisma = Normalschnitt × Längenkante

folglich durch Vergleichung beider Cubaturen

Normalschnitt : Basis = Höhe : Längenkante*)

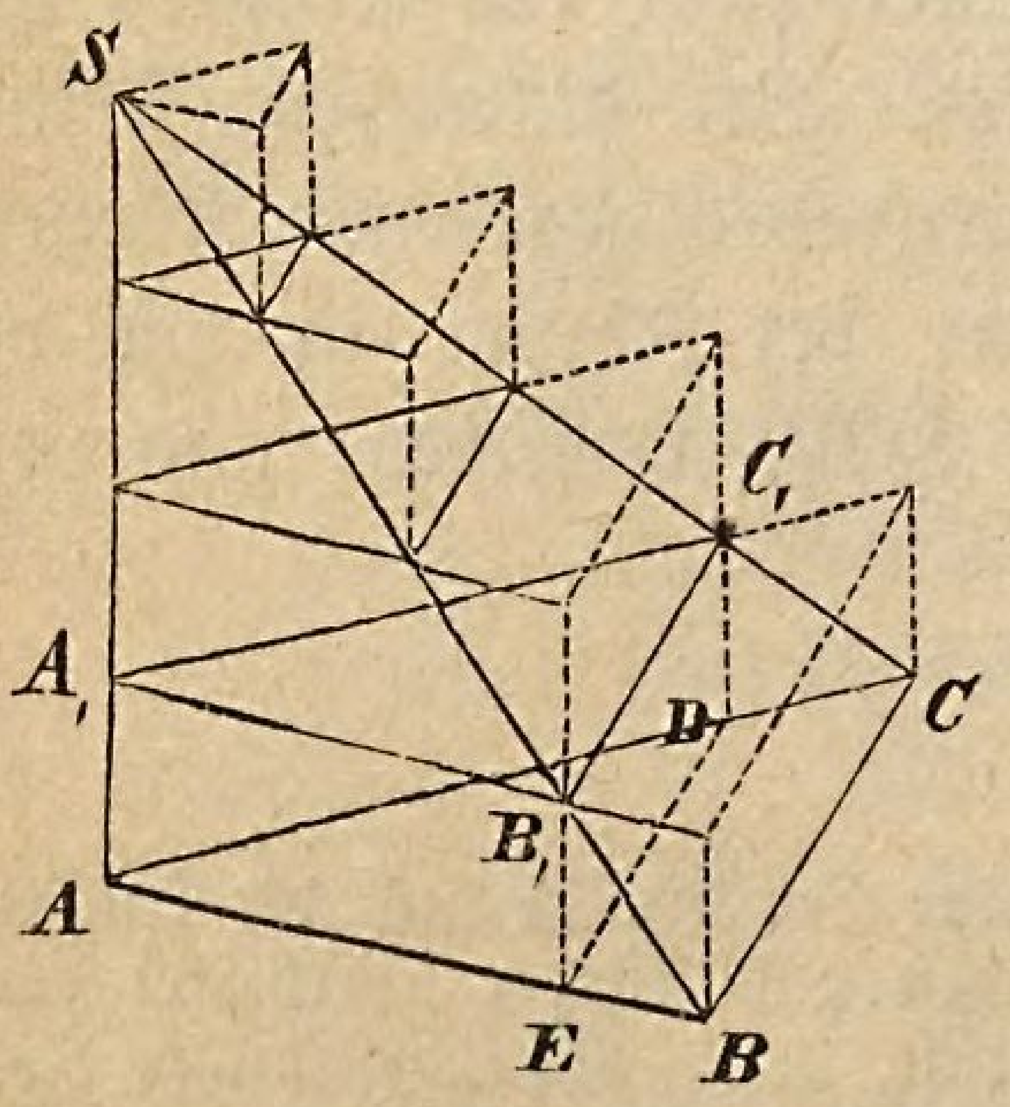
7. Ein Körper von beliebiger Oberfläche werde durch parallele Ebenen von beliebiger Stellung und Anzahl in Schichten von gleicher Höhe zerschnitten. Man construire in den einzelnen Schichten Prismen, indem man durch parallele Gerade jeden Querschnitt des Körpers auf die Ebene des folgenden Querschnitts projicirt. Bei hinreichend kleiner Höhe der einzelnen Schichten ist die Differenz des gegebenen Körpers und der Summe aller Prismen beliebig klein; der Körper ist von der Summe der Prismen bei unendlich kleiner Höhe derselben nicht verschieden.**)

*) Vergl. unten Trigon. §. 6, 2.

**) Nachdem der Platonischen Schule die Quadratur des Kreises und die Cubatur der Pyramide gelungen war, hat **Archimedes** Flächen und Körper überhaupt durch Summen von Parallelogrammen und Prismen begrenzt, d. h. als „bestimmte Integrale" aufgefaßt, die er in vielen Fällen zu berechnen vermochte (vergl. §. 9). Die hieraus fließende Berechtigung, eine Fläche oder einen Körper als Summe von unendlich vielen unendlich schmalen Parallelogrammen oder Prismen zu betrachten, wurde im 17ten Jahrhundert durch **Keppler** (Stereometria doliorum 1615), **Cavalieri** (Geometria indivisibilibus continuorum promota 1635. Vergl. **Klügel** math. W. I p. 416), **Fermat** u. A. mehr und mehr anerkannt, und hat bei der Erfindung der Analysis des Unendlichen den angemessenen Ausdruck erhalten.

Beweis. Der Abstand der ersten und der letzten Ebene werde durch die übrigen parallelen Ebenen in $n$ gleiche Theile $\delta$ getheilt, so daß $\delta$ bei hinreichend großem $n$ beliebig klein wird. Die Zone der zwischen zwei folgenden Querschnitten $u$, $u'$ enthaltenen Körperschicht werde durch parallele Gerade auf die Ebene $u'$ projicirt: die Projection der Zone ist ein Ring, dessen Breite überall verschwindet, wenn die Höhe $\delta$ verschwindet. Gewisse Projicirende der Zone bilden ein Prisma (Cylinder), das von der Körperschicht ganz eingeschlossen wird, andre bilden ein Prisma, von dem die Körperschicht ganz eingeschlossen wird, so daß die Basis $u$ der Körperschicht nicht kleiner ist als die Basis des innern Prisma und nicht größer als die Basis des äußern Prisma. Die Differenz zwischen der Schicht des Körpers und dem in derselben Schicht die Basis $u$ projicirenden Prisma ist kleiner als die Differenz zwischen dem äußern und innern Prisma d. i. kleiner als ein Prisma, das die Projection der Zone zur Basis hat. Daher ist die Summe der Differenzen zwischen den einzelnen Körperschichten und den in denselben construirten Prismen kleiner als ein Prisma von der Höhe $\delta$, dessen Basis aus den Projectionen der Zonen aller Körperschichten besteht und eine endliche Größe hat. Das Volum dieses Prisma verschwindet, wenn die Höhe $\delta$ verschwindet. Also ist die Differenz zwischen der Summe der auf den einzelnen Querschnitten construirten Prismen und dem gegebenen Körper bei unendlich großer Menge der Querschnitte von Null nicht verschieden.

Z. B. Bei der dreiseitigen Pyramide $ABCS$ sind die einzelnen Querschnitte parallel mit der Basis $ABC$, und durch Parallelen mit der Kante $AS$ auf die folgenden Ebenen projicirt. Die Differenz zwischen der ersten Schicht der Pyramide und dem in derselben Schicht stehenden Prisma ist kleiner als das Prisma von derselben Höhe $\delta$, dessen Basis die Projection $BCDE$ der Zone $BCC_1B_1$ auf die Ebene eines Querschnitts ist. U. s. w. Die Summe der Differenzen zwischen den einzelnen Schichten der Pyramide und den in denselben construirten Prismen ist folglich kleiner als ein Prisma von der Höhe $\delta$, dessen Basis die Projection der Fläche $BCS$ auf die Ebene eines Querschnitts ist. Dieses Prisma ist von dem auf der Basis stehenden Prisma nicht verschieden, und verschwindet zugleich mit seiner Höhe $\delta$.

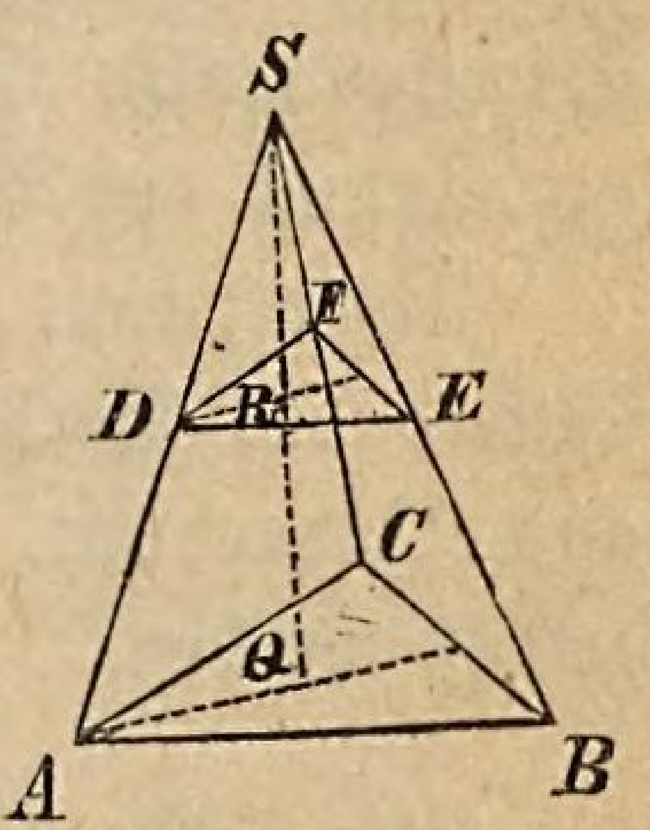


**8.** Wenn zwei Körper auf einer Ebene stehn und bis an dieselbe parallele Ebene reichen, und wenn auf diesen wie auf allen dazwischen liegenden parallelen Ebenen die Querschnitte beider Körper dasselbe Verhältniß $m$ haben, so haben auch die Volume der Körper das Verhältniß $m$.*)

Beweis. Man theile die Schicht zwischen der ersten und letzten Ebene in Schichten von gleicher Höhe, und construire in allen Schichten auf den Querschnitten der beiden Körper Prismen, wie (7) angegeben worden. Die Prismen des ersten Körpers haben der Reihe nach zu den Prismen des zweiten Körpers das Verhältniß $m$, weil nach der Voraussetzung ihre Basen dieses Verhältniß haben, und nach der Construction ihre Höhen gleich sind (3). Also hat auch die Summe der Prismen des ersten Körpers zu der Summe der Prismen des zweiten Körpers das Verhältniß $m$. Bei unendlicher Anzahl der Schichten unterscheiden sich aber die Summen der Prismen nicht von den Körpern (7).

**9.** Wenn zwei Pyramiden (Kegel) gleiche Höhen haben, so ist das Verhältniß ihrer Volume dem Verhältniß ihrer Basen gleich. Eucl. XII, 5.**)

Beweis. Die Pyramide $ABCS$, deren Höhe $QS$, wird durch eine mit der Basis parallele Ebene geschnitten, deren Abstand von der Spitze $RS$. Der Querschnitt $DEF$ ist der Basis $ABC$ ähnlich (§. 5, 1), also hat man $DEF : ABC = (DE : AB)^2 = (DS : AS)^2 = (RS : QS)^2$. Bei der zweiten Pyramide, deren entsprechende Stücke durch dieselben accentuirten Buchstaben bezeichnet werden, hat man ebenso




$$D'E'F' : A'B'C' = (R'S' : Q'S')^2$$

Wenn nun $QS = Q'S'$, $RS = R'S'$, so ist $DEF : ABC = D'E'F' : A'B'C'$ oder $DEF : D'E'F' = ABC : A'B'C'$, folglich (8) das Verhältniß der Pyramiden $= ABC : A'B'C'$.

**10.** Eine Pyramide (Kegel) ist der dritte Theil eines Prisma (Cylinder), das mit ihr gleiche Basis und gleiche Höhe hat***), so daß (6)

$$\text{Pyramide} = \tfrac{1}{3}\,\text{Basis} \times \text{Höhe}$$

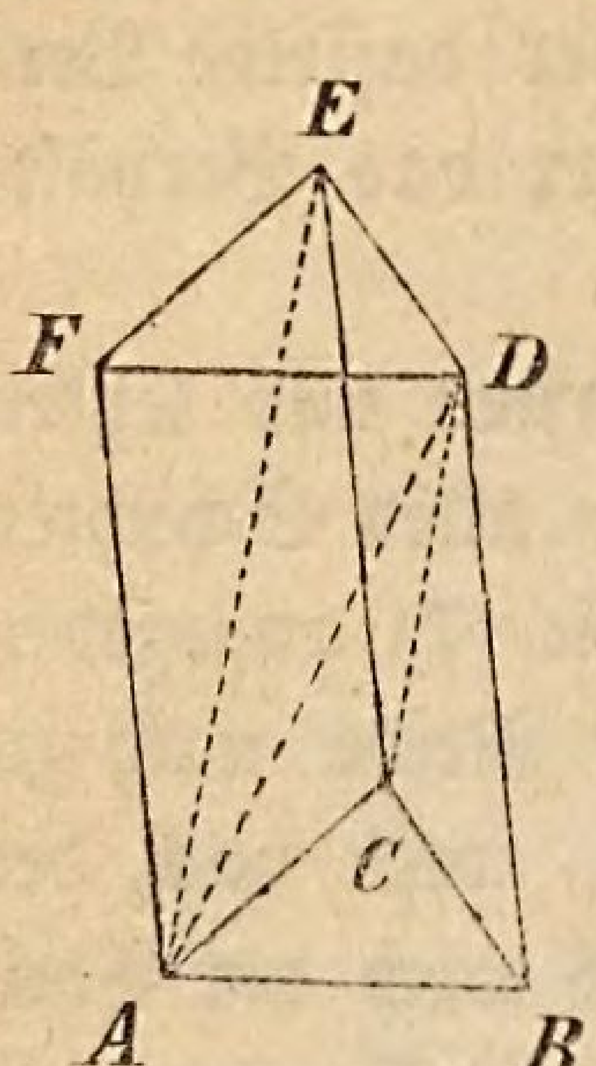
---

*) Cavalieri geometria indivisibilibus continuorum promota. II, 4.

**) Es ist auf keine Weise gelungen, zwei Pyramiden von gleichen Basen und Höhen so zu zerlegen, daß die Gleichheit der Volume aus der Congruenz der Theile ersichtlich wäre.

***) Eucl. XII, 7. Die Cubatur der Pyramide ist zuerst von Eudoxus, einem

Beweis. Das dreiseitige Prisma *ABCDEF* wird durch die Diagonaldreiecke *ACD* und *ADE* in die dreiseitigen Pyramiden *ABCD*,




*DAEC* und *ADEF* zerlegt. Nun ist die Pyramide *ABCD* sowohl der Pyramide *AEDC*, als auch der Pyramide *ADEF* an Volum gleich, weil die erste und zweite die gleichen Basen *BCD* und *EDC* und gleiche Höhen, die erste und dritte die gleichen Basen *ABC* und *DEF* und gleiche Höhen haben (9). Also ist die Pyramide *ABCD* der dritte Theil des Prisma *ABCDEF*.

Daß eine mehrseitige Pyramide der dritte Theil eines Prisma ist, welches mit ihr die Basis und die Höhe gemein hat, erkennt man durch Zerlegung der gegebenen Pyramide in dreiseitige Pyramiden.

**11.** Das Verhältniß von zwei Pyramiden wird eben so berechnet, wie das Verhältniß der dreimal so großen Prismen, welche mit ihnen gleiche Basen und gleiche Höhen haben; man multiplicirt das Verhältniß der Basen mit dem Verhältniß der Höhen (5).

Wenn die Pyramiden ähnlich sind (§. 6, 17), so sind die Basen ähnliche Planfiguren und die Höhen entsprechende Strecken. Das Verhältniß der Basen ist das Quadrat des Verhältnisses entsprechender Strecken; also ist das Verhältniß der Volume von ähnlichen Pyramiden der Cubus des Verhältnisses von entsprechenden Strecken. Eucl. XII, 8.

Ueberhaupt ist das Verhältniß der Volume ähnlicher Körper der Cubus des Verhältnisses entsprechender Strecken, weil ähnliche Körper aus Tetraedern, von denen die entsprechenden ähnlich sind, zusammengesetzt werden.

**12.** Ein Tetraeder ist der dritte Theil des ihm so umgeschriebenen Parallelepipeds (§. 6, 7), daß die gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders auf den gegenüberliegenden Flächen des Parallelepipeds liegen.*) Denn jede Fläche des Tetraeders schneidet von dem Parallelepiped eine Pyramide ab, die den dritten Theil des halben Parallelepipeds beträgt, z. B. $ABCD' = \frac{1}{3}ABD'B'CA' = \frac{1}{6}AD'BC'B'CA'D$.

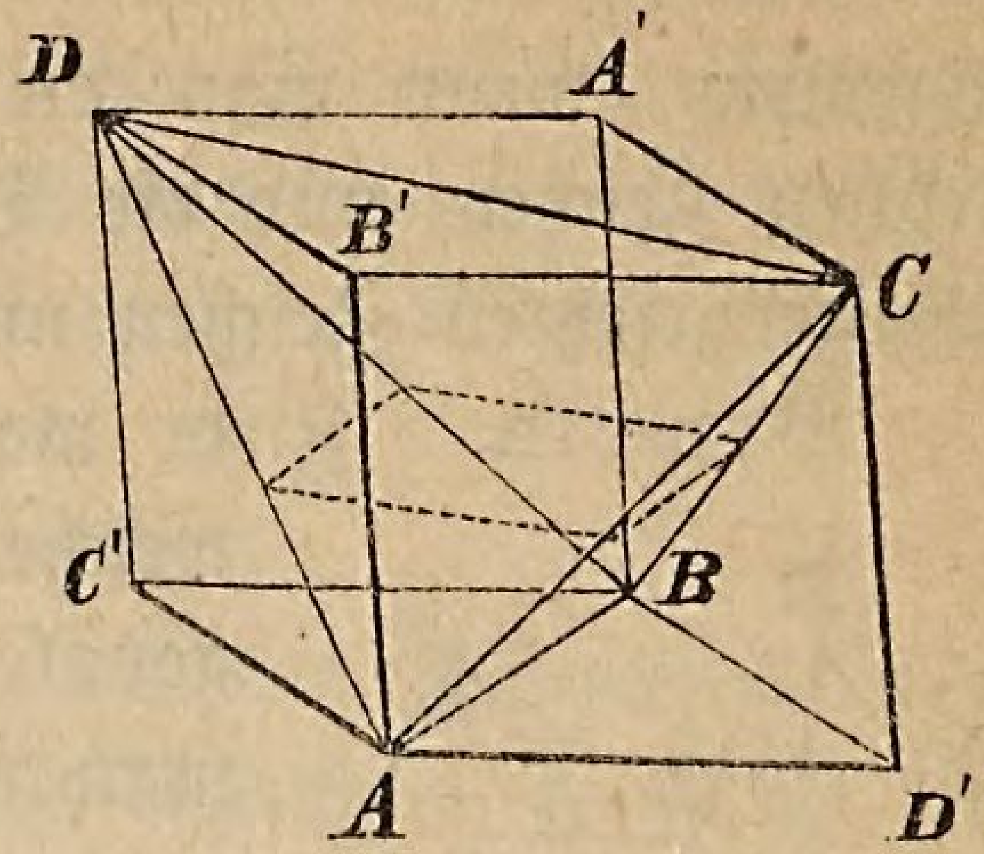
Das Volum eines Tetraeders bleibt unverändert, so lange als von zwei gegenüberliegenden Kanten die Längen, die Richtungen und der Abstand unverändert bleiben.

---

Zeitgenossen Plato's, vollbracht worden, wie Archimedes berichtet in der Einleitung des ersten Buchs von der Kugel und dem Cylinder.

*) Monge Corresp. sur l'éc. polyt. I p. 441.

Der Abstand der gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders $AB$ und $CD$ ist die Höhe des Parallelepipeds, wenn man das Parallelogramm $AD'BC'$ zur Basis nimmt. Nun ist der Mittelschnitt des Tetraeders, dessen Ebene mit $AB$ und $CD$ parallel ist und die zwischen ihnen enthaltene Schicht halbirt, halb so groß als das Parallelogramm $AD'BC'$, weil die Hälfte von jenem und der vierte Theil von diesem congruent sind. Also ist das Tetraeder $\frac{2}{3}$ des Products aus dem Abstand von zwei gegenüberliegenden Kanten und dem mit ihnen parallelen Mittelschnitt des Tetraeders.*)




**13.** Wenn zwei Tetraeder $ABCP$, $ABCQ$ die Basis gemein haben, so wird die Strecke $PQ$ von der Ebene $ABC$ in $R$ nach dem Verhältniß der Tetraeder getheilt. Denn $PR : QR$ ist dem Verhältniß der Höhen der Tetraeder und dieses dem Verhältniß der Volume gleich.

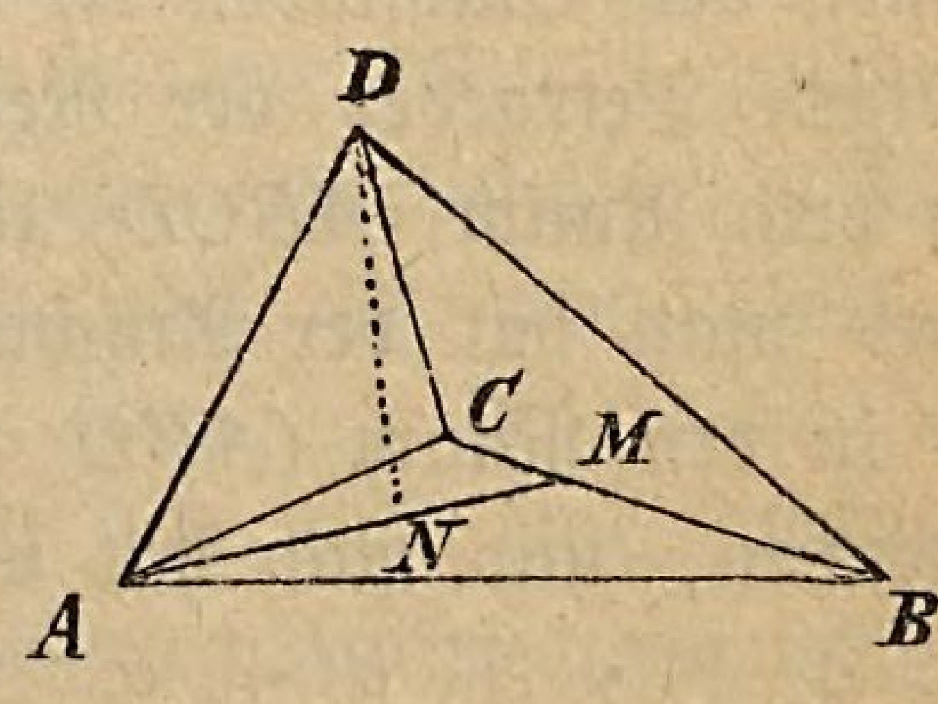
Eine Kante des Tetraeders wird von der Ebene, die den gegenüberliegenden Flächenwinkel halbirt, nach dem Verhältniß der Flächen getheilt, welche den Flächenwinkel einschließen.**) Die Ebene, welche den Flächenwinkel $B\overline{AD}C$ halbirt, schneide die Kante $BC$ in $M$, dann hat $M$ von den Ebenen $BAD$ und $DAC$ gleiche Abstände, während $BM$ und $CM$ sich verhalten wie die Abstände der Puncte $B$ und $C$ von der Ebene $DAM$. Daher ist

$$BM : MC = DABM : DAMC = BAD : DAC$$

Wenn die Fläche $ABC$ von der Axe des Rotationskegels, welcher der gegenüberliegenden Ecke eingeschrieben ist (§. 5, 3), in $N$ geschnitten wird, so ist

$$ABN : BCN : CAN = ABD : BCD : CAD$$

Denn die Dreiecke $ABN$, .. verhalten sich wie die gleichhohen Tetraeder $ABND$, .., während $N$ von den Flächen $ABD$, $BCD$, $CAD$ gleiche Abstände hat.




**14.** Wenn $AB$, $AC$, $AD$ die von einer Ecke ausgehenden Kanten eines Parallelepipeds sind, wenn von derselben Ecke die Diagonale $AF$

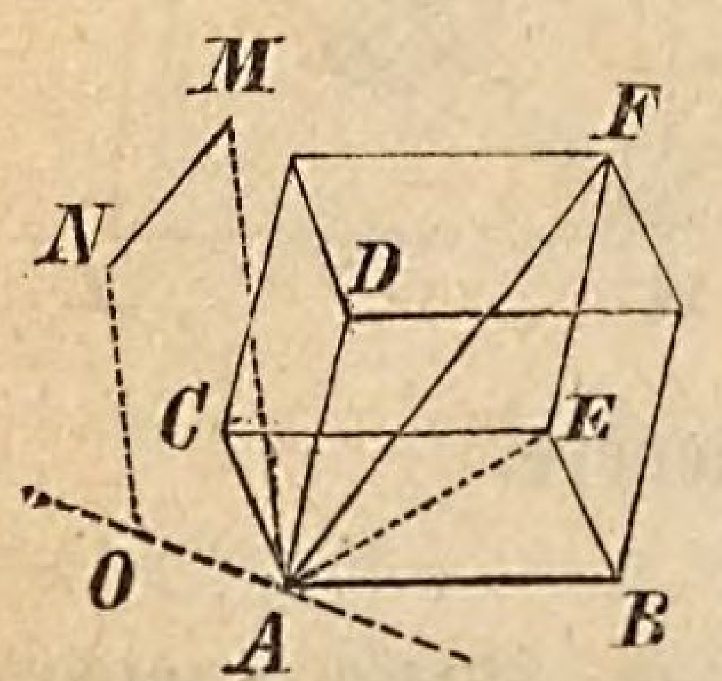
*) Vergl. unten. Trigon. §. 6, 17.
**) Gerg. Ann. 3 p. 317.

ausgeht, und eine beliebige Strecke durch $MN$ bezeichnet wird, so gilt die Gleichung der Tetraeder

$$MNAF = MNAB + MNAC + MNAD$$

allgemein, wenn man die Tetraeder von einerlei Sinn (§. 6, 11) mit gleichen Zeichen, und die Tetraeder von entgegengesetztem Sinn mit den entgegengesetzten Zeichen nimmt.*)

Beweis. Zieht man durch $N$ die mit $MA$ parallele Gerade, welche die Ebene $ABC$ in $O$ schneidet, und die Diagonale $AE$ des Parallelogramms $CABE$, so hat man nach Varignon's Lehrsatz (Planim. §. 9, 8)




$$OAB + OAC = OAE$$

folglich für die Pyramiden von gleicher Höhe

$$MOAB + MOAC = MOAE$$

deren Zeichen nach den Zeichen der Dreiecke $OAB$, $OAC$, $OAE$ bestimmt werden. Nun ist $MOA = MNA$, u. s. w., also auch

$$MNAB + MNAC = MNAE$$

Eben so hat man in Bezug auf das Parallelogramm $DAEF$

$$MNAE + MNAD = MNAF$$

daher durch Addition

$$MNAB + MNAC + MNAD = MNAF$$

15. Für die durch 5 Puncte bestimmten Tetraeder, welche ihrem Sinn gemäß positiv oder negativ sind (14), gilt die Gleichung**)

$$ABCD = ABCO + BADO + ACDO + CBDO$$

Beweis. Die 15 Räume, in deren einem der Punct $O$ liegt, werden nach der in §. 6, 3 angegebenen Weise durch vier, drei, zwei, einen der Buchstaben $A$, $B$, $C$, $D$ bezeichnet, die absoluten Werthe der obigen Tetraeder der Reihe nach durch $\tau$, $\delta$, $\gamma$, $\beta$, $\alpha$. Wenn nun $O$ in dem Raum $(ABCD)$ liegt, so sind alle Tetraeder von einerlei Sinn, und man hat der Anschauung gemäß $\tau = \delta + \gamma + \beta + \alpha$. Geht $O$ in den Raum $(ABC)$ über, so wechselt das Tetraeder $ABCO$ sein Zeichen, und man hat in Uebereinstimmung mit der Anschauung $\tau = -\delta + \gamma + \beta + \alpha$. Geht $O$ aus $(ABC)$ in den Raum $(AB)$ über, so wechselt $BADO$ das Zeichen, und man hat der Anschauung gemäß $\tau = -\delta - \gamma + \beta + \alpha$. Geht $O$ aus $(AB)$ in den Raum $(A)$ über, so wechselt $ACDO$ das Zeichen und man hat $\tau = -\delta - \gamma - \beta + \alpha$,

*) Möbius Statik §. 63.
**) Möbius baryc. Calc. 20. Vergl. Monge J. de l'Éc. polyt. Cah. 15 p. 68.

so daß die aufgestellte Gleichung in allen Fällen mit der Anschauung in Uebereinstimmung bleibt.

Anmerkung. Wenn insbesondere der Punct $O$ das Centrum der dem Tetraeder $ABCD$ eingeschriebenen Kugel ist (§. 3, 12), wenn der Radius dieser Kugel $r$ Längeneinheiten, und die den Spitzen $A$, $B$, $C$, $D$ gegenüberliegenden Flächen des Tetraeders $a$, $b$, $c$, $d$ Quadrateinheiten haben, so ist*)

$$\tau = \tfrac{1}{3}(a + b + c + d)r$$

Wenn man durch $r_1$, $r_2$, $r_3$, $r_4$ die Radien der den Räumen $(CBD)$, $(ACD)$, $(BAD)$, $(ABC)$ eingeschriebenen Kugeln bezeichnet, so erhält man auf dieselbe Weise

$$\tau = \tfrac{1}{3}(- a + b + c + d)r_1, \text{ u. s. w.}$$

Wenn dem Raum $(AB)$ eine Kugel sich einschreiben läßt, deren Radius durch $r_5$ bezeichnet wird, so ist

$$\tau = \tfrac{1}{3}(a + b - c - d)r_5$$

u. s. w. Aus diesen Formeln findet man

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}, \text{ u. s. w.**)}$$

**16.** Wie man bei einem planen Polygon die rechte und linke (helle und dunkle) Seite seines Perimeters unterscheidet (Planim. §. 9, 10), so hat man bei einem Polyeder die äußere und innere Seite seiner Oberfläche zu unterscheiden. Um die Anschauung zu unterstützen, überziehe man eine Seite der Oberfläche (die Außenseite) ganz mit heller Farbe, indem man von einer Fläche des Polygons auf eine folgende über die gemeinschaftliche Kante fortschreitet, und lasse die andre Seite der Oberfläche (die Innenseite) dunkel. Wenn eine Fläche des Polyeders aus Zellen von verschiedenen Zeichen besteht, so trete man beim Uebergang aus einer gefärbten Zelle in eine entgegengesetzt bezeichnete zugleich auf die andre Seite der Fläche über und setze daselbst die Färbung fort. Unter den Polyedern, welche sich selbst schneiden, giebt es jedoch auch außerordentliche (von Möbius entdeckte), bei denen die äußern und innern Seiten ihrer Oberflächen sich nicht unterscheiden, dergestalt daß nach Vollendung der vorgeschriebenen Färbung ein solches Polyeder auf beiden Seiten gefärbt ist.***)

Bei jedem Polyeder, das nicht zu den Möbius'schen gehört, können

---

*) Lagrange sur le pyr. 24 (Mém. de Berlin 1773).

**) Steiner in Gerg. Ann. 19 p. 93 und Crelle J. 2 p. 97.

***) Möbius hat in den Berichten der Sächs. Ges. d. W. 1865 p. 31 diese Entdeckung mitgetheilt und die folgenden Sätze bewiesen.

die einzelnen Flächen durch ihre Perimeter so ausgedrückt werden, daß jede Kante als Seite von zwei folgenden Flächen entgegengesetzte Ausdrücke erhält (Gesetz der Kanten). Dazu ist es erforderlich und genügend, daß bei allen Flächen die Umdrehungen, welche durch die Ausdrücke der Perimeter angezeigt werden, für auf einerlei Seiten der Flächen stehende Betrachter einerlei Sinnes sind. Wenn z. B. ein Tetraeder die Ecken $A$, $B$, $C$, $D$ hat und eine Fläche desselben durch $ABC$ ausgedrückt wird, so muß die durch die Puncte $A$, $B$, $D$ bestimmte Fläche den Ausdruck $BAD$ (nicht $ABD$) erhalten, damit die Umdrehungen $ABC$, $BAD$ für außen auf den Flächen stehende Betrachter einerlei Sinnes sind; den übrigen Flächen gebühren die Ausdrücke $ACD$, $CBD$. In der That hat die durch $A$ und $B$ begrenzte Kante als Seite der Fläche $ABC$ den Ausdruck $AB$, als Seite der Fläche $BAD$ den entgegengesetzten Ausdruck $BA$, u. s. w., so daß dem Gesetz der Kanten genügt ist. Die Flächen eines durch die gleichen und parallelen Kanten $AA'$, $BB'$, $CC'$ bestimmten Prisma haben die dem Gesetz der Kanten entsprechenden Ausdrücke $ABC$, $ACC'A'$, $CBB'C'$, $BAA'B'$, $C'B'A'$. U. s. w.

Die Pyramide, deren Basis eine Fläche des Polyeders und deren Spitze ein beliebiger Punct des Raumes ist, habe einen positiven oder einen negativen Werth, je nachdem die Spitze auf der innern (dunkeln) oder auf der äußern (hellen, gefärbten) Seite der Fläche liegt. Unter dieser Voraussetzung ist die Summe der Pyramiden, welche eine gemeinschaftliche Spitze haben, und deren Basen die Flächen eines Polyeders sind, von dem Ort der Spitze unabhängig.

Beweis. Man bezeichne die Pyramiden, deren Basen die Flächen $a$, $b$, . . des Polyeders und deren Spitzen die beliebigen Puncte $O$, $P$ sind, durch $Oa$, $Ob$, . ., $Pa$, $Pb$, . ., und die Flächen durch ihre Perimeter z. B. $a$ durch $ABC$ . . so, daß dem Gesetz der Kanten genügt wird. Wenn die Differenz $Oa - Pa$ nicht verschwindet, wenn also die Ebene der Fläche $a$ von der Geraden $OP$ in $Q$ geschnitten wird, so ist $a = QAB + QBC + ..$ (Planim. §. 9, 10), und nach Multiplication mit dem 3ten Theil. der Höhe der Pyramide

$$Oa = OQAB + OQBC + ..$$
$$Pa = PQAB + PQBC + ..$$

Nun ist $OQ - PQ = OP$, $OQA - PQA = OPA$, $OQAB - PQAB = OPAB$, folglich

$$Oa - Pa = OPAB + OPBC + ..$$

Die Summe aller Differenzen $Oa - Pa + Ob - Pb + ..$ ist demnach der Summe der Tetraeder gleich, welche zu gegenüberliegenden Kanten die gemeinschaftliche Kante $OP$ und je eine Seite der Polygone

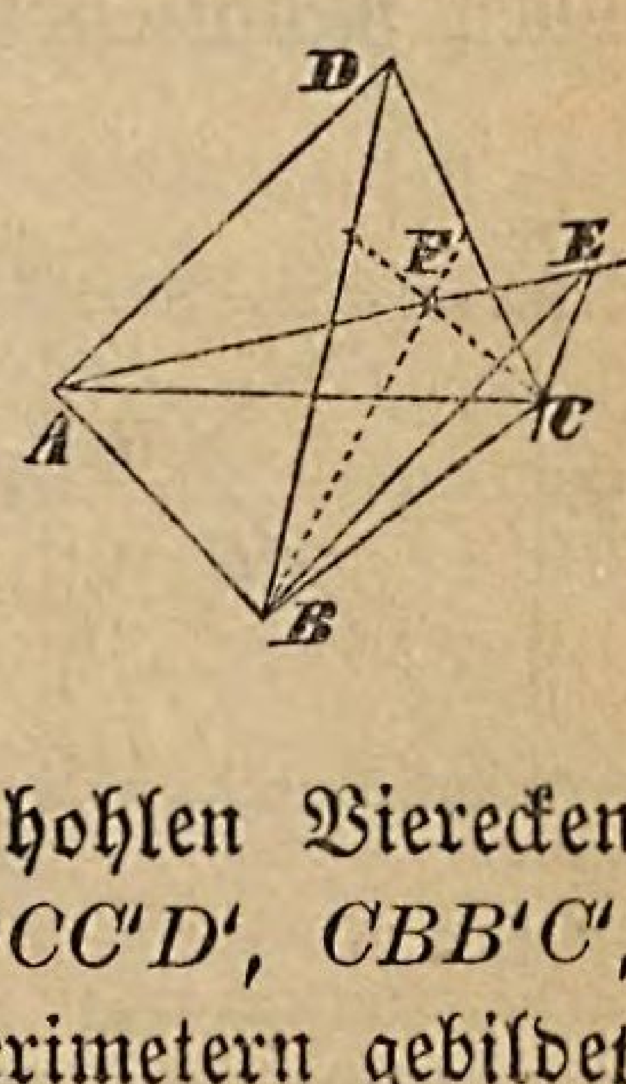
haben, welche die Flächen des Polyeders sind. Nach dem Gesetz der Kanten kommt aber in dieser Summe neben jedem Tetraeder wie $OPAB$ auch das entgegengesetzte $OPBA$ vor. Also verschwindet die Summe der Differenzen, und die Summe der Pyramiden $Pa + Pb + ..$ ist der Summe $Oa + Ob + ..$ gleich.

Anmerkung. Wenn das Polyeder zu den außerordentlichen (Möbius'schen) gehört, so kommt in der Summe $Oa + Ob + ..$ jede Pyramide zweimal vor, einmal positiv, das andremal negativ, und die Summe verschwindet identisch.

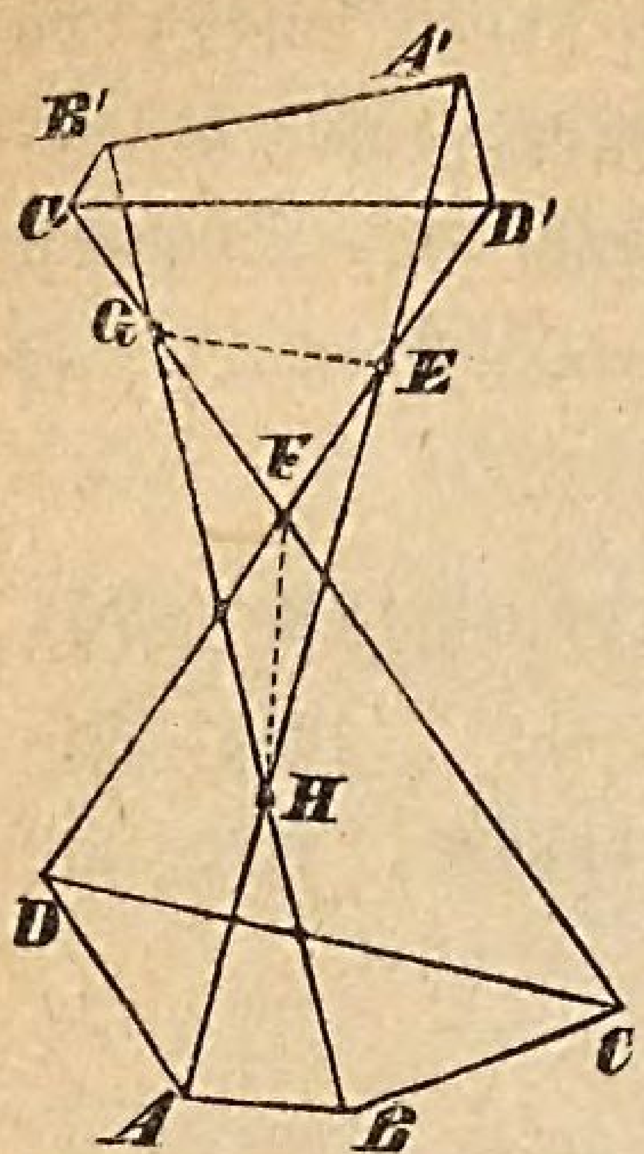
17. Die von dem Ort der Spitze $O$ unabhängige Summe $\Sigma$ von Pyramiden $Oa + Ob + ..$ (16) ist bei einem Polyeder, dessen Oberfläche sich selbst nicht schneidet, dem Volum des Polyeders gleich.

Beweis. Eine Gerade schneidet im Allgemeinen eine gerade Anzahl Flächen eines Polyeders, dessen Oberfläche sich selbst nicht schneidet, z. B. der Reihe nach die Flächen $f_1, f_2, f_3, ..$ in $G_1, G_2, G_3, ...$ Wählt man die Spitze $O$ auf derselben Geraden so, daß $Of_1$ eine negative Pyramide der Summe $\Sigma$ ist, so ist $Of_2$ positiv, $Of_3$ negativ, u. s. w. Ein unendlich kleiner Raum auf der äußern Strecke $OG_1$ gehört zu allen Pyramiden $Of_1, Of_2, ..$, deren es eine gerade Anzahl giebt, und kommt demnach in der Summe $\Sigma$ nicht vor. Ein unendlich kleiner Raum auf der innern Strecke $G_1 G_2$ gehört zu allen Pyramiden $Of_2, Of_3, ..$, deren es eine ungerade Anzahl giebt, und ist demnach ein einfach positiver Bestandtheil der Summe $\Sigma$; u. s. w. Also umfaßt die Summe $\Sigma$ alle Theile des innern Raumes (und nur diese) einfach positiv.

Das Volum eines mehrzelligen Polyeders, dessen Oberfläche sich selbst schneidet, wird durch die angegebene Summe von Pyramiden definirt. Z. B. für das von den Dreiecken $ABD$, $BCD$, $CAD$, $CBE$, $BAE$, $ACE$ gebildete fünfeckige Hexaeder findet man das Volum $ABCD + ACBE = ABCD - ABCE$, indem man die Spitze der Pyramiden in $A$ annimmt; oder $FABD + FCAD + FCBE = AFDB + ADFC - FBCE$, wenn man die Spitze der Pyramiden in den Durchschnitt $F$ der Kante $AE$ und der Fläche $BCD$ verlegt.




Für das achteckige Hexaeder, welches von den hohlen Vierecken $ABCD$, $D'C'B'A'$, und von den Vierecken $ADD'A'$, $DCC'D'$, $CBB'C'$, $BAA'B'$ mit sich selbst in $E$, $F$, $G$, $H$ schneidenden Perimetern gebildet wird, findet man das Volum




$$\begin{aligned} & OABCD && + OD'C'B'A \\ & + OADFH + OHFE && + OED'A' \\ & + ODCF + OFGE && + OEGC'D' \\ & + OCBHF + OFHG && + OGB'C' \\ & + OBAH + OHEG && + OGEA'B' \end{aligned}$$

d. i. die Summe der beiden äußern Zellen vermindert um die zwischenliegende Zelle.

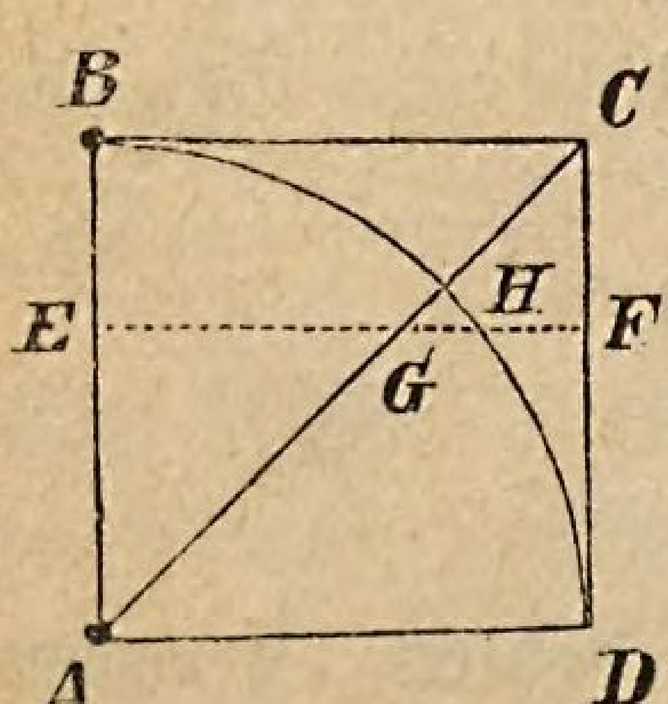
Anmerkung. Wenn die planen Polygone $a$, $b$, $c$, .. (zerstreut oder verbunden) gegeben sind, und jedes derselben auf einer Seite bezeichnet ist, so daß eine Pyramide, deren Basis das Polygon ist, einen positiven oder einen negativen Werth hat, je nachdem der Spitze die nichtbezeichnete oder die bezeichnete Seite der Ebene zugekehrt ist, so hat die Summe der Pyramiden $Oa + Ob + Oc + ..$ entweder einen von dem Ort der Spitze $O$ unabhängigen Werth, oder sie erhält einen solchen nach Hinzufügung einer bestimmten Pyramide $Op$. In dem letztern Falle bleibt die in Betracht gezogene Summe $Oa + Ob + Oc + ..$ unverändert, wenn die Spitze $O$ auf einer Ebene von bestimmter Stellung (parallel mit $p$) sich bewegt.*)

## §. 9. Cubatur der Kugel und anderer Körper.

1. Das Volum einer Kugel beträgt $\frac{2}{3}$ des umgeschriebenen Cylinders, dessen Basis ein Hauptkreis und dessen Höhe ein Diameter ist. Daher**)

Volum der Kugel $= \frac{2}{3}$ Hauptkreisfläche $\times$ Diameter
$= \frac{4}{3}\pi$ Cubikradien

Beweis. Wenn das Quadrat $ABCD$ um die Axe $AB$ rotirt, so beschreibt die Seite $CD$ einen Rotationscylinder, die Diagonale $AC$ einen Rotationskegel, der eingeschriebene Kreisquadrant $BD$ eine Halbkugel. Irgend eine Ebene, welche die Axe $AB$ normal in $E$ schneidet, schneidet die drei Flächen in concentrischen Kreisen, deren Radien $EF$, $EG$, $EH$ sind. Nun sind die Winkel $CAB$, $BCA$, $EGA$ gleich, also $EG = AE$; daher $EG^2 + EH^2 = AE^2 + EH^2 = AH^2 = AD^2 = EF^2$ nach dem Pythagoreischen Satz; folglich die Summe des Kegelschnitts $(\pi . EG^2)$ und des Kugelschnitts $(\pi . EH^2)$ gleich dem Cylinder-




*) Möbius Statik 56. Vergl. Planim. §. 9, 11 und §. 10, 8.

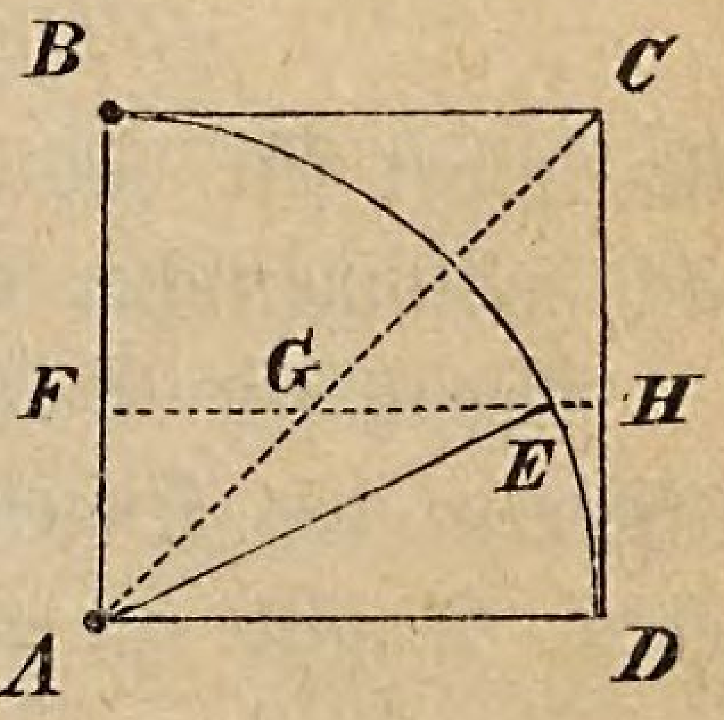
**) Die Ausmessung des Volums der Kugel und ihrer Oberfläche (Ausdruck der-

schnitt ($\pi . EF^2$). Vergl. Planim. §. 13. Aus der für alle Querschnitte der drei Körper, des Kegels, der Halbkugel und des Cylinders geltenden Gleichung schließt man nach §. 8, 8, daß die Summe des Kegels und der Halbkugel dem Cylinder gleich ist. Nun beträgt der Kegel $\frac{1}{3}$ des Cylinders (§. 8, 10), also die Halbkugel $\frac{2}{3}$ desselben, u. s. w.

2. Das Stück einer Fläche welches durch eine Ebene begrenzt wird, heißt eine Zone (ζώνη, calotte). Der Raum, welcher von einer Zone und von der sie begrenzenden Ebene eingeschlossen wird, heißt ein Körpersegment. Unter einem Kugelsector wird der Theil des Kugelvolums verstanden, welchen die Kugel von einem concentrischen Rotationskegel abschneidet. Sagitte eines Kreis-Bogens heißt (nach dem Gebrauch der Araber) die Strecke zwischen den Mitten des Bogens und seiner Sehne. Ebenso wird unter der Sagitte einer Kugelzone oder eines Kugelsegments oder eines Kugelsectors die Strecke zwischen dem sphärischen und planen Centrum des Kreises verstanden, welchen die Kugel mit der Ebene oder mit dem Rotationskegel gemein hat. Stücke von Flächen und Körpern, die zwischen zwei Flächen, insbesondere zwischen zwei parallelen Ebenen enthalten sind, werden ebenfalls Zonen und Segmente genannt.

Ein Kugelsector beträgt $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, dessen Basis ein Hauptkreis und dessen Höhe die Sagitte des Kugelsectors ist.*)

Beweis. Man ergänze den Kreissector $ABE$ zu dem Quadranten $ABD$, construire das umgeschriebene Quadrat $ABCD$ mit der Diagonale $AC$, und ziehe zu $AB$ die Normale $EF$, welche $AC$ in $G$, $CD$ in $H$ schneidet. Der durch Rotation des Kreissectors $ABE$ um die Axe $AB$ beschriebene Kugelsector, dessen Sagitte $BF$ ist, werde durch $(ABE)$ bezeichnet. Eben so bezeichne man das durch Rotation des Kreissegments $FBE$ um die Axe $FB$ beschriebene Kugelsegment durch $(FBE)$, u. s. w. Aus der in (1) aufgestellten Gleichung für die Querschnitte der drei Körper $(ABD)$, $(ABC)$, $(ABCD)$ schließt man nach §. 8, 8 die Gleichung der Volume $(FBE) + (FBCG) = (FBCH)$, folglich ist




---

selben durch die Fläche eines Hauptkreises) gehört zu den glänzenden Leistungen von Archimedes, und ist enthalten in dessen Schrift über Kugel und Cylinder I, 37. Kugel und Cylinder waren deshalb auf Archimedes' Grabmal zu Syracus gesetzt; an diesen Kennzeichen hat Cicero dasselbe wieder aufgefunden (Tusc. Qu. V, 23). Der hier gegebene Beweis des obigen Satzes scheint zuerst in Segner's Anfangsgr. d. Math. (§. 581 d. 2ten Aufl. 1773) vorzukommen.

*) Aus Archimedes Kugel und Cyl. I, 50 abgeleitet.

$$(FBE) = (FBCH) - (ABC) + (AFG)$$

Wegen des Zusammenhangs ihrer Basen hat man ferner die Gleichung der Kegel

$$(AFE) = (AFH) - (AFG)$$

Durch Addition dieser Gleichungen findet man

$$(ABE) = (FBCH) - (ABC) + (AFH)$$
$$= (FBCH) - (FBC)$$
$$= \tfrac{2}{3}(FBCH)$$

Denn die Kegel $(ABC)$ und $(AFH)$ haben gleiche Basen; der Kegel $(FBC)$ hat mit dem Cylinder $(FBCH)$ die Basis und die Höhe gemein.

Anmerkung. Wenn der Radius $r$, die Sagitte $s$ Längeneinheiten hat, so hat der Kugelsector $\frac{2}{3}\pi r^2 s$ Cubikeinheiten, auch in dem Falle daß die Sagitte den Radius übertrifft. Dann ist nämlich der Kugelsector die Differenz des Kugelvolums und des Kugelsectors, dessen Sagitte die gegebene Sagitte zu einem Diameter ergänzt. In der That ist

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 - \tfrac{2}{3}\pi r^2(2r - s) = \tfrac{2}{3}\pi r^2 s$$

Wenn die Sagitte ein Diameter wird, so geht der Kugelsector in das Volum der ganzen Kugel, und $\frac{2}{3}\pi r^2 s$ in $\frac{4}{3}\pi r^3$ über.

3. Wenn der Radius der Kugel $r$, die Sagitte $s$ Längeneinheiten hat, so beträgt das Kugelsegment $\pi r s^2 - \frac{1}{3}\pi s^3$ Cubikeinheiten.*)

Beweis. Die in (2) aufgestellte Gleichung

$$(FBE) = (FBCH) - (ABC) + (AFG)$$

gibt sofort für das gesuchte Volum $\pi r^2 s - \frac{1}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi(r - s)^3$ d. i. nach arithmetischer Entwickelung $\pi r s^2 - \frac{1}{3}\pi s^3$ Cubikeinheiten.

Wenn die Sagitte den Radius übertrifft, so ist das Segment die Differenz des Kugelvolums und des Segments, dessen Sagitte die gegebene Sagitte zu einem Diameter ergänzt. Es ist aber

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 - \pi r(2r - s)^2 + \tfrac{1}{3}\pi(2r - s)^3 = \pi r s^2 - \tfrac{1}{3}\pi s^3$$

Anmerkung. Auf dem angegebenen Wege bietet sich auch die Gleichung dar $(AFED) = (AFHD) - (AFG)$, aus der man unmittelbar für das zwischen einem Hauptkreis und einem Parallelkreis enthaltene Segment $\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi h^3$ Cubikeinheiten findet, wenn die Centren der Kreise einen Abstand von $h$ Längeneinheiten haben.

4. Das zwischen irgend zwei Kreisen enthaltene Segment einer Kugel ist die Differenz von zwei Kugelsegmenten, die im Allgemeinen

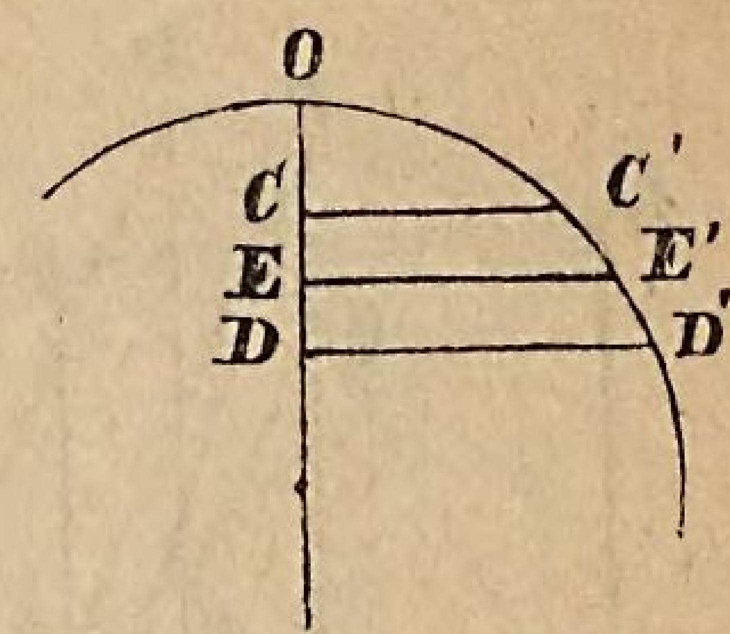
*) Archimedes Kugel und Cyl. II, 3.

nach (3) berechnet werden. Wenn die Sagitten der letztern $s$ und $t$ Längeneinheiten haben, so beträgt das Kugelsegment

$$\pi r(t^2 - s^2) - \tfrac{1}{3}\pi(t^3 - s^3)$$

Cubikeinheiten.

Wenn statt der Sagitten $OC$ und $OD$ deren Differenz $t - s = h$ und die Radien $CC' = a$, $DD' = b$ der Kreise gegeben sind, zwischen denen das Kugelsegment enthalten ist, so hat man




$$t^2 - s^2 = (t + s)h$$
$$t^3 - s^3 = h^3 + 3tsh$$
$$r(t^2 - s^2) - \tfrac{1}{3}(t^3 - s^3) = r(t+s)h - tsh - \tfrac{1}{3}h^3$$

Nun ist nach dem Pythagoreischen Satze

$$2rs = OC'^2 = a^2 + s^2,\ 2rt = OD'^2 = b^2 + t^2$$

folglich

$$2r(t + s) - 2ts = a^2 + b^2 + h^2$$

und das Kugelsegment

$$\pi r(t^2 - s^2) - \tfrac{1}{3}\pi(t^3 - s^3) = \tfrac{1}{2}\pi(a^2 + b^2)h + \tfrac{1}{6}\pi h^3$$

Ist $OE$ das arithmetische Mittel der Sagitten $OC$ und $OD$, und $EE'$ normal zu $OE$ bis an die Oberfläche gezogen, so soll der Kreis der Kugel, dessen Centrum $E$ und dessen Radius $EE' = \varrho$ ist, seiner Lage wegen der Mittelkreis des Kugelsegments genannt werden. Man hat aber nach dem Pythagoreischen Satze $OE.2r = OE'^2 = OE^2 + EE'^2$, also

$$r(t + s) = \varrho^2 + \tfrac{1}{4}(t + s)^2$$
$$r(t + s) - ts = \varrho^2 + \tfrac{1}{4}h^2$$

Daher ist das Kugelsegment*)

$$\pi r(t^2 - s^2) - \tfrac{1}{3}\pi(t^3 - s^3) = \pi\varrho^2 h - \tfrac{1}{12}\pi h^3$$

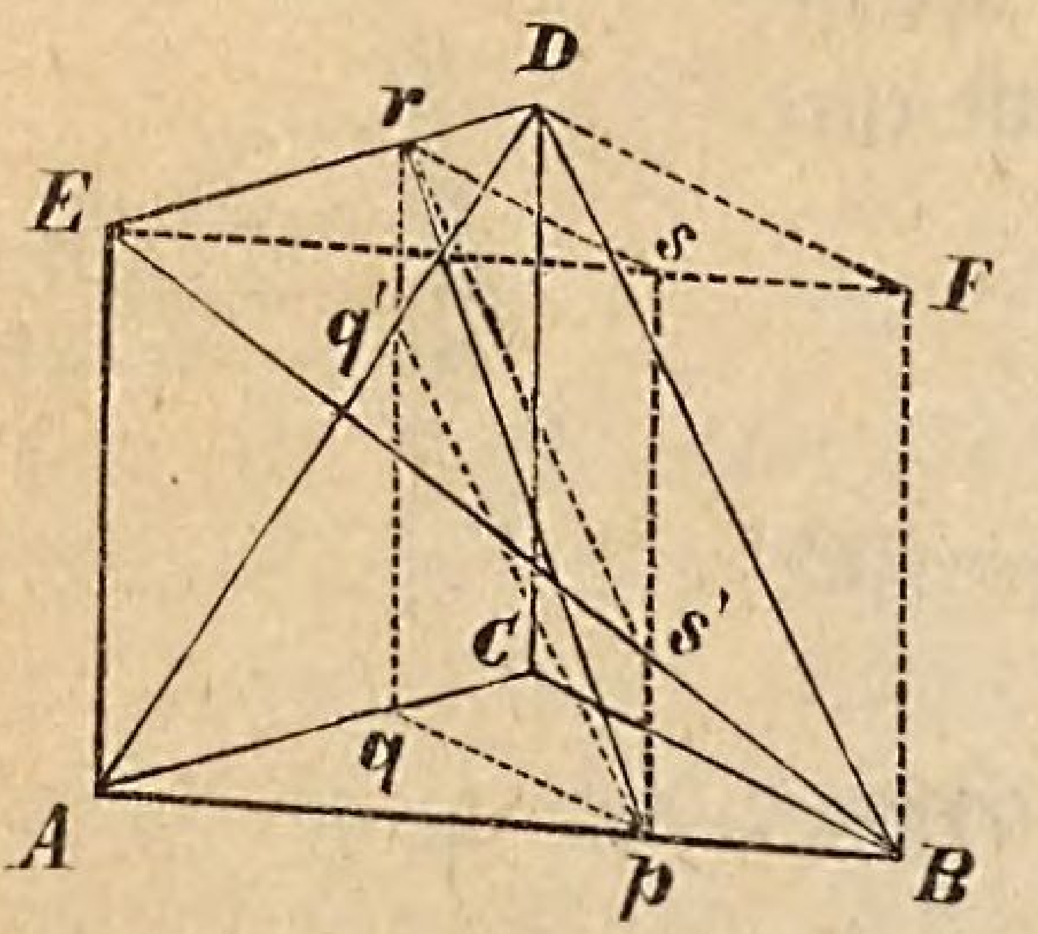
Die letzte Formel lehrt, daß Segmente verschiedener Kugeln gleiche Volume haben, wenn ihre Mittelkreise und ihre Sagittendifferenzen gleich sind.

5. Das zwischen parallelen Ebenen enthaltene Segment einer beliebigen geradlinigen Fläche kann durch zwei Cylinder und einen Kegel ausgedrückt werden. Zwischen den parallelen Ebenen construire man sowohl die Cylinder, deren Basen die auf den parallelen Ebenen liegenden Flächen des Segments sind, als auch den der geradlinigen Fläche beigeordneten Kegel, dessen Spitze auf einer der parallelen

*) Winkhaus Crelle J. 44 p. 375.

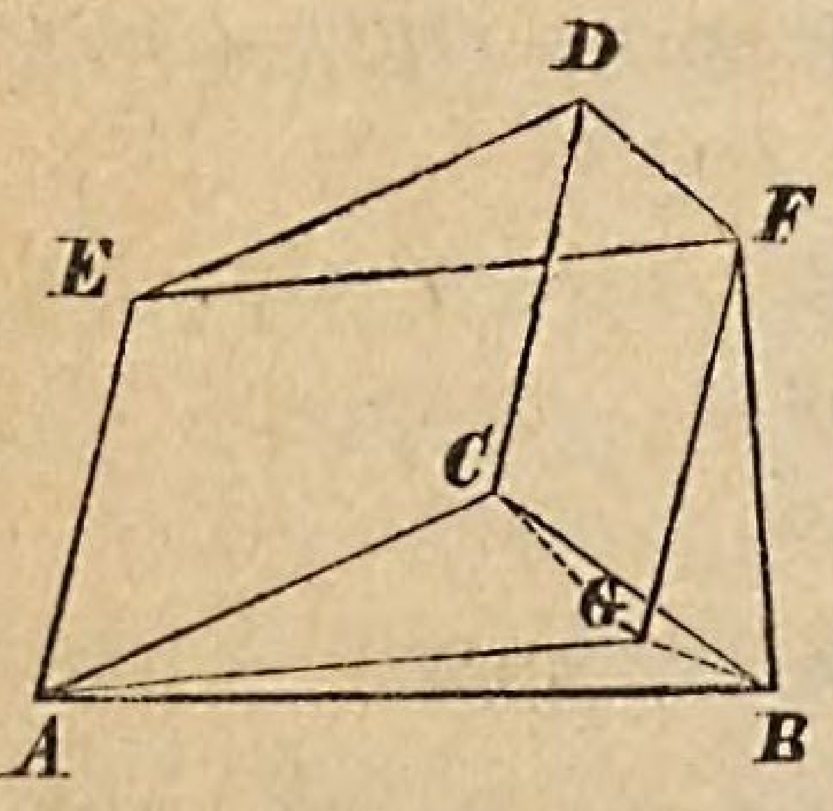
Ebenen liegt, und dessen Kanten der Reihe nach mit den Geraden der geradlinigen Fläche parallel sind. Das doppelte Körpersegment ist die Summe der beiden Cylinder vermindert um den beigeordneten Kegel.*)

Beweis. Ein Körpersegment sei begrenzt von den Dreiecken $ABC$ und $CBD$, von dem Parallelogramm $ACDE$ und von dem paraboloidischen Viereck $BAED$, dessen Gerade mit der Ebene $BCD$ parallel sind (§. 1, 8).




Ergänzt man dasselbe zu dem Prisma mit den parallelen Kanten $CD$, $AE$, $BF$, so erscheinen die Geraden des paraboloidischen Vierecks als Diagonalen von Parallelogrammen, wie $pqrs$, in denen das Prisma durch Ebenen geschnitten wird, die mit $BCDF$ parallel sind. Aus der Halbirung dieser parallelen Prismenschnitte durch ihre Diagonalen schließt man nach §. 8, 8, daß das Prisma durch das paraboloidische Viereck $BAED$ halbirt wird. Bezeichnet man den Abstand der Geraden $DE$ von der Ebene $ABC$ durch $h$, so ist das Prisma $= ABC.h$, folglich das gegebene Körpersegment $= \frac{1}{2}ABC.h$.**)

Ein anderes Körpersegment sei von dem Parallelogramm $ACDE$, den paraboloidischen Vierecken $CBFD$ und $BAEF$, endlich von den parallelen Dreiecken $ABC$ und $DFE$ eingeschlossen.



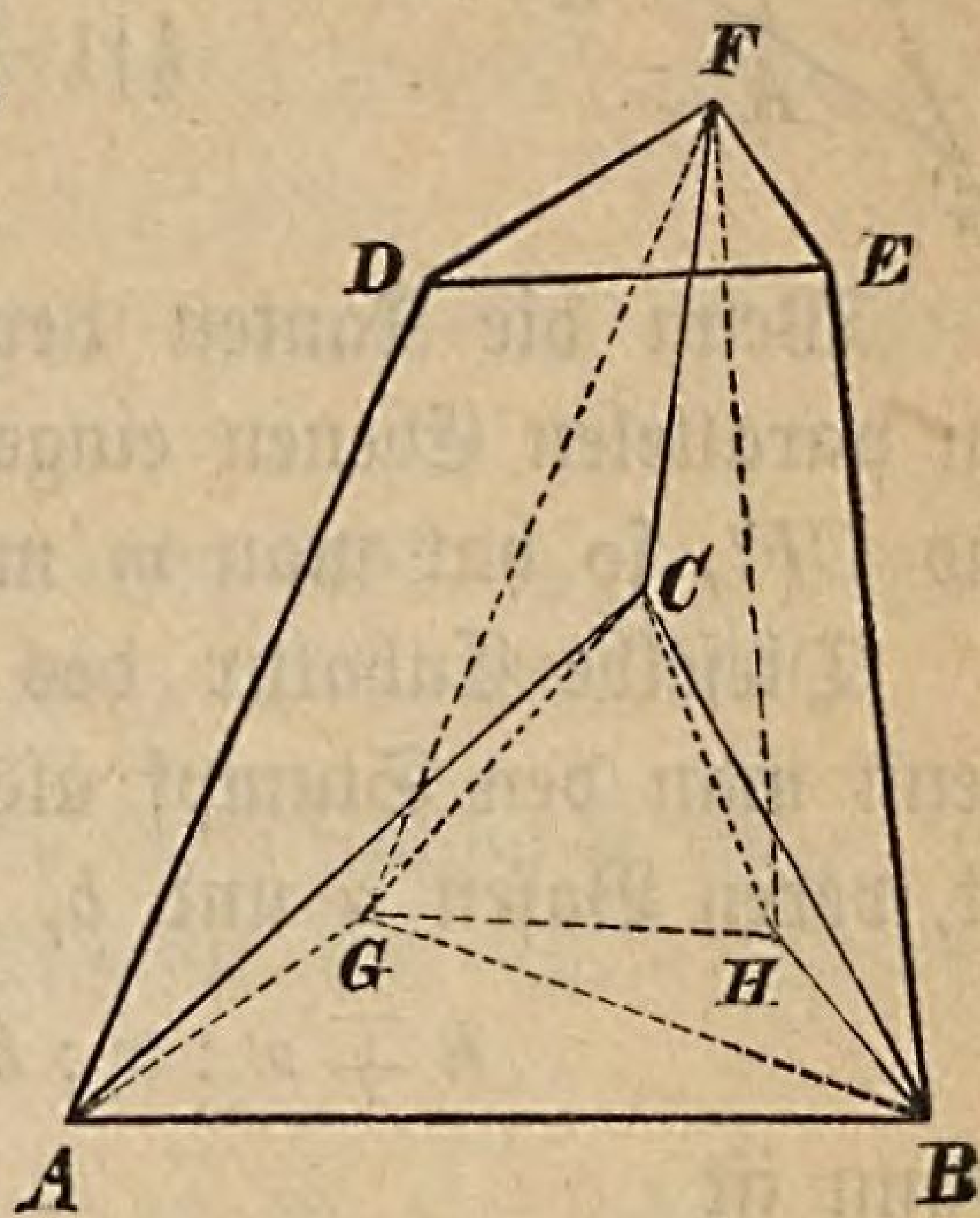

Vollendet man das Prisma mit den parallelen Kanten $CD$, $AE$, $GF$, dessen Höhe $h$ ist, so wird das gegebene Körpersegment in Theile von bekannter Art zerlegt, und man erhält sein Volum $= \frac{1}{2}ABG.h + \frac{1}{2}BCG.h + \frac{1}{2}CAG.h + \frac{1}{2}DEF.h$. Nun ist $ABG + BCG + CAG = ABC$ (Planim. §. 9, 9). Also ist das Körpersegment $= \frac{1}{2}(ABC + DEF)h$.

---

*) Die Cubatur besonderer Körpersegmente, die hieher gehören, ist von Meier Hirsch 1806 (geom. Aufg. II, 102. 155. 189) durch Rechnung vollbracht worden. Die geometrische Bedeutung und Ableitung der gewonnenen Formeln wurde von Koppe 1838 gefunden (Crelle J. 18 p. 275 und Neuer Lehrsatz der Stereometrie, Essen 1843. Vergl. Grunert Archiv 9 p. 82). Die oben betrachteten Körpersegmente sind auf andere nicht minder anschauliche und umfassende Art von Steiner cubirt worden 1842 Crelle J. 23 p. 275. Vergl. Brix Crelle J. 25 p. 129, August Crelle J. 60 p. 377 und den Schluß dieses Paragraphen.

**) Dieses Körpersegment ist von Tinseau 1780 (Mém. de Math. et Phys. prés. t. 9 p. 612) durch Integralrechnung, von Meier Hirsch a. a. O. 181 elementar cubirt worden. Man erkennt auf dem angezeigten Wege, daß ein Tetraeder durch ein paraboloidisches Viereck halbirt wird, welches gegenüberliegende Kanten des Tetraeders zu gegenüberliegenden Seiten hat. Z. B. das Tetraeder $ABDE$ wird durch das paraboloidische Viereck $ABDE$ halbirt, weil seine Schnitte wie $pq'rs'$, die

Wenn nun ein Körpersegment von den paraboloidischen Vierecken $ACFD$, $CBEF$, $BADE$ und den parallelen Dreiecken $ABC$ und $DFE$ eingeschlossen wird, deren Abstand $h$ ist, so ziehe man durch $F$ parallel mit $DA$ und $EB$ Gerade, welche die Ebene $ABC$ in $G$ und $H$ schneiden, und construire das paraboloidische Viereck $BGFE$, dessen Gerade mit der Ebene $FGH$ parallel sind. Das von den paraboloidischen Vierecken $CBEF$ und $BGFE$ und von den Dreiecken $GCF$ und $GBC$ eingeschlossene Körpersegment ist $= \frac{1}{2}GBH.h + \frac{1}{2}BCH.h + \frac{1}{2}CGH.h - \frac{1}{6}CGH.h = \frac{1}{2}BCG.h - \frac{1}{6}CGH.h$. Ferner ist das von dem Parallelogramm $GADF$, dem paraboloidischen Viereck $ACFD$ und den Dreiecken $CGF$ und $CAG$ eingeschlossene Körpersegment $= \frac{1}{2}CAG.h$. Endlich ist das von dem Parallelogramm $AGFD$, den paraboloidischen Vierecken $GBEF$ und $BADE$, und von den Dreiecken $ABG$ und $DFE$ begrenzte Körpersegment nach dem Obigen $= \frac{1}{2}(ABG + DEF)h$. Durch Addition findet man das gegebene Körpersegment $= \frac{1}{2}(ABC + DEF)h - \frac{1}{6}CGH.h$. Hierbei ist $CGH$ die Basis des der paraboloidischen Oberfläche beigeordneten Kegels (Pyramide). Denn die Geraden, welche durch $F$ auf den Seiten $GFH$, $HFC$ und $CFG$ der in $F$ gebildeten Ecke gezogen werden können, sind der Reihe nach parallel mit den Geraden, durch welche die Flächen der gegebenen paraboloidischen Vierecke construirt werden.

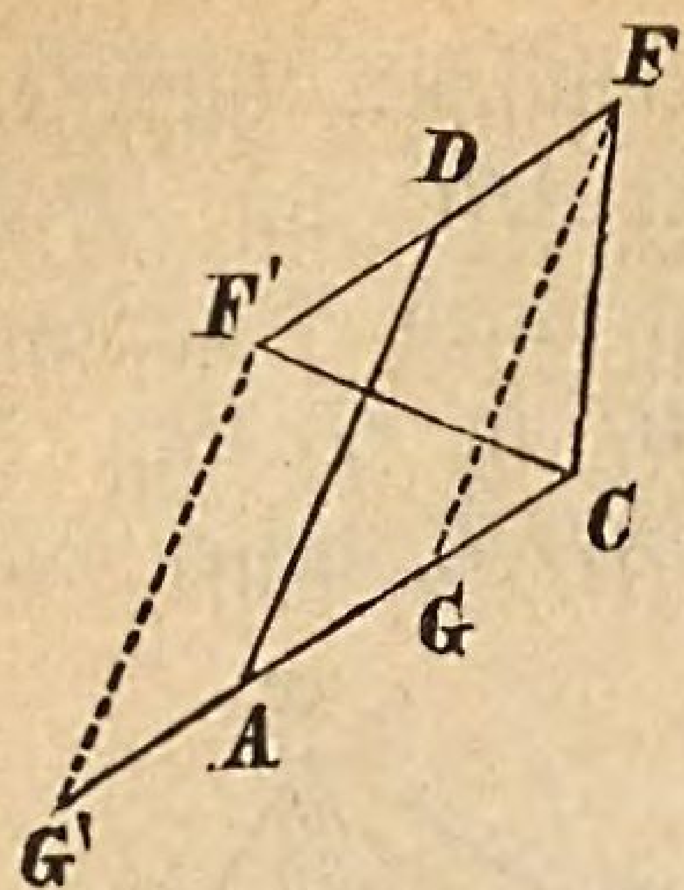



Jedes Körpersegment, welches den Bedingungen des aufgestellten Lehrsatzes genügt, läßt sich aus endlichen oder unendlich kleinen Körpersegmenten von der zuletzt betrachteten Art zusammensetzen.

6. Das einfachste Körpersegment, welches zu der Classe der im Vorstehenden cubirten Körpersegmente gehört, ist der Pyramidenstumpf (tronc), das Segment einer Ecke zwischen parallelen Ebenen, und der ebenso zu betrachtende Kegelstumpf. Die parallelen Schnitte, zwischen denen das Körpersegment enthalten ist, und die Basis des beigeordneten Kegels, die durch $a$, $b$, $d$ bezeichnet werden, sind in diesem Falle ähnliche Figuren, so daß entsprechende Strecken derselben

---

mit den Kanten $BD$ und $EA$ parallel sind, von ihren Diagonalen halbirt werden. Möbius baryc. Calc. p. 238 und Steiner a. a. O. p. 280.




$AC : DF : GC$ wie $1 : m : 1 - m$

sich verhalten, und

$$a : b : d = 1 : m^2 : (1 - m)^2$$

Dadurch erhält die Formel $\frac{1}{2}(a + b)h - \frac{1}{6}dh$ für das Volum des Pyramidenstumpfs (5) den Werth

$$\tfrac{1}{2}[1 + m^2 - \tfrac{1}{3}(1 - m)^2]ah = \tfrac{1}{3}(1 + m + m^2)ah$$
$$= \tfrac{1}{3}(a + \sqrt{ab} + b)h^{*})$$

Wenn die Kanten der Pyramide (des Kegels) innerhalb der von den parallelen Ebenen eingeschlossenen Schicht sich schneiden, z. B. $AD$ und $CF'$, so hat man $m$ mit $-m$ zu vertauschen, wie die Figur zeigt.

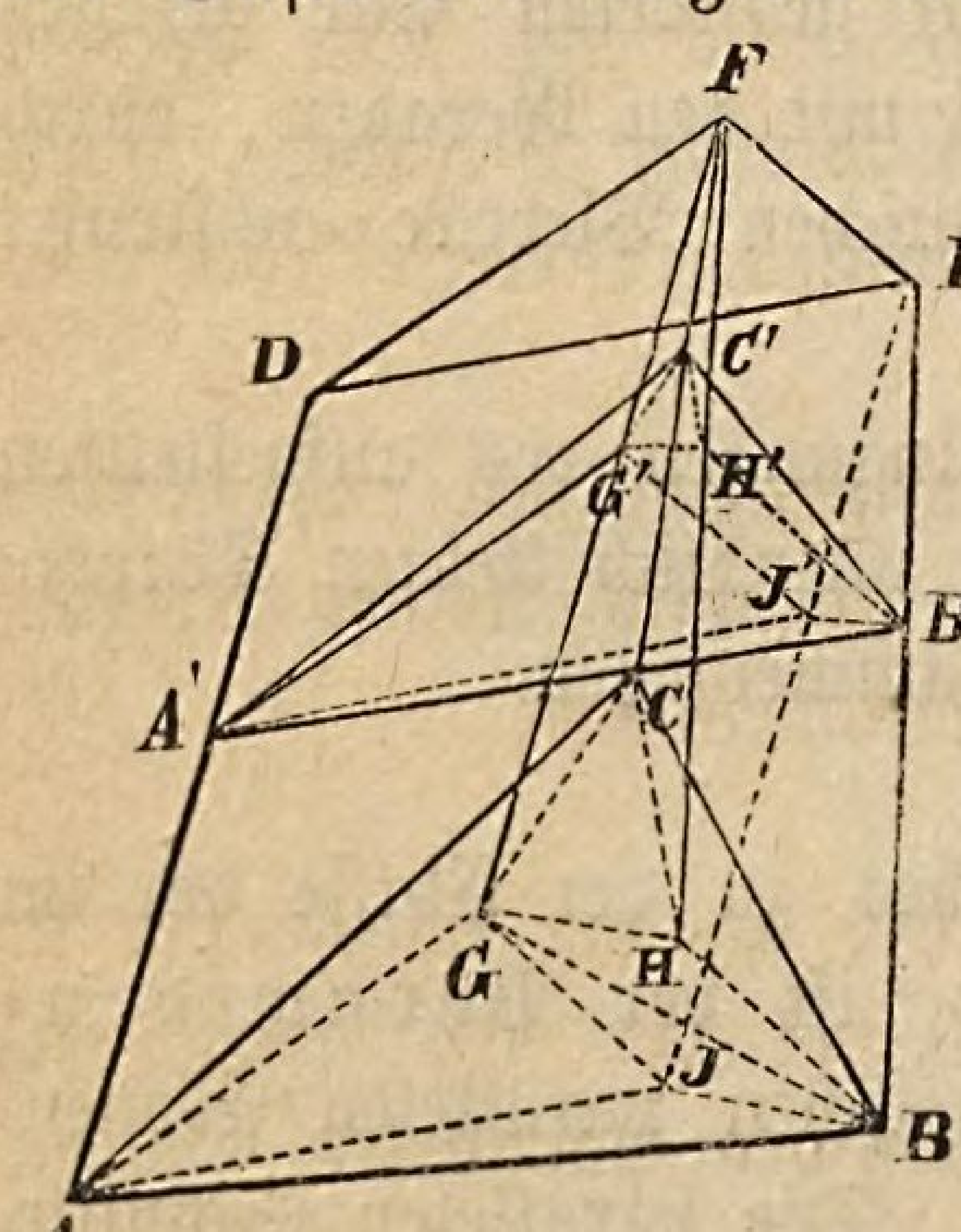
Dieselbe Cubatur des Pyramidenstumpfs ergiebt sich unmittelbar, wenn man den Stumpf als Differenz (Summe) der Pyramiden betrachtet, deren Basen $a$ und $b$, und deren Höhen $h \mp x$ und $x$ sind, so daß

$$h \mp x : x : h = \sqrt{a} : \sqrt{b} : \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$$

Dann ist

$$\tfrac{1}{3}a(h \mp x) \pm \tfrac{1}{3}bx = \tfrac{1}{3}\frac{a\sqrt{a} \pm b\sqrt{b}}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}h = \tfrac{1}{3}(a \pm \sqrt{ab} + b)h$$

7. Ein normal zur Höhe geführter Querschnitt des in (5) cubirten Körpersegments kann aus den beiden parallelen Grenzflächen und der Basis des beigeordneten Kegels berechnet werden. Die Ebene des Querschnitts $A'B'C'$ sei parallel mit den Ebenen $ABC$ und $DEF$, und theile die von $DEF$ bis $ABC$ reichende Schicht so, daß $A'D = v \,.\, AD$, u. s. w. Das paraboloidische Viereck $ACFD$ wird von der Ebene $A'B'C'$, mit welcher $AC$ und $FD$ parallel sind, in der Geraden $C'A'$ geschnitten (§. 1, 8).




Der Querschnitt $A'B'C'$ enthält nun im Vergleich zur Basis $ABC$ statt des Dreiecks $CAG$ das Dreieck $C'A'G'$, dessen Verhältniß zu $CAG$ den Werth $v$ hat, weil die Seite $A'G' = AG$, der Winkel $A'G'C' = AGC$ und die Seite $G'C' = v \,.\, GC$ ist.

*) Mitgetheilt von Leonardo Pisano practica geometriae fol. 113, Commandino de centro gravitatis prop. 23. Für $\frac{1}{3}(1 + m + m^2)$ kann auch gesetzt werden $\frac{1}{4}(1 + m)^2 + \frac{1}{12}(1 - m)^2$.

Der Querschnitt $A'B'C'$ enthält statt des Dreiecks $CGH$ das ähnliche Dreieck $C'G'H'$, dessen Verhältniß zu $CGH$ den Werth $v^2$ hat.

Der Querschnitt $A'B'C'$ enthält statt des Dreiecks $ABG$ das Dreieck $A'B'G' = G'A'J' + A'B'J' + B'G'J'$, wenn die Ebenen $ABC$ und $A'B'C'$ von der durch $E$ parallel mit $DA$ gezogenen Geraden in $J$ und $J'$ geschnitten werden. Davon ist das Dreieck $G'A'J' = GAJ = DEF$, $A'B'J' = v.ABJ$, u. s. w., folglich $A'B'G' = v.ABJ + v.BGJ + GAJ = v.ABG + (1 - v)DEF$.

Ebenso ist $B'C'G' = v.BCH + v^2.CGH + v.GBH = v.BCG - v(1 - v)CGH$, daher endlich

$$A'B'C' = v.CAG + v.ABG + v.BCG + (1-v)DEF - v(1-v)CGH$$
$$= v.ABC + (1 - v)DEF - v(1 - v)CGH$$

Bezeichnet man die untere und die obere Grenzfläche durch $a$ und $b$, die Basis des Kegels durch $d$, den Querschnitt des Körpersegments durch $f$, so erhält man*)

$$f = av + b(1 - v) - dv(1 - v) = b - (b + d - a)v + dv^2$$

Diese Formel lehrt, daß der Querschnitt verschwinden kann (Planim. §. 9, 10), wenn nämlich $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{d}$ zu einander sich nicht verhalten, wie die Seiten eines Dreiecks, und daß unter allen Querschnitten es einen kleinsten giebt, wenn $d$ positiv ist. Vergl. Algebra §. 6, 5.

Die gefundene Formel giebt den Mittelschnitt $c$ des Körpersegments, wenn $v = \frac{1}{2}$, nämlich

$$c = \tfrac{1}{2}(a + b) - \tfrac{1}{4}d$$

Durch Benutzung dieses Werthes erhält man für das Volum des cubirten Körpersegments statt $\frac{1}{2}(a + b)h - \frac{1}{6}dh$ die Formel

$$\tfrac{1}{6}(a + b + 4c)h \text{ oder } ch + \tfrac{1}{12}dh\text{**)}$$

8. Wenn die geradlinige Fläche, deren Segmente und Querschnitte im Vorstehenden betrachtet wurden, abwickelbar (développable) ist d. h. aus planen endlichen oder unendlich kleinen Theilen besteht, so kann auch der Perimeter eines beliebigen Querschnitts der Fläche und des

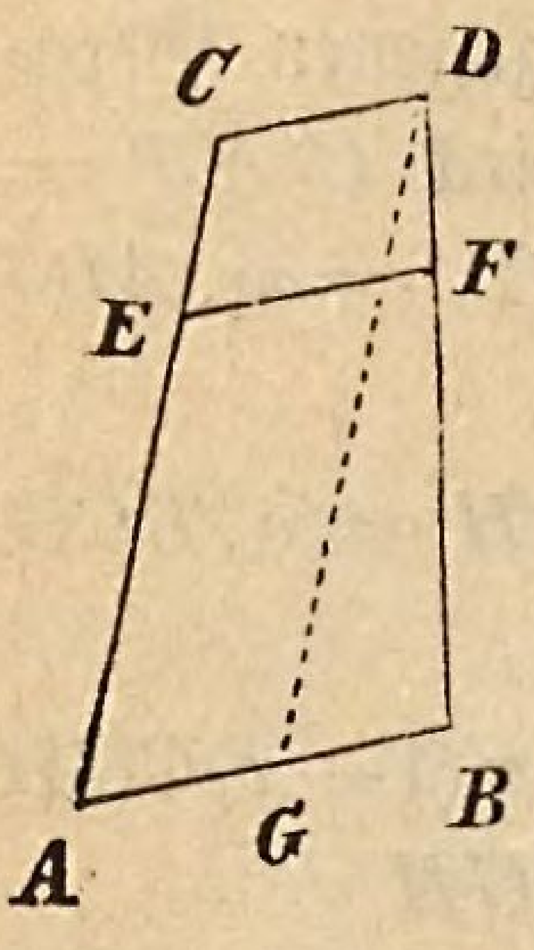
---

*) Diese Formel für den Querschnitt eines sogenannten Obelisken ist von Tinseau, Koppe und von Brix durch Rechnung gefunden worden, ohne die geometrische Bedeutung von $d$. Mit dem Namen Obelisk bezeichnen nämlich Brix a. a. O. und Koppe in der angeführten Schrift ein Körpersegment, das zwischen zwei parallelen planen Polygonen enthalten, übrigens von planen Vierecken oder Dreiecken begrenzt ist, und das früher unter dem Namen Prismoid vorkommt.

**) Geometrisch und umfassend wurde die erste dieser Formeln von Steiner a. a. O. bewiesen, die letztere für den Obelisken von Koppe in der angeführten Schrift.

ihr beigeordneten Kegels durch die Perimeter von zwei parallelen Querschnitten der Fläche ausgedrückt werden.

Drei parallele Ebenen schneiden den zwischen den Geraden $AC$ und $BD$ enthaltenen planen Theil der abwickelbaren Fläche in den parallelen Strecken $AB$, $CD$, $EF$, so daß $EC : AC = v$. Dann ist (Planim. §. 8, 4)




$$EF = v \,.\, AB + (1 - v) CD$$

Vollendet man das Parallelogramm $ACDG$, so ist $GB = AB - CD$. Für die Perimeter der drei parallelen Querschnitte und der Basis des beigeordneten Kegels, von denen $AB$, $CD$, $EF$, $GB$ Theile sind, und die der Reihe nach durch $\alpha$, $\beta$, $\varphi$, $\delta$ bezeichnet werden, findet man demnach durch Addition

$$\varphi = v\alpha + (1 - v)\beta, \quad \delta = \alpha - \beta$$

Bei $v = \frac{1}{2}$ erhält man den Perimeter des Mittelschnitts $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$.*)

9. Irgend ein zwischen parallelen Ebenen enthaltenes Körpersegment kann cubirt werden, wenn seine mit denselben Ebenen parallelen Querschnitte gegeben sind. Wenn der Querschnitt in dem Abstand $x$ von der Basis des Segments eine gegebene Function von $x$ ist, die durch $f(x)$ bezeichnet wird, so hat das Prisma, dessen Basis der Querschnitt $f(x)$ und dessen Höhe der $n$te Theil der Höhe $h$ des ganzen Segments ist, das Volum $\frac{h}{n} f(x)$. Die Summe der gleichhohen Prismen

$$\frac{h}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}h\right) + f\left(\frac{2}{n}h\right) + \,.\,.\, + f\left(\frac{n-1}{n}h\right)\right]$$

wird nach §. 8, 7 dem gesuchten Volum des Körpersegments gleich, wenn $n$ unendlich groß wird. Die Berechnung (wenigstens die Begrenzung) dieser Summe ist eine Aufgabe der Integralrechnung, die sich elementar lösen läßt, wenn $f(x)$ eine ganze Function von $x$ ist, z. B.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \,.\,.\, + a_k x^k$$

Dann ist

$$f(0) = a_0$$

$$f\left(\frac{1}{n}h\right) = a_0 + \frac{1}{n} h a_1 + \frac{1}{n^2} h^2 a_2 + \,.\,.$$

$$f\left(\frac{2}{n}h\right) = a_0 + \frac{2}{n} h a_1 + \frac{2^2}{n^2} h^2 a_2 + \,.\,.$$

---

*) Steiner a. a. O.

u. s. w. Nach Addition der Colonnen und Multiplication mit $\frac{h}{n}$ findet man die zu bildende Summe

$$= ha_0 + \frac{1 + 2 + .. + (n-1)}{n^2} h^2 a_1$$
$$+ \frac{1^2 + 2^2 + .. + (n-1)^2}{n^3} h^3 a_2$$
$$+ \frac{1^3 + 2^3 + .. + (n-1)^3}{n^4} h^4 a_3$$
$$+ \dots\dots\dots\dots$$

Nun hat (Allg. Arithm. §. 12, 6) bei unendlichem $n$

$$\frac{1^r + 2^r + .. + (n-1)^r}{n^{r+1}} \text{ den Werth } \frac{1}{r+1}$$

Also hat die gesuchte Summe d. i. das Körpersegment den Werth

$$ha_0 + \tfrac{1}{2} h^2 a_1 + \tfrac{1}{3} h^3 a_2 + .. + \frac{1}{k+1} h^{k+1} a_k$$

Beispiel. Eine Pyramide auf der Basis $b$ und von der Höhe $h$ wird durch eine mit der Basis parallele Ebene, von der die Spitze den Abstand $x$ hat, in einer der Basis ähnlichen Figur geschnitten. Man hat also für diesen Querschnitt

$$f(x) = \frac{bx^2}{h^2}$$

und findet durch die Substitution $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{b}{h^2}$ in der allgemeinen Formel das Volum der Pyramide

$$\tfrac{1}{3} \frac{bh^3}{h^2} = \frac{bh}{3}$$

wie früher §. 8, 10.

**10.** Newton hat gezeigt, wie man ein Körpersegment aus mehrern seiner parallelen Schnitte (eine plane Fläche aus mehrern parallelen Sehnen derselben) annäherungsweise berechnen kann, und daß man insbesondere aus 3 Querschnitten, die in gleichen Abständen folgen, das eingeschlossene Segment annäherungsweise findet, wenn man die äußern Querschnitte und den vierfachen Mittelschnitt addirt und die Summe mit dem sechsten Theil des Abstandes der äußern Querschnitte multiplicirt.*) Zu den Newton'schen Formeln hat Maclaurin 1742 (Flu-

---

*) Methodus differentialis prop. 6, weiter ausgeführt von Cotes (über Newton's meth. diff. in den nachgelassenen Werken 1722), verfeinert von Gauß (Meth. nova integralium valores etc. 1814, Comm. Götting. t. 3). Vergl. darüber die

xions no. 848) Ergänzungsglieder hinzugefügt, welche sofort erkennen lassen, daß die angeführte besondere Regel das gesuchte Segment genau giebt, wenn der oben durch $f(x)$ bezeichnete Querschnitt eine ganze Function der Länge $x$ ist, die den dritten Grad nicht übersteigt.*) Segmente, die durch dieselbe Regel genau gefunden werden, sind von Torricelli, Th. Simpson**) und besonders von Steiner a. a. O. angezeigt worden.

Um die Tragweite der obigen Regel zu prüfen, bemerke man, daß das Segment zwischen $f(0)$ und $f(4)$ die Summe der Segmente zwischen $f(0)$ und $f(2)$ und zwischen $f(2)$ und $f(4)$ ist. Wenn nun $f(x)$ eine solche Function von $x$ ist, daß das Volum des Segments nach der obigen Regel genau gefunden wird, so hat man identisch

$$\tfrac{4}{6}[f(0) + 4f(2) + f(4)]$$
$$= \tfrac{2}{6}[f(0) + 4f(1) + f(2)] + \tfrac{2}{6}[f(2) + 4f(3) + f(4)]$$
$$f(0) - 4f(1) + 6f(2) - 4f(3) + f(4) = 0$$

Unter der Voraussetzung $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ..$ ist aber

$$\begin{aligned} & f(0) - 4f(1) + 6f(2) - 4f(3) + f(4) \\ = \; & a_0 \\ & - 4a_0 - 4a_1 - 4a_2 - 4a_3 - 4a_4 - .. \\ & + 6a_0 + 12a_1 + 24a_2 + 48a_3 + 96a_4 + .. \\ & - 4a_0 - 12a_1 - 36a_2 - 108a_3 - 324a_4 - .. \\ & + a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 + 256a_4 + .. \end{aligned}$$

$= 24a_4 + \ldots$ und verschwindet identisch, wenn $a_4, a_5, ..$ verschwinden, mithin $f(x)$ den dritten Grad nicht übersteigt. In der That findet man unter dieser Bedingung

$$\begin{aligned} f(0) + 4f(\tfrac{1}{2}h) + f(h) = \; & a_0 \\ & + 4a_0 + 2ha_1 + h^2a_2 + \tfrac{1}{2}h^3a_3 \\ & + a_0 + ha_1 + h^2a_2 + h^3a_3 \\ = \; & 6a_0 + 3ha_1 + 2h^2a_2 + \tfrac{3}{2}h^3a_3 \end{aligned}$$

$$\frac{h}{6}[f(0) + 4f(\tfrac{1}{2}h) + f(h)] = ha_0 + \tfrac{1}{2}h^2a_1 + \tfrac{1}{3}h^3a_2 + \tfrac{1}{4}h^4a_3$$

---

Lehrbücher der Analysis z. B. Minding I p. 230. Die besondere Regel war von Torricelli gegeben worden, wie Perelli berichtet im Anhang zu Guido Grandi Instituzioni delle sezioni coniche, Firenze 1744.

*) Brunacci compendio del calcolo sublime, Milano 1811, II p. 67. August im Progr. des Cöln. Realgymn. Berlin 1849 p. 28 und Crelle J. 45 p. 239.

**) Math. dissertations 1743 p. 109. Die Newton'sche Regel wird deshalb zuweilen nach Th. Simpson benannt. Richtiger nennt man Simpson'sche Regel eine andere Regel, welche Th. Simpson a. a. O. aus jener zur annähernden Berechnung des Segments einer Fläche oder eines Körpers aus einer Mehrzahl von Querschnitten abgeleitet hat (Klügel math. W. 4 p. 150).

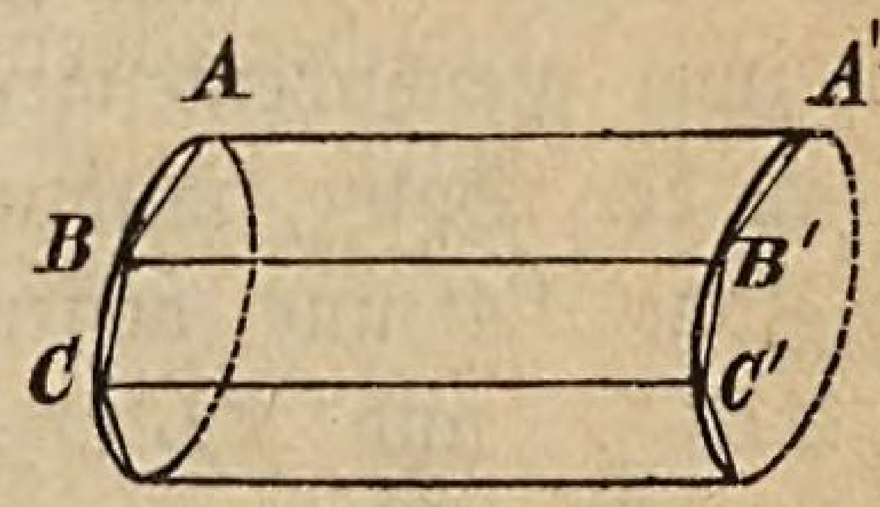
übereinstimmend mit der Formel, welche oben (9) für das zwischen $f(0)$ und $f(h)$ enthaltene Körpersegment angegeben wurde.

Bei den in (5) cubirten Segmenten ist $f(x)$ vom zweiten Grade (7); also wird nach der sonst nur annäherungsweise gültigen Regel das Volum eines solchen Segments genau gefunden, wie Steiner geometrisch direct bewiesen hat.

## §. 10. Oberfläche des Cylinders, des Kegels und der Kugel.

1. Die Zone eines Cylinders zwischen parallelen Ebenen ist einem Parallelogramm gleich, dessen Breite der Perimeter eines Normalschnittes, und dessen Länge die Kante der Zone ist.*)

Beweis. Sind $AA'$, $BB'$, $CC'$, .. Kanten der Cylinderzone, so besteht die Zone eines dem Cylinder eingeschriebenen Prisma aus den Parallelogrammen $ABB'A'$, $BCC'B'$, . . . Diese Parallelogramme sind sämmtlich von gleicher Länge ($AA'$), ihre Breiten sind die Seiten des Normalschnitts des Prisma; also ist die Summe der Parallelogramme ein Parallelogramm von derselben Länge, dessen Breite der Perimeter des Normalschnitts des Prisma ist. Das eingeschriebene Prisma fällt mit dem Cylinder zusammen, wenn es mit ihm alle Kanten gemein hat.



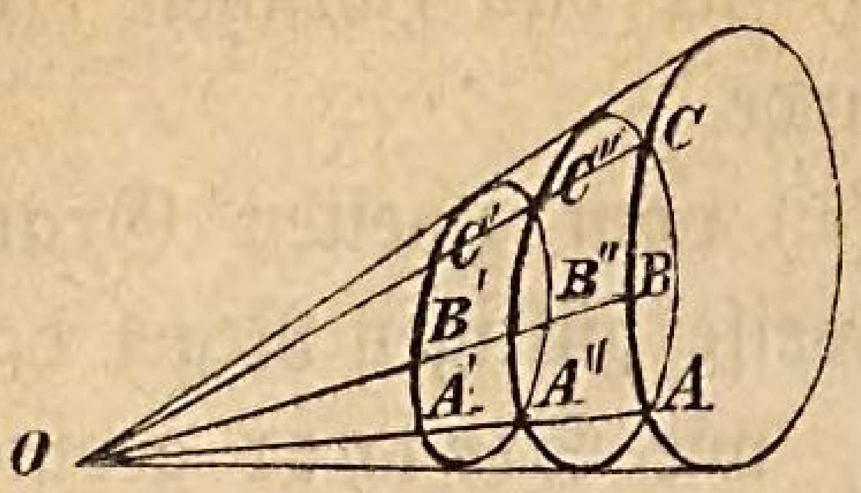

Der Normalschnitt eines Rotationscylinders ist ein Kreis. Bei andern Cylindern sind die Normalschnitte andere Figuren, deren Perimeter durch Integralrechnung ermittelt werden.

2. Die Zone eines Kegels, welche durch eine concentrische Kugel begrenzt wird, ist einem Kreissector gleich, dessen Radius die Kante der Zone und dessen Bogen so lang ist als der Perimeter des Kugelschnitts.**)

Beweis. Sind $OA$, $OB$, $OC$, .. Kanten der Kegelzone, und durch eine um das Centrum $O$ beschriebene Kugel begrenzt, so besteht die Zone einer dem Kegel eingeschriebenen sphärischen Pyramide aus den Kreissectoren $OAB$, $OBC$, . . . Durch Addition dieser Sectoren erhält man einen Kreissector, dessen Radius $OA$ und dessen Bogen der

*) Archimedes (Kugel und Cyl. I, 14) hat die Zone eines Rotationscylinders berechnet.

**) Archimedes Kugel und Cyl. I, 15—17 handelt von den Zonen der Rotationskegel.

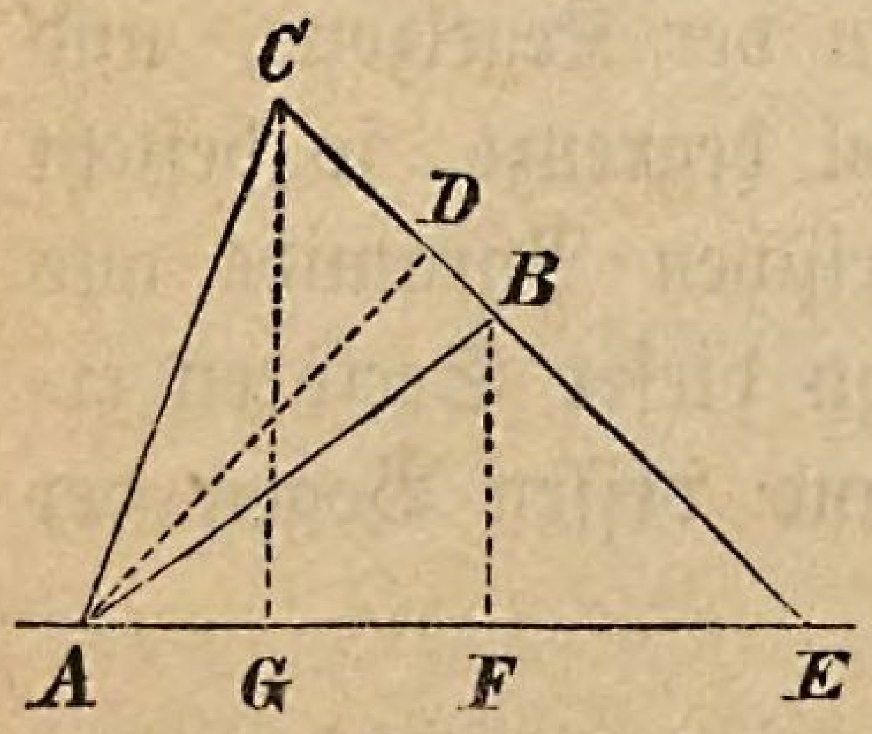



Perimeter des sphärischen Polygons $ABC$.. ist. Wenn nun die eingeschriebene sphärische Pyramide alle Kanten mit dem Kegel gemein hat, so fällt ihre Zone mit der Zone des Kegels und der Perimeter ihrer sphärischen Basis mit dem Perimeter des Kugelschnitts zusammen, welcher die Kegelzone begrenzt.

Der Kugelschnitt eines Rotationskegels ist ein Kreis. Andere Kegel haben andere Kugelschnitte, deren Perimeter durch Integralrechnung bestimmbar sind.

Anmerkung. Die zwischen zwei Kugelschnitten des Kegels, $ABC$.. und $A'B'C''$.., enthaltene Zone ist einem Parallelogramm gleich, dessen Breite die Kante der Zone $AA'$ und dessen Länge der Perimeter des Kugelschnitts $A''B''C''$.. ist, auf dem die Mitten der Kanten $AA'$, $BB'$,.. liegen. Denn diese Zone ist die Differenz von zwei concentrischen Kreissectoren mit einem gemeinschaftlichen Centriwinkel, also auch von zwei gleichschenkeligen Dreiecken mit einem gemeinschaftlichen Winkel an der Spitze, mithin ein Parallelogramm, dessen Breite die Kante der Zone $AA'$ und dessen Länge das arithmetische Mittel der Perimeter $ABC$.. und $A'B'C'$.. ist. Wenn aber der Kugelradius $OA''$ das arithmetische Mittel der Radien $OA$ und $OA'$ ist, so ist der Perimeter des Kugelschnitts $A''B''C''$.. das arithmetische Mittel der Perimeter der Kugelschnitte $ABC$.. und $A'B'C'$.., welche die Zone des Kegels begrenzen.

3. Die Ausmessung der Fläche, welche auf einer krummen Fläche von einem gegebenen Perimeter eingeschlossen wird, ist im Allgemeinen eine Aufgabe von größerer Schwierigkeit, als die Quadratur einer Planfigur, und heißt die Complanation der unebenen Flächenfigur. Die Complanation der Kugel und ihrer Zonen läßt sich auf die Cubatur des Kugelvolums und des Kugelsectors zurückführen mit Hülfe des folgenden Satzes.




Wenn das geradlinige Dreieck $ABC$ um die auf seiner Ebene durch die Spitze $A$ gezogene Axe $AE$ rotirt, so ist das Volum des beschriebenen Rotationskörpers einem Kegel gleich, dessen Höhe der Abstand der Spitze $A$ von der Seite $BC$ ist, und dessen Basis die von $BC$ beschriebene Kegelzone ist.*)

---

*) Archimedes Kugel und Cyl. I, 20.

Beweis. Die Axe werde von $BC$ in $E$ geschnitten, $DA$ sei normal zu $BC$, $FB$ normal zu $AE$ gezogen. Das von dem Dreieck $AEB$ durch Rotation um $AE$ beschriebene Volum ist als Summe von zwei Kegeln

$$\tfrac{1}{3}\pi . FB^2 . AE = \tfrac{1}{3}\pi . FB . 2AEB = \tfrac{1}{3}\pi . FB . EB . DA$$

Die von der Strecke $EB$ durch dieselbe Rotation beschriebene Kegelzone ist (2) $\pi . FB . EB$. Wenn man dieselbe durch $(EB)$ bezeichnet, so hat das von $AEB$ beschriebene Volum den Werth $\frac{1}{3}(EB) . DA$. Eben so hat das von $AEC$ beschriebene Volum den Werth $\frac{1}{3}(EC) . DA$, also findet man durch Subtraction für das von $ABC$ beschriebene Volum den Werth $\frac{1}{3}(BC) . DA$.

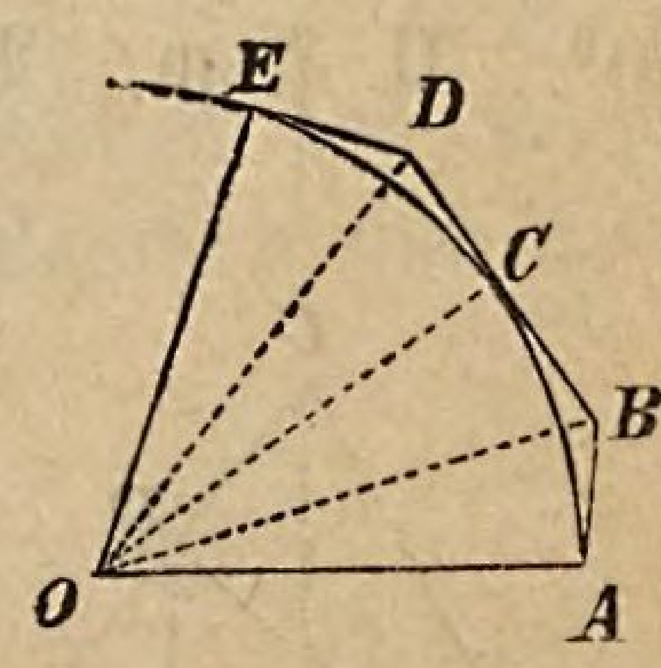
Wenn $BC$ mit der Axe parallel ist, so erhält man für das von $ABC$ beschriebene Volum denselben Ausdruck, indem man $GC$ normal zur Axe zieht, und von der Gleichung

$$ABC = GFBC + AGC - AFB$$

ausgehend einen Cylinder und zwei Kegel berechnet.

4. Ein Kugelsector ist einem Kegel gleich, dessen Basis die Kugelzone und dessen Höhe der Kugelradius ist. Das Volum der Kugel ist einem Kegel gleich, dessen Basis die Kugelfläche und dessen Höhe der Kugelradius ist.*) Eine sphärische Pyramide ist einem Kegel gleich, dessen Basis die sphärische Figur ist, welche die sphärische Pyramide begrenzt, und dessen Höhe der Kugelradius ist.

Beweis. Der Kugelsector sei durch Rotation des Kreissectors $OAE$ um den Radius $OA$ beschrieben. Construirt man an dem Bogen $AE$ die Tangenten $AB$, $BC$, $CD$, $DE$, so beschreibt die Figur $OABCDE$ durch Rotation um die Axe $OA$ einen Körper, der an Volum einem Kegel gleichkommt, dessen Höhe der Radius $OA$ und dessen Basis die Summe der von $AB$, $BC$, $CD$, $DE$ beschriebenen Kegelzonen ist (3). Wenn nun die aus Tangenten zusammengesetzte gebrochene Linie den Bogen $AE$ in allen Puncten berührt, so fällt die Figur $OABCDE$ mit dem Kreissector $OAE$, der durch Rotation beschriebene Körper mit dem Kugelsector, die Summe der von $AB$, $BC$, . . beschriebenen Kegelzonen mit der von dem Bogen $AE$ beschriebenen Kugelzone zusammen.




Der Kugelsector umfaßt das Volum der ganzen Kugel, wenn der Bogen $AE$ ein Halbkreis ist. Dabei gelten die vorigen Betrachtungen.

---

*) Archimedes a. a. O. 50 und 36.

Der von zwei das Centrum der Kugel enthaltenden Ebenen und einem sphärischen Winkel (Zweieck) eingeschlossene Körper hat zum Volum der Kugel dasselbe Verhältniß, als der sphärische Winkel zur Kugelfläche. Hiernach schließt man (§. 4, 5), daß auch eine dreiseitige sphärische Pyramide zum Volum der Kugel dasselbe Verhältniß hat, als das sphärische Dreieck, auf dem sie steht, zur Kugelfläche. U. s. w.

5. Die Kugelfläche ist viermal so groß als die Fläche eines ihrer Hauptkreise. Eine Kugelzone ist einem Parallelogramm gleich, dessen Basis so lang als ein Hauptkreis und dessen Höhe die Sagitte oder die Differenz der Sagitten ist.*)

Beweis. Das Volum der Kugel ist sowohl das Product $\frac{1}{3}$ Kugelfläche $\times$ Radius (4), als auch $\frac{4}{3}\pi$ Quadratradien $\times$ Radius (§. 9, 1). Daher

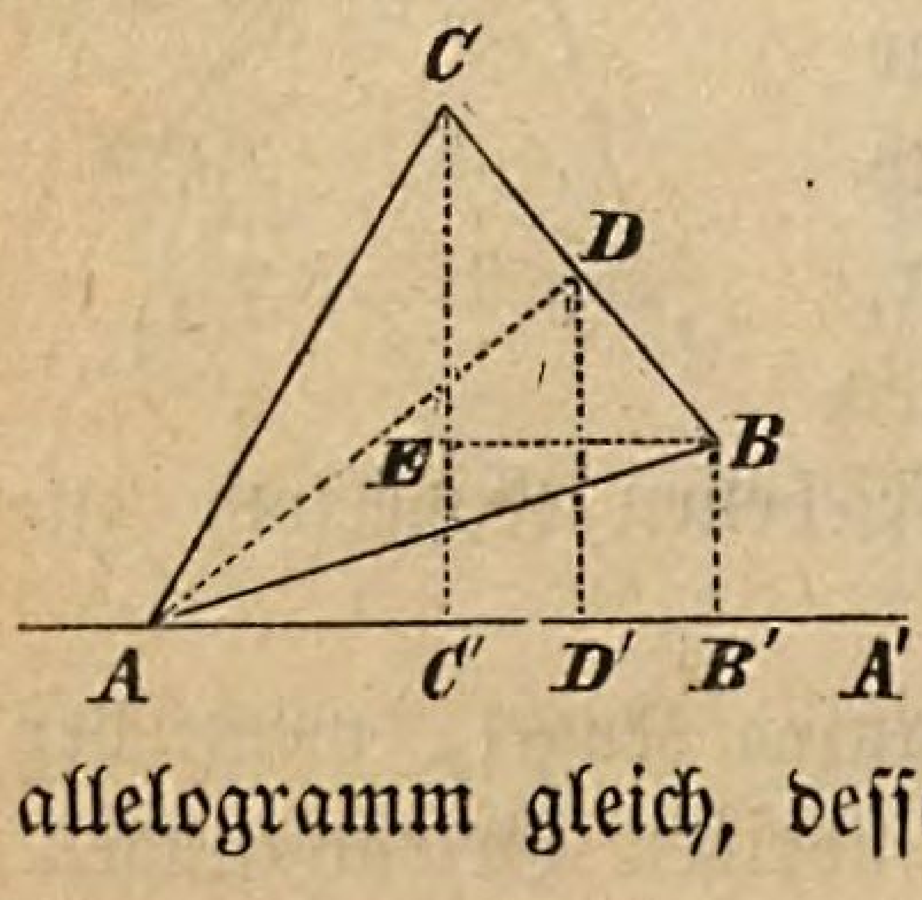
$$\text{Kugelfläche} = 4\pi \text{ Quadratradien}$$

und gleich der Zone des umgeschriebenen Cylinders (1). Das Volum des Kugelsectors ist sowohl das Product $\frac{1}{3}$ Kugelzone $\times$ Radius, als auch $\frac{2}{3}\pi$ Quadratradien $\times$ Sagitte (§. 9, 2). Daher

$$\text{Kugelzone} = 2\pi \text{ Radien} \times \text{Sagitte}$$

d. i. gleich der Fläche eines Kreises, dessen Radius das geometrische Mittel zwischen dem Kugeldiameter und der Sagitte ist. Eine von zwei Kreisen eingeschlossene Kugelzone ist die Differenz von zwei Kugelzonen, die von je einem Kreis eingeschlossen sind, folglich u. s. w.

Anmerkung. Zonen derselben Kugel sind gleich, wenn ihre Sagitten oder Sagitten-Differenzen (Höhen) gleich sind. Die Fläche eines sphärischen Winkels hat zur Halbkugelfläche dasselbe Verhältniß, als der Winkel der beiden Hauptkreise zu $180^0$. Die Fläche eines sphärischen Dreiecks hat zur Halbkugelfläche dasselbe Verhältniß, als sein Exceß zu $360^0$. U. s. w. Vergl. §. 4, 5.




6. Unabhängig von der Cubatur des Kugelvolums wird die Complanation der Kugelfläche durch folgenden Satz begründet.

Wenn das gleichschenkelige Dreieck $ABC$ um die auf seiner Ebene durch die Spitze $A$ gezogene Axe $AA'$ rotirt, so ist die von der Basis $BC$ beschriebene Kegelzone einem Parallelogramm gleich, dessen Breite der Perimeter des Kreises ist, welcher

*) Archimedes a. a. O. 35. 48.

zum Radius den Abstand $DA$ der Spitze $A$ von der Basis $BC$ hat, und dessen Länge die Normalprojection $B'C'$ der Basis $BC$ auf die Axe $AA'$ ist.*)

Beweis. Zieht man $BB'$, $CC'$, $DD'$ normal zur Axe, so ist $DD'$ das arithmetische Mittel von $BB'$ und $CC'$, weil $BD = DC$. Die von $BC$ durch Rotation um die Axe $AA'$ beschriebene Kegelzone ist aber $= 2\pi . DD' . BC$ (2, Anm.). Zieht man $BE$ parallel mit $B'C'$, so ist das rechtwinkelige Dreieck $BCE$ dem Dreieck $DAD'$ ähnlich, weil die Winkel $ECB$ und $D'AD$ gleich sind. Daher ist $BC : BE = DA : DD'$, $DD' . BC = DA . BE$, also

$$2\pi . DD' . BC = 2\pi . DA . B'C'$$

Anmerkung. Mit Hülfe dieses Ausdrucks der von $BC$ beschriebenen Kegelzone erhält man nach (3) für das Volum des von $ABC$ beschriebenen Rotationskörpers den Ausdruck $\frac{2}{3}\pi . AD^2 . B'C'$ d. i. $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, dessen Basis die Fläche eines mit dem Radius $AD$ beschriebenen Kreises, und dessen Höhe die Normalprojection $B'C'$ ist.

7. Wenn ein aus den congruenten gleichschenkeligen Dreiecken $ABC$, $ACD$, $ADE$, .. zusammengesetztes planes Polygon um die Axe $AB$ rotirt, so ist die Summe der von den Seiten $BC$, $CD$, $DE$, .. beschriebenen Kegelzonen einem Parallelogramm gleich, dessen Länge die Normalprojection der aus den Strecken $BC$, $CD$, $DE$, .. bestehenden gebrochenen Linie auf die Axe $AB$ ist, und dessen Breite der Perimeter des der gebrochenen Linie eingeschriebenen Kreises ist (6). Bei unendlicher Anzahl der Berührungspuncte fällt die gebrochene Linie mit dem Kreise, die Summe der Kegelzonen mit einer Kugelzone (mit der Kugelfläche), die Projection der gebrochenen Linie mit der Sagitte (mit dem Diameter) zusammen.

Eben so gewinnt man die §. 9 gegebenen Cubaturen der Kugel und des Kugelsectors aus dem in (6) angemerkten Ausdruck des Körpers, welchen das reguläre Polygon $ABCDE$ .. durch Rotation um die Axe $AB$ beschreibt.

## §. 11. Von den Schwerpuncten der Figuren.

1. Werden die Seiten eines geschlossenen planen Polygons auf eine beliebige Gerade seiner Ebene durch Parallelen von beliebiger Richtung projicirt, so haben die Projectionen der Seiten die Summe Null.

---

*) Dieser Satz kommt in den Lehrbüchern des 18ten Jahrhunderts vor z. B. bei Clairault.

Sind z. B. $B_1$, $B_2$, .., $B_n$ die auf einer Geraden liegenden Projectionen der Eckpuncte des Polygons $A_1A_2 \,..\, A_n$, mithin $B_1B_2$, $B_2B_3$, .., $B_nB_1$ die Projectionen der Seiten, so hat man mit Rücksicht auf die Zeichen ihrer Werthe (Planim. §. 14, 1)

$$B_1B_2 + B_2B_3 + .. + B_nB_1 = 0$$

und die Projection einer Seite ist der Summe der Projectionen der übrigen Seiten entgegengesetzt gleich.

Wenn man die auf einer Ebene der Lage und Größe nach zerstreut gegebenen Strecken $A_1B_1$, $A_2B_2$, .., $A_nB_n$ auf eine beliebige Gerade derselben Ebene durch Parallelen von beliebiger Richtung projicirt, so hängt die Summe der Projectionen im Allgemeinen von der Wahl der Richtungen ab. Zieht man nämlich von einem beliebigen Anfang $C$ die Strecken $CC_1$, $C_1C_2$, .., $C_{n-1}C_n$ von gleicher Richtung und Größe mit den gegebenen Strecken, so fällt der Endpunct $C_n$ mit dem Anfang $C$ im Allgemeinen nicht zusammen. Werden nun die gleichen und gleichgerichteten Strecken $A_1B_1$ und $CC_1$ durch Parallelen auf dieselbe Gerade projicirt, so sind auch die Projectionen derselben gleich und gleichgerichtet. Also ist auf einer Geraden bei beliebiger Richtung der Projicirenden die Summe der Projectionen von $A_1B_1$, $A_2B_2$, .., $A_nB_n$ gleich der Summe der Projectionen von $CC_1$, $C_1C_2$, .., $C_{n-1}C_n$ d. i. gleich der Projection der Strecke $CC_n$. Fällt aber $C_n$ mit $C$ zusammen, so verschwindet die Summe der Projectionen von $A_1B_1$, $A_2A_2$, .., $A_nB_n$ auf jede Gerade bei jeder Richtung der parallelen Projicirenden, weil $CC_n = 0$ ist.

Die auf einer Ebene gegebenen Strecken $A_1B_1$, $A_2B_2$, .., $A_nB_n$ werden mehrmal auf verschiedene Weise durch Parallelen von beliebiger Richtung auf eine beliebige Gerade projicirt und jedesmal die Summe der Projectionen gebildet. Wenn bei zwei verschiedenen Richtungen der Projicirenden die Summe der Projectionen verschwindet, so verschwindet sie auch bei jeder andern Richtung der Projicirenden, weil jedes aus den gegebenen Strecken durch parallele Verschiebung zusammengesetzte Polygon $CC_1C_2 \,..\, C_n$ ein geschlossenes ist. Fiele nämlich $C_n$ mit $C$ nicht zusammen, so würde die Projection von $CC_n$ nur dann verschwinden, wenn die Projicirenden mit $CC_n$ parallel wären. Dies streitet gegen die Voraussetzung, daß bei zwei verschiedenen Richtungen der Projicirenden die Summe der Projectionen der gegebenen Strecken, mithin die Projection von $CC_n$ verschwindet.*)

Eben so schließt man in Bezug auf die im Raume der Lage und Größe nach gegebenen Strecken $A_1B_1$, $A_2B_2$, .., welche mehrmal in

*) Möbius Statik 47.

verschiedener Weise auf eine beliebige Gerade durch parallele Ebenen von beliebiger Stellung projicirt werden. Wenn bei drei verschiedenen Stellungen der projicirenden Ebenen, die keine gemeinschaftliche Richtung enthalten, die Summe der Projectionen verschwindet, so verschwindet sie auch bei jeder andern Stellung der projicirenden Ebenen, weil jedes durch parallele Verschiebung der Strecken zusammengesetzte Polygon ein geschlossenes ist.

2. Wenn im Raume die Puncte $A$, $B$, $C$, .. mit den dazu gehörigen Coefficienten (Massen, Gewichten) $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .. gegeben sind und die Summe $\alpha + \beta + \gamma + ..$ nicht verschwindet, so kann ein Punct $S$ von solcher Lage construirt werden, daß für jeden beliebigen Punct $O$ die Strecke $(\alpha + \beta + \gamma + ..)OS$ aus den Strecken $\alpha . OA$, $\beta . OB$, $\gamma . OC$, .. durch parallele Verschiebung zusammengesetzt d. h. ein aus den Strecken $\alpha . OA$, $\beta . OB$, .., $(\alpha + \beta + \gamma + ..)SO$ durch parallele Verschiebung zusammengesetztes Polygon ein geschlossenes ist. Zieht man durch die Puncte $A$, $B$, $C$, .., $S$ parallele Gerade von beliebiger Richtung, welche eine beliebige Ebene in $A'$, $B'$, $C'$, .., $S'$ schneiden, so besteht die Gleichung

$$(\alpha + \beta + \gamma + ..)SS' = \alpha . AA' + \gamma . BB' + \gamma . CC + ..$$

Der so durch die Puncte $A$, $B$, $C$, .. und die Proportion der Coefficienten $\alpha : \beta : \gamma : ..$ bestimmte Punct $S$ heißt **der Schwerpunct der Puncte** $\alpha . A$, $\beta . B$, $\gamma . C$, ...*)

**Beweis.** Durch den Punct $O$ ziehe man beliebig die nicht auf einer Ebene liegenden Geraden $OX$, $OY$, $OZ$ und projicire die gegebenen Puncte $A$, $B$, $C$, .. auf $OX$, $OY$, $OZ$ durch Ebenen, welche der Reihe nach mit den Ebenen $OYZ$, $OZX$, $OXY$ parallel sind. Die Projectionen von $A$ werden durch $A_x$, $A_y$, $A_z$ bezeichnet, u. s. w. Man bestimme nun auf $OX$, $OY$, $OZ$ die Puncte $S_x$, $S_y$, $S_z$ durch die Gleichungen

$$OS_x = \frac{\alpha . OA_x + \beta . OB_x + \gamma . OC_x + ..}{\alpha + \beta + \gamma + ..}$$

$$OS_y = \frac{\alpha . OA_y + \beta . OB_y + \gamma . OC_y + ..}{\alpha + \beta + \gamma + ..}$$

$$OS_z = \frac{\alpha . OA_z + \beta . OB_z + \gamma . OC_z + ..}{\alpha + \beta + \gamma + ..}$$

---

*) Die Schwerpuncte sowohl von physischen Körpern (massiven Figuren), als auch von geometrischen Figuren sind zuerst von **Archimedes** untersucht und in der Geometrie verwendet worden (vom Gleichgewicht der Ebenen und von den schwimmenden Körpern, je zwei Bücher, die Quadratur der Parabel). Geometrische An-

und construire den Punct $S$, dessen Projectionen $S_x$, $S_y$, $S_z$ sind, in welchem sich demnach drei bestimmte projicirende Ebenen schneiden. Die drei Gleichungen, wenn sie auf Null reducirt sind, geben zu erkennen, daß jedes aus den Strecken $\alpha . OA$, $\beta . OB$, $\gamma . OC, . .$, $(\alpha + \beta + \gamma + . .) SO$ durch parallele Verschiebung zusammenzusetzende Polygon ein geschlossenes ist (1). Wenn man daher die Puncte $A$, $B$, $C, . . .$, $S$, $O$ durch parallele Ebenen von beliebiger Stellung auf eine beliebige Gerade $p$ projicirt, so verschwindet die Summe der Projectionen von $\alpha . OA$, $\beta . OB$, $\gamma . OC, . .$, $(\alpha + \beta + \gamma + . .) SO$. Die Projectionen von $OA$, $OB$, $OC, . .$, $SO$ sind aber der Reihe nach gleich und gleichgerichtet mit $A'A$, $B'B$, $C'C, . .$, $SS'$, wenn diese Geraden parallel mit der Geraden $p$ gezogen und von der den Punct $O$ projicirenden Ebene in $A'$, $B'$, $C', . .$, $S'$ geschnitten werden. Also ist auch

$$0 = \alpha . A'A + \beta . B'B + \gamma . C'C + . . + (\alpha + \beta + \gamma + . .) SS'$$

oder

$$(\alpha + \beta + \gamma + . .) SS' = \alpha . AA' + \beta . BB' + \gamma . CC' + . .$$

Zusatz. Demnach schließt man: Wenn bei 3 nicht in einer Stellung enthaltenen Richtungen der Parallelen $SS'$, $AA'$, $BB', . .$, die von einer beliebigen Ebene begrenzt werden, die Gleichung

$$(\alpha + \beta + \gamma + . .) SS' = \alpha . AA' + \beta . BB' + \gamma . CC' + . .$$

stattfindet, ohne daß die Summe $\alpha + \beta + \gamma + . .$ verschwindet, so ist die Gleichung bei jeder Richtung der Parallelen gültig, und der Punct $S$ ist der Schwerpunct der Puncte $\alpha . A$, $\beta . B$, $\gamma . C, . . .$

Oder: Wenn $MNOP . .$ ein beliebiges Polygon, $S$ ein beliebiger Punct ist, und die Strecken $\alpha . SA$, $\beta . SB$, $\gamma . SC, . .$ der Reihe nach gleich und gleichgerichtet mit den Seiten $MN$, $NO$, $OP, . .$ gezogen werden, so ist $S$ der Schwerpunct von $\alpha . A$, $\beta . B$, $\gamma . C . . .$ *) Zieht man nämlich durch die Puncte $S$, $A$, $B, . .$ parallele Gerade von beliebiger Richtung, welche zwei parallele Ebenen von beliebiger Stellung in $S$ und $S'$, $A''$ und $A'$, $B''$ und $B', . .$ schneiden, so hat man aus den obigen Gründen

$$0 = \alpha . AA'' + \beta . BB'' + \gamma . CC'' + . .$$

---

wendungen des Schwerpunctes wurden gemacht von Pappus (Guldin s. unten 13), in neuerer Zeit von L'Huilier (polygonométrie 1789), Carnot (géom. de position 1803), umfassend von Möbius (Barycentr. Calcul. 1827), Steiner die Krümmungs-Schwerpuncte 1838 Crelle J. 21 p. 36. Die aus den Archimedeischen Gesetzen fließende den Schwerpunct charakterisirende Gleichung (Gleichung der Momente) steht an der Spitze von Commandino's Schrift de centro gravitatis 1565. Ueber dieselbe vergl. Baryc. Calc. 8 und Meier Hirsch geom. Aufg. II p. 330.

*) L'Huilier polyg. p. 86 und Carnot géom. de pos. 269 in dem Fall $\alpha = \beta = \gamma = . . .$

Zugleich ist $SS' = A''A' = B''B' = ..$, also identisch

$$(\alpha + \beta + \gamma + ..)SS' = \alpha . A''A' + \beta . B''B' + \gamma . C''C' + ..$$

folglich durch Addition

$$(\alpha + \beta + \gamma + ..)SS' = \alpha . AA' + \beta . BB' + \gamma . CC' + ..$$

3. Das System der Puncte $\alpha . A$, $\beta . B$, $\gamma . C$, .. hat nicht mehr als einen Schwerpunct $S$. Wäre ein anderer Punct $T$ Schwerpunct der gegebenen Puncte, so ziehe man durch die Puncte $S$, $T$, $A$, $B$, $C$, .. parallele Gerade von beliebiger Richtung, die von einer Ebene, welche den Punct $T$, aber nicht zugleich den Punct $S$ enthält, in $S'$, $T$, $A'$, $B'$, $C''$, .. geschnitten werden. Dann hätte man (2), weil $TT$ verschwindet,

$$0 = \alpha . AA' + \beta . BB' + \gamma . CC'' + ..$$

Nach den Voraussetzungen verschwindet aber weder $\alpha + \beta + \gamma + ..$, noch $SS'$, also ist $(\alpha + \beta + ..)SS'$ von $\alpha . AA' + \beta . BB' + ..$ verschieden, d. h. $S$ ist nicht Schwerpunct des gegebenen Systems, gegen die Voraussetzung.

Wenn die gegebenen Puncte auf einer Geraden liegen, so liegt ihr Schwerpunct auf derselben Geraden. Läge der Schwerpunct $S$ neben der Geraden $AB$, so ziehe man durch $S$, $A$, $B$, .. parallele Gerade von beliebiger Richtung und schneide dieselben durch eine Gerade, die mit $AB$ parallel ist und den Punct $S$ enthält, in $S$, $A'$, $B'$, ... Weil $SS = 0$ und $AA' = BB' = ..$, so findet man $0 = \alpha + \beta + \gamma + ..$ gegen die Voraussetzung.

Wenn die gegebenen Puncte auf einer Ebene liegen, so liegt ihr Schwerpunct auf derselben Ebene. Läge der Schwerpunct $S$ außer der Ebene $ABC$, so ziehe man durch $S$, $A$, $B$, .. parallele Gerade von beliebiger Richtung und schneide dieselben durch eine Ebene, die mit $ABC$ parallel ist und den Punct $S$ enthält, in $S$, $A'$, $B'$, ... Weil $SS = 0$ und $AA' = BB' = ..$, so findet man $0 = \alpha + \beta + ..$ gegen die Voraussetzung.

4. Der Schwerpunct $P$ von $\alpha . A$ und $\beta . B$ theilt die Strecke $AB$ nach dem Verhältniß $\beta : \alpha$, innen oder außen, je nachdem $\beta$ mit $\alpha$ dasselbe Zeichen hat oder nicht. Denn aus der Proportion $AP : PB = \beta : \alpha$ folgt die Gleichung

$$\alpha . AA' + \beta . BB' = (\alpha + \beta)PP'$$

für jede Richtung der Parallelen $AA'$, $BB'$, $PP'$ und jede Gerade, welche dieselben in $A'$, $B'$, $P'$ schneidet (Planim. §. 8, 4).

Der Schwerpunct $Q$ von $\alpha . A$, $\beta . B$ und $\gamma . C$ ist der Schwerpunct

von $(\alpha + \beta) P$ und $\gamma . C$, und theilt die Strecke $PC$ nach dem Verhältniß $\gamma : \alpha + \beta$. Denn aus der Proportion $PQ : QC = \gamma : \alpha + \beta$ fließt die Gleichung

$$(\alpha + \beta) PP' + \gamma . CC' = (\alpha + \beta + \gamma) QQ'$$

also auch

$$\alpha . AA' + \beta . BB' + \gamma . CC' = (\alpha + \beta + \gamma) QQ'$$

für jede Richtung der Parallelen und jede Ebene, welche dieselben in $A'$, $B'$, $C'$, $P'$, $Q'$ schneidet. U. s. w.

Ueberhaupt können bei der Bestimmung des Schwerpuncts von $\alpha . A$, $\beta . B$, $\gamma . C$, . . zwei oder mehr Puncte des Systems durch ihren besondern Schwerpunct ersetzt werden, dem als Coefficient die Summe der Coefficienten der zu ersetzenden Puncte gegeben wird.

Wenn einige unter den Coefficienten negativ sind, so kann man zuerst den Schwerpunct $M$ der Puncte bestimmen, welche positive Coefficienten haben, dann den Schwerpunct $N$ der Puncte mit negativen Coefficienten, endlich den Schwerpunct $S$ der Puncte $\mu . M$ und $-\nu . N$, nachdem man durch $\mu$ und $-\nu$ die Summen der positiven und der negativen Coefficienten bezeichnet hat. Dann ist $S$ der gesuchte Schwerpunct des gegebenen Systems.

5. Der Schwerpunct $Q$ der Puncte $\alpha . A$, $\beta . B$ und $\gamma . C$, welche nicht auf einer Geraden liegen, theilt die Fläche des Dreiecks $ABC$ nach der Proportion*)

$$BCQ : CAQ : ABQ : ABC = \alpha : \beta : \gamma : \alpha + \beta + \gamma$$

Ist nämlich $C_1$ der Schwerpunct von $\alpha . A$ und $\beta . B$, so ist

$$ABQ : ABC = C_1 Q : C_1 C = \gamma : \alpha + \beta + \gamma$$

weil $C_1 Q : QC = \gamma : \alpha + \beta$ (4). U. s. w.

Der Schwerpunct $R$ der Puncte $\alpha . A$, $\beta . B$, $\gamma . C$ und $\delta . D$, welche nicht auf einer Ebene liegen, theilt das Volum des Tetraeders $ABCD$ nach der Proportion

$$CBDR : ACDR : BADR : ABCR : ABCD = \alpha : \beta : \gamma : \delta : \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

Wenn man nämlich durch $A_1$ den Schwerpunct von $\beta . B$, $\gamma . C$ und $\delta . D$ bezeichnet, so ist

$$CBDR : ABCD = CBDR : CBDA = A_1 R : A_1 A = \alpha : \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

weil $A_1 R : RA = \alpha : \beta + \gamma + \delta$ (4). U. s. w.

Bei diesen Sätzen ist zu beachten, daß $ABC = BCA = CAB$, $ABC + ACB = 0$ (Planim. §. 9), $ABCD = BCAD = . .$, $ABCD + ABDC = 0$ (§. 8, 15).

---

*) Möbius Baryc. Calc. 24 ff.

Man kann jeden Punct der Geraden $AB$ als Schwerpunct von $\alpha.A$ und $\beta.B$, jeden Punct der Ebene $ABC$ als Schwerpunct von $\alpha.A$, $\beta.B$ und $\gamma.C$, jeden Punct des Raumes als Schwerpunct von $\alpha.A$, $\beta.B$, $\gamma.C$ und dem außer der Ebene $ABC$ liegenden Punct $\delta.D$ darstellen, indem man den Verhältnissen $\alpha:\beta$, $\alpha:\beta:\gamma$, $\alpha:\beta:\gamma:\delta$ die geeigneten Werthe ertheilt (Princip des barycentrischen Calculs).

**6.** Wenn die Summe der Coefficienten $\alpha + \beta + \gamma + ..$ verschwindet, so hat das System der Puncte $\alpha.A$, $\beta.B$, $\gamma.C$, .. im Allgemeinen einen in einer bestimmten Richtung unendlich fernen Schwerpunct, und die Summe

$$\alpha.AA' + \beta.BB' + \gamma.CC' + ..$$

verschwindet bei jeder Richtung der Parallelen $AA'$, $BB'$, .. unter der Bedingung, daß die in $A'$, $B'$, .. sie schneidende Ebene den Schwerpunct enthält, d. h. mit einer Geraden parallel ist, in deren Richtung der Schwerpunct des Systems liegt.*) Es sei $R$ der Schwerpunct von $\beta.B$, $\gamma.C$, .., der in endlichem Bereich liegt, weil $\beta + \gamma + ..$ nicht verschwindet, sondern den Werth $-\alpha$ hat. Der Schwerpunct des gegebenen Systems ist nun der Schwerpunct von $\alpha.A$ und $-\alpha.R$, er theilt also die Strecke $AR$ nach dem Verhältniß $-\alpha:\alpha = -1$ und liegt auf der Geraden $AR$ unendlich fern. Zieht man durch $R$, $A$, $B$, $C$, .. parallele Gerade von beliebiger Richtung, welche von einer beliebigen Ebene in $R'$, $A'$, $B'$, $C'$, .. geschnitten werden, so hat man (2)

$$\beta.BB' + \gamma.CC' + .. = (\beta + \gamma + ..)RR' = -\alpha.RR'$$

Folglich hat $\alpha.AA' + \beta.BB' + \gamma.CC' + ..$ den Werth $\alpha(AA' - RR')$, und verschwindet, wenn die schneidende Ebene mit der Geraden $AR$ parallel ist. Bezeichnet man ferner durch $Q$ den Schwerpunct von $\alpha.A$, $\gamma.C$, .., so findet man für $\alpha.AA' + \beta.BB' + \gamma.CC' + ..$ den Werth $\beta(BB' - QQ')$, der nur dann verschwindet, wenn die schneidende Ebene mit $BQ$ parallel ist. Also muß $BQ$ mit $AR$ parallel sein, u. s. w.

In dem besondern Falle, daß zugleich ein Punct des Systems der Schwerpunct der übrigen Puncte ist, ist jeder Punct des Systems der Schwerpunct der übrigen Puncte; das System aller Puncte hat keinen Schwerpunct und die Summe $\alpha.AA' + \beta.BB' + \gamma.CC' + ..$ verschwindet bei jeder Richtung der Parallelen und jeder Stellung der schneidenden Ebene. Es sei z. B. $A$ der Schwerpunct von $\beta.B$, $\gamma.C$, .. Dann hat man für jede Richtung der Parallelen und jede Stellung der schneidenden Ebene

*) Möbius Baryc. Calc. §. 9 und 10.

$$\beta . BB' + \gamma . CC' + \ldots = (\beta + \gamma + \ldots) AA'$$

Nun ist $\beta + \gamma + \ldots = -\alpha$, folglich u. s. w.

Ein solches System ohne Schwerpunct wird erhalten, indem man zu dem System $\alpha . A$, $\beta . B$, $\gamma . C$, .. seinen Schwerpunct $S$ mit dem Coefficienten $-(\alpha + \beta + \gamma + \ldots)$ hinzusetzt.

7. Wenn der Schwerpunct der Puncte $\alpha . A$, $\beta . B$, $\gamma . C$, .. durch $S$ und ein beliebiger Punct durch $O$ bezeichnet wird, so ist*)

$$\alpha . OA^2 + \beta . OB^2 + \gamma . OC^2 + \ldots - (\alpha + \beta + \gamma + \ldots) OS^2$$
$$= \frac{\alpha\beta . AB^2 + \alpha\gamma . AC^2 + \ldots + \beta\gamma . BC^2 + \ldots}{\alpha + \beta + \gamma + \ldots}$$

Beweis. Durch den Punct $O$ ziehe man wie oben (2) die Geraden $OX$, $OY$, $OZ$, jedoch so daß sie Kanten einer dreirechtwinkeligen Ecke sind. Nun projicire man die Strecken $OS$, $OA$, $OB$, $OC$, .. auf $OX$, $OY$, $OZ$ durch Ebenen, die der Reihe nach mit den Ebenen $OYZ$, $OZX$, $OXY$ parallel sind, und bezeichne die Projectionen auf $OX$ durch $x, x_1, x_2, x_3, \ldots$, auf $OY$, durch $y, y_1, y_2, y_3, \ldots$, auf $OZ$ durch $z, z_1, z_2, z_3, \ldots$ Dann ist (2)

$$(\alpha + \beta + \gamma + \ldots) x = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \ldots$$

u. s. w. Hieraus folgt

$$(\alpha + \beta + \ldots)(\alpha x_1{}^2 + \beta x_2{}^2 + \ldots) - (\alpha + \beta + \ldots)^2 x^2$$
$$= (\alpha + \beta + \ldots)(\alpha x_1{}^2 + \beta x_2{}^2 + \ldots) - (\alpha x_1 + \beta x_2 + \ldots)^2$$

Nach Entwickelung der letztern Formel bleiben keine Glieder mit den Coefficienten $\alpha^2$, $\beta^2$, .. übrig. Der Coefficient $\alpha\beta$ kommt in 3 Gliedern vor, deren Verein

$$\alpha\beta(x_1{}^2 - 2x_1x_2 + x_2{}^2) = \alpha\beta(x_1 - x_2)^2$$

ist. U. s. w. Daher findet man

$$(\alpha + \beta + \ldots)(\alpha x_1{}^2 + \beta x_2{}^2 + \ldots) - (\alpha + \beta + \ldots)^2 x^2$$
$$= \alpha\beta(x_1 - x_2)^2 + \alpha\gamma(x_1 - x_3)^2 + \ldots + \beta\gamma(x_2 - x_3)^2 + \ldots$$

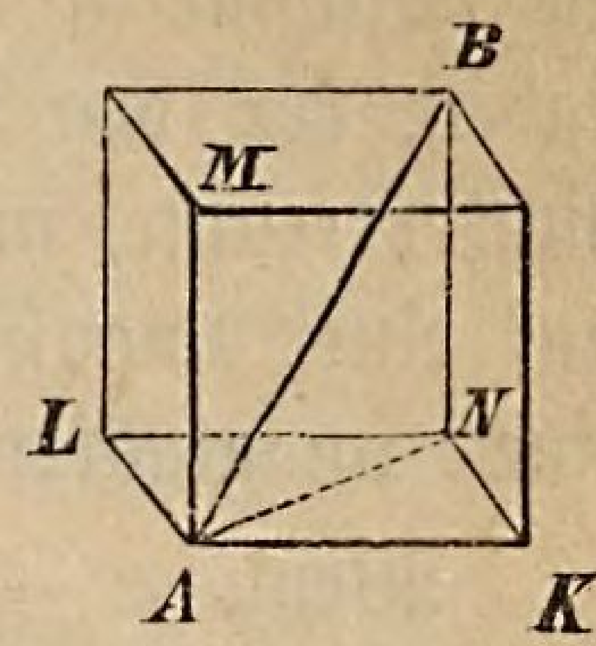
Eben so ergeben sich die Gleichungen

$$(\alpha + \beta + \ldots)(\alpha y_1{}^2 + \beta y_2{}^2 + \ldots) - (\alpha + \beta + \ldots)^2 y^2$$
$$= \alpha\beta(y_1 - y_2)^2 + \alpha\gamma(y_1 - y_3)^2 + \ldots + \beta\gamma(y_2 - y_3)^2 + \ldots$$
$$(\alpha + \beta + \ldots)(\alpha z_1{}^2 + \beta z_2{}^2 + \ldots) - (\alpha + \beta + \ldots)^2 z^2$$
$$= \alpha\beta(z_1 - z_2)^2 + \alpha\gamma(z_1 - z_3)^2 + \ldots + \beta\gamma(z_2 - z_3)^2 + \ldots$$

Die Differenzen $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$ sind aber zufolge der Construction die Normalprojectionen der Strecke $BA$ auf die Gera-

*) Lagrange's Satz (Mém. de Berlin 1783 p. 290).

den $OX$, $OY$, $OZ$, aus denen die Strecke selbst berechnet werden kann. Man ziehe durch $A$ die Geraden $AK$, $AL$, $AM$ parallel mit $OX$, $OY$, $OZ$, und lege durch $B$ Ebenen parallel mit den Ebenen $ALM$, $AMK$ $AKL$, welche die Geraden $AK$, $AL$, $AM$ in den Puncten $K$, $L$, $M$ schneiden. Hierdurch entsteht ein rechtwinkeliges Parallelepiped, dessen Kanten $AK$, $AL = KN$, $AM = NB$ die Normalprojectionen der Diagonale $AB$ auf Gerade der Richtungen $OX$, $OY$, $OZ$ sind. Nun ist nach dem Pythagoreischen Satze




$$AK^2 + KN^2 = AN^2,\ AN^2 + NB^2 = AB^2$$

folglich

$$AK^2 + AL^2 + AM^2 = AB^2$$

oder

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = AB^2$$

u. s. w. Eben so ist

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2 = OA^2, \text{ u. s. w.}$$

Demnach findet man durch Addition der 3 obigen Gleichungen

$$(\alpha + \beta + ..)(\alpha . OA^2 + \beta . OB^2 + ..) - (\alpha + \beta + ..)^2 OS^2$$
$$= \alpha\beta . AB^2 + \alpha\gamma . AC^2 + .. + \beta\gamma . BC^2 + ..$$

woraus die zu beweisende Gleichung sich ergiebt, nachdem man noch durch $\alpha + \beta + ..$ dividirt hat.

Anmerkung. Wenn der willkürliche Punct $O$ mit dem Schwerpunct $S$ zusammenfällt, so verschwindet $OS$, und man behält die Gleichung*)

$$\alpha . SA^2 + \beta . SB^2 + .. = \frac{\alpha\beta . AB^2 + \alpha\gamma . AC^2 + .. + \beta\gamma . BC^2 + ..}{\alpha + \beta + \gamma + ..}$$

8. Die Summe $\alpha . OA^2 + \beta . OB^2 + \gamma . OC^2 + ..$ behält für verschiedene Puncte $O$ einen und denselben Werth, wenn $OS$ unverändert bleibt. Wenn demnach $A$, $B$, $C$, .. gegebene Puncte, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .. gegebene Zahlen sind, deren Summe nicht verschwindet, so liegen die Puncte $O$, für welche die Summe $\alpha . OA^2 + \beta . OB^2 + ..$ einen und denselben Werth hat, auf einer Kugel, deren Centrum der Schwerpunct von $\alpha . A$, $\beta . B$, $\gamma . C$, .. ist.**)

Ueberhaupt hat zufolge der aufgestellten Gleichung die Summe

---

*) Lagrange a. a. O., und Carnot géom. de pos. 280 für den Fall $\alpha = \beta = \gamma = ...$

**) Vergl. Planim. §. 14, 22. Carnot a. a. O. Meier Hirsch geom. Aufg. II p. 336 ff.

$\alpha . OA^2 + \beta . OB^2 + ..$ einen kleinsten oder einen größten Werth, je nachdem $\alpha + \beta + ..$ positiv oder negativ ist. Ihren kleinsten oder größten Werth erreicht die Summe $\alpha . OA^2 + \beta . OB^2 + ..$, indem der beliebige Punct $O$ mit dem Schwerpunct $S$ zusammenfällt. Sollte die Summe $\alpha . OA^2 + \beta . OB^2 + ..$ einen unveränderlichen Werth haben, der den Werth $\alpha . SA^2 + \beta . SB^2 + ..$ in dem einen Falle nicht erreichte, in dem andern Falle überstiege, so würden die Puncte $O$ auf einer imaginären Kugel liegen, die zwar ein reales Centrum $S$, aber einen imaginären Radius hat.

Wenn $\alpha + \beta + \gamma + ..$ verschwindet, so liegen die Puncte $O$, für welche die Summe $\alpha . OA^2 + \beta . OB^2 + ..$ einen und denselben Werth hat, im Allgemeinen auf einer bestimmten Kugel, deren Centrum der unendlich ferne Schwerpunct des Systems $\alpha . A$, $\beta . B$, .. ist (6), d. h. auf einer bestimmten Ebene, die zu der Richtung normal steht, in welcher der unendlich ferne Schwerpunct liegt. Es sei $R$ der Schwerpunct von $\beta . B$, $\gamma . C$, ... Dann ist für jeden beliebigen Punct $O$ (7)

$$\beta . OB^2 + \gamma . OC^2 + .. - (\beta + \gamma + ..) OR^2 = \frac{\beta\gamma . BC^2 + ..}{\beta + \gamma + ..}$$

folglich, weil $\beta + \gamma + .. = -\alpha$,

$$\alpha . OA^2 + \beta . OB^2 + \gamma . OC^2 = \alpha(OA^2 - OR^2) + \frac{\beta\gamma . BC^2 + ..}{\beta + \gamma + ..}$$

Demnach bleibt die Summe $\alpha . OA^2 + \beta . OB^2 + \gamma . OC^2 + ..$ unverändert, wenn die Differenz $OA^2 - OR^2$ ihren Werth nicht verändert, d. h. wenn $O$ auf einer bestimmten Ebene liegt, deren Normale $AR$ ist (Planim. §. 14, 2).

In dem besondern Falle, daß die gegebenen Puncte $\alpha . A$, $\beta . B$, $\gamma . C$, .. keinen Schwerpunct haben, d. h. jeder dieser Puncte der Schwerpunct der übrigen ist (6), hat die Summe $\alpha . OA^2 + \beta . OB^2 + \gamma . OC^2 + ..$ für jeden beliebigen Punct $O$ denselben Werth*), der auf verschiedene Weise sich ausdrücken läßt, z. B. durch

$$\frac{\beta\gamma . BC^2 + ..}{\beta + \gamma + ..}$$

indem $OA^2 - OR^2$ verschwindet, oder durch $\beta . AB^2 + \gamma . AC^2 + ..$, indem $OA$ verschwindet, u. s. w.

9. Eine Figur (Linie, Fläche, Raum) heißt **homogen**, wenn alle ihre Puncte mit gleichen Coefficienten behaftet sind. Geometrische Figuren

*) Möbius Crelle J. 26 p. 28.

werden als homogen genommen, so lange nicht das Gegentheil ausdrücklich vorausgesetzt ist.

Der Schwerpunct einer Strecke, eines Parallelogramms, eines Parallelepipeds liegt im Centrum dieser Figuren. Denn jedem Punct $X$ einer solchen Figur entspricht ein Punct $X'$ derselben Figur dergestalt, daß das Centrum die Mitte der Strecke $XX'$ ist und daß folglich der Schwerpunct von $X$ und $X'$ im Centrum liegt. Ebendaselbst liegt der Schwerpunct der Figur d. i. der Schwerpunct von allen Paaren wie $X$ und $X'$.

Der Schwerpunct einer Figur, welche eine Axe oder eine Ebene besitzt, durch die sie in zwei gegen die Axe oder Ebene symmetrisch liegende Theile getrennt wird, liegt auf der erwähnten Axe oder Ebene. Denn jedem Punct $X$ einer solchen Figur entspricht ein Punct $X'$ derselben Figur dergestalt, daß die Strecke $XX'$ von der Axe oder Ebene normal halbirt wird, und daß der Schwerpunct von $X$ und $X'$ auf der Axe oder Ebene liegt. Der Schwerpunct der Figur liegt aber auf der Geraden oder auf der Ebene, welche die Schwerpuncte von allen Paaren wie $X$ und $X'$ enthält (4 und 3).

Eben so schließt man von einer Figur, die ein Centrum besitzt, insbesondere von jeder regulären Figur, daß ihr Schwerpunct von ihrem Centrum nicht verschieden ist.

**10.** Der Schwerpunct der Dreiecksfläche $ABC$ ist der Schwerpunct der Puncte $A$, $B$ und $C$, und theilt den Abstand der Mitte einer Seite von der gegenüberliegenden Spitze innen nach dem Verhältniß 1 : 2. Man ziehe nach der Mitte $C_1$ von $AB$ die Gerade $CC_1$, welche die Fläche $ABC$ halbirt. Jedem Punct $X$ der einen Hälfte entspricht ein Punct $X'$ der andern Hälfte dergestalt, daß die Strecke $XX'$ mit $AB$ parallel ist und von $CC_1$ halbirt wird. Die Schwerpuncte von allen Paaren wie $X$ und $X'$ liegen auf der Geraden $CC_1$, also liegt der Schwerpunct der Fläche $ABC$ auf derselben Geraden. Eben so schließt man, daß der Schwerpunct der Fläche $ABC$ auf der Geraden von $A$ nach der Mitte von $BC$ und auf der Geraden von $B$ nach der Mitte von $CA$ liegt. Der gesuchte Schwerpunct ist also der gemeinschaftliche Punct dieser Geraden, mithin der Schwerpunct der Puncte $A$, $B$ und $C$. Planim. §. 8, 4.

Der Schwerpunct des Tetraedervolums $ABCD$ ist der Schwerpunct der Puncte $A$, $B$, $C$ und $D$, und theilt den Abstand des Schwerpuncts einer Fläche von der gegenüberliegenden Spitze nach dem Verhältniß 1 : 3. Man lege durch die Mitte $C_1$ von $AB$ die Ebene $C_1CD$, welche das Volum $ABCD$ halbirt. Jedem Punct $X$ der einen

Hälfte entspricht ein Punct $X'$ der andern Hälfte dergestalt, daß die Strecke $XX'$ mit $AB$ parallel ist und von der Ebene $C_1CD$ halbirt wird. Hieraus folgt, daß der Schwerpunct des Volums $ABCD$ auf der Ebene liegt, welche eine Kante des Tetraeders und die Mitte der gegenüberliegenden Kante enthält, und daß er mit dem Schwerpunct der Puncte $A$, $B$, $C$, $D$ zusammenfällt (§. 6, 4).

Der Schwerpunct eines Pyramidenvolums theilt den Abstand des Schwerpuncts der Basis von der Spitze nach dem Verhältniß 1 : 3. Denn dieser Punct erscheint als Schwerpunct der Schwerpuncte von allen Querschnitten der Pyramide, die mit der Basis parallel sind, wenn die Coefficienten der Schwerpuncte sich verhalten wie die Querschnitte, zu denen sie gehören. Die Querschnitte sind ähnlich und perspectivisch, daher liegen ihre Schwerpuncte nebst dem Schwerpunct der Pyramide auf der Geraden, welche den Schwerpunct der Basis mit der Spitze verbindet. Der Schwerpunct der Pyramide ist aber auch der Schwerpunct für die Schwerpuncte der Tetraeder, in welche man die Pyramide durch Diagonaldreiecke zerlegen kann. Diese Schwerpuncte liegen auf der Ebene, welche mit der Basis parallel ist und den Abstand der Basis von der Spitze nach dem Verhältniß 1 : 3 theilt. Auf derselben Ebene liegt der Schwerpunct der Pyramide, folglich u. s. w.

Der Schwerpunct eines Prismenvolums ist der Schwerpunct der Fläche des Mittelschnitts, welcher die parallelen und gleichen Kanten des Prisma halbirt. Denn die Schwerpuncte von allen Strecken, die mit den Kanten des Prisma parallel und von den parallelen Flächen des Prisma begrenzt sind, liegen auf der Fläche des Mittelschnitts. Der Schwerpunct des Prismenvolums ist der Schwerpunct dieser mit gleichen Coefficienten behafteten Schwerpuncte d. h. der Fläche des Mittelschnitts, in Betracht daß alle Strecken, die durch ihre Schwerpuncte ersetzt werden, gleich sind.

Der Schwerpunct des dreiseitigen Prismenvolums $ABCA'B'C'$, dessen Mittelschnitt $A''B''C''$ ist, fällt mit dem Schwerpunct der Puncte $A''$, $B''$ und $C''$, also auch mit dem Schwerpunct der Puncte $A$, $B$, $C$, $A'$, $B'$ und $C'$ zusammen.

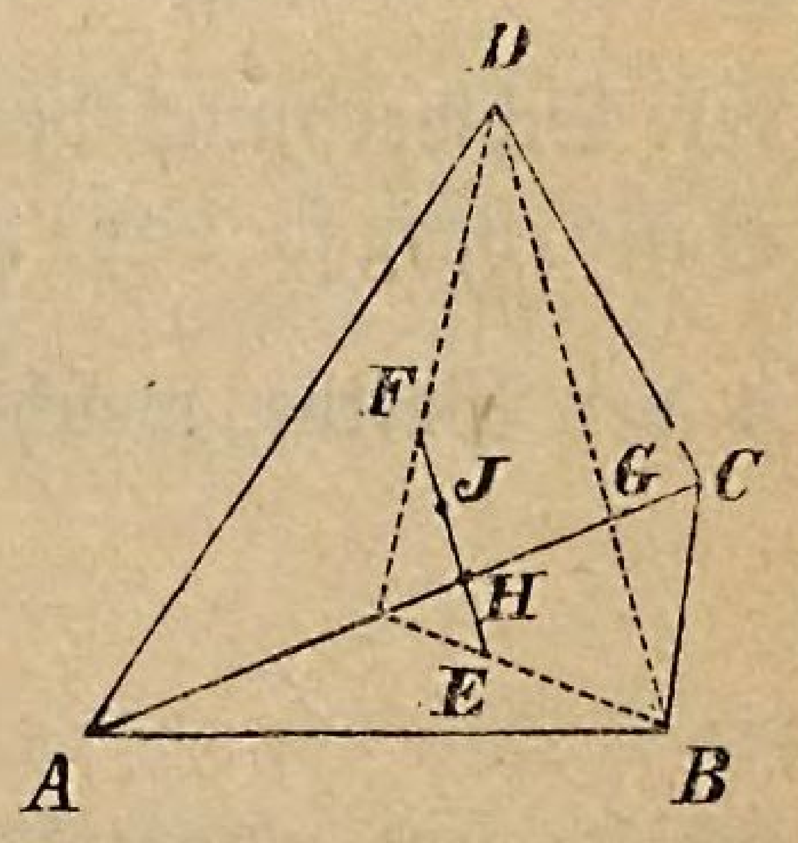
**11.** Der Schwerpunct eines Systems von Strecken, Dreiecksflächen, Tetraedervolumen ist der Schwerpunct von $\alpha . A$, $\beta . B$, $\gamma . C$, . ., wenn die Schwerpuncte der gegebenen Elemente (Strecken, u. s. w.) durch $A$, $B$, $C$, . . bezeichnet werden, und die Coefficienten $\alpha : \beta : \gamma : . .$ der Reihe nach wie die gegebenen Elemente sich verhalten (4). Hiernach läßt sich für den Perimeter eines Polygons, für die Fläche eines planen Polygons, für die Oberfläche eines Polyeders

und für das **Volum** desselben der Schwerpunct bestimmen. Bei einer krummen Linie oder Fläche nimmt man ein eingeschriebenes Polygon oder Polyeder zu Hülfe, das mit der Linie oder Fläche beliebig viel Puncte gemein hat, sucht für den Perimeter oder die Fläche des Polygons, für die Oberfläche oder das Volum des Polyeders den Schwerpunct, und bestimmt dessen Lage in dem Falle, daß das Polygon mit der Linie, das Polyeder mit der Fläche alle Puncte gemein hat. Dieser letzte Proceß erfordert in der Regel Integralrechnung.

**Der Schwerpunct für den Perimeter des Dreiecks** $ABC$ ist das Centrum des Kreises, der dem Dreieck $A'B'C'$ eingeschrieben ist. dessen Eckpuncte $A'$, $B'$, $C'$ die Mitten der Seiten $BC$, $CA$, $AB$ sind.*) Denn die Schwerpuncte der Strecken $BC$, $CA$, $AB$ sind $A'$, $B'$, $C'$ (9). Der Schwerpunct für den Perimeter $ABC$ ist also der Schwerpunct von $BC.A'$, $CA.B'$ und $AB.C'$. Der Schwerpunct von $BC.A'$ und $CA.B'$ theilt die Strecke $A'B'$ nach dem Verhältniß $CA : BC = C'A' : B'C'$ (4), und liegt auf der Halbirenden des Winkels $A'C'B'$ (Planim. §. 8, 6). U. s. w.

**Der Schwerpunct für die Oberfläche des Tetraeders** $ABCD$ ist das Centrum der Kugel, die dem Tetraeder $A'B'C'D'$ eingeschrieben ist, dessen Eckpuncte $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ die Schwerpuncte der Flächen $CBD$, $ACD$, $BAD$, $ABC$ sind.**) Denn der Schwerpunct für die gegebene Oberfläche ist der Schwerpunct von $CBD.A'$, $ACD.B'$, $BAD.C'$ und $ABC.D'$. Der Schwerpunct von $CBD.A'$ und $ACD.B'$ theilt die Strecke $A'B'$ nach dem Verhältniß $ACD : CBD = A'C'D' : C'B'D'$, und liegt auf der den Flächenwinkel $A'\overline{C'D'}B'$ halbirenden Ebene (§. 8, 13). U. s. w.

Um den **Schwerpunct für die Fläche des planen Vierecks** $ABCD$ zu construiren***), construire man die Schwerpuncte $E$ und $F$ der Dreiecksflächen $ABC$ und $ACD$, und bestimme den Schwerpunct von $ABC.E$ und $ACD.F$. Wird $BD$ von $AC$ in $G$ geschnitten, so ist $ABC : ACD = BG : GD$. Also ist der gesuchte Punct der Schwerpunct von $BG.E$ und $GD.F$ d. i. von $BG.A$, $BG.B$, $BG.C$ und $GD.A$, $GD.C$, $GD.D$. Für $BG.A$ und $GD.A$ kann $BD.A'$, für $BG.C$ und $GD.C$ kann $BD.C$, für $BG.B$




*) Poinsot Statik 150.
**) Gerono Gerg. Ann. 17 p. 330.
***) Quart. Journ. 1864 t. 6 p. 127. Dieser Schwerpunct war im 16. Jahrh. bekannt. S. Stevin Statica II prop. 6. Horner 1827 Astron. Nachr. V p. 281. Möbius Statik 113.

und $GD.D$ kann $BD.K$ gesetzt werden, nachdem man $BK = GD$ auf der Diagonale $BD$ gemacht hat (4). Demnach ist der gesuchte Punct der Schwerpunct von $A$, $C$, $K$.

Die Strecke $EF$ ist mit $BD$ parallel, und wird von $AC$ in $H$ so geschnitten, daß $EH : HF = BG : GD$. Also liegt der gesuchte Punct $J$ auf $EF$ so daß $EJ = HF$.

Dabei ist

$$ACJ + CFJ + FAJ = ACF$$
$$CFJ = CHE,\ FAJ = HAE,\ CHE + HAE = AEC$$
$$ACJ + AEC = ACF$$

folglich

$$ACJ = ACF - AEC = \tfrac{1}{3}(ACD - ABC)$$

Wenn insbesondere $CD$ parallel mit $AB$ ist, so liegt der Schwerpunct $J$ auch auf der Geraden, welche die Mitten von $AB$ und $CD$ verbindet, u. s. w.

Ueber den Schwerpunct einer sphärischen Figur s. Trigon. §. 6, 2.

**12.** Für irgend ein zwischen parallelen Ebenen enthaltenes Körpersegment kann der Abstand seines Schwerpuncts von der Basis des Segments berechnet werden, wenn der mit der Basis parallele Querschnitt des Körpers in dem beliebigen Abstand $x$ von der Basis eine gegebene Function von $x$ ist, die durch $f(x)$ bezeichnet wird. Das Prisma, dessen Basis der Querschnitt $f(x)$ und dessen Höhe der $n$te Theil der Höhe $h$ des gegebenen Segments ist, hat das Volum $\frac{h}{n}f(x)$. Sein Schwerpunct hat den Abstand $x + \frac{h}{2n}$ von der Basis des Segments (10) und den Coefficienten $\frac{h}{n}f(x)$. Wenn nun der Schwerpunct des gegebenen Körpersegments den Abstand $u$ von der Basis hat, so bilde man einerseits das Product von $u$ mit der Summe $A$ der Werthe, welche die Formel $\frac{h}{n}f(x)$ bei den Werthen von $x$

$$0,\ \frac{1}{n}h,\ \frac{2}{n}h, \ldots,\ \frac{n-1}{n}h$$

erhält; und andrerseits die Summe $B$ der Werthe, welche die Formel $\left(x + \frac{h}{2n}\right)\frac{h}{n}f(x)$ bei den angegebenen Werthen von $x$ annimmt. Das Product $uA$ wird der Summe $B$ gleich (2), wenn die willkürliche Zahl $n$ ins Unendliche wächst.

Die Summe $A$ drückt, wenn $n$ unendlich wird, das Volum des

gegebenen Körpersegments aus (§. 8, 7). Die Summe $B$ besteht aus der Summe $C$ der Glieder, welche aus der Formel $\frac{h}{n} xf(x)$ entspringen, und aus der Summe $D$ der Glieder, welche die Formel $\frac{hh}{2nn} f(x)$ darbietet. Die Summe $D$ hat aber den Werth $\frac{h}{2n} A$ und verschwindet, wenn $n$ unendlich groß wird. Also behält man zur Bestimmung von $u$ die Gleichung $uA = C$.

Wenn $f(x)$ eine ganze Function von $x$ ist, die den zweiten Grad nicht übersteigt, so ist die Formel $xf(x)$, die durch $g(x)$ bezeichnet wird, eine Function von $x$ von höchstens drittem Grade. Also hat man (§. 9, 10)

$$A = \tfrac{1}{6} h[f(0) + 4f(\tfrac{1}{2}h) + f(h)]$$
$$C = \tfrac{1}{6} h[g(0) + 4g(\tfrac{1}{2}h) + g(h)]$$

Nun ist $g(0) = 0$, $g(\frac{1}{2}h) = \frac{1}{2}hf(\frac{1}{2}h)$, $g(h) = hf(h)$, folglich*)

$$\frac{u}{h} = \frac{2f(\frac{1}{2}h) + f(h)}{f(0) + 4f(\frac{1}{2}h) + f(h)}$$

Anmerkung. Der einfachste Körper, für welchen die Höhe seines Schwerpuncts nach dieser Formel sich berechnen läßt, ist der Pyramidenstumpf. Auf dem obigen Wege wird auch für ein planes Flächensegment zwischen parallelen Sehnen der Abstand seines Schwerpuncts von der als Basis des Segments angenommenen Sehne gefunden, wenn der parallele Querschnitt des Segments eine gegebene Function seines Abstands von der Basis ist.

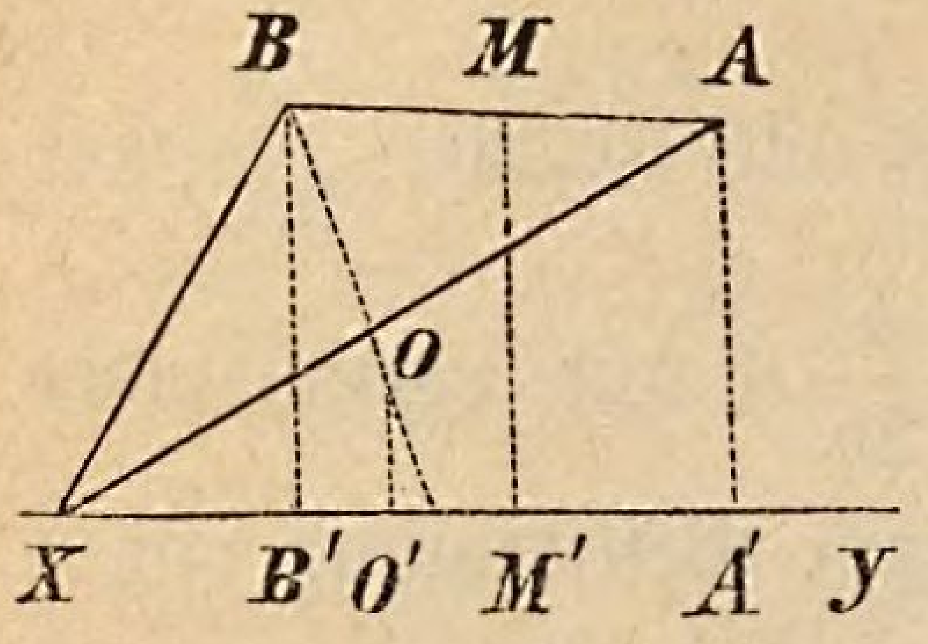
**13.** Wenn eine gegebene Planfigur um eine gegebene Gerade ihrer Ebene rotirt, so ist die von ihrem Perimeter beschriebene Rotationsfläche das Product des Perimeters mit der Bahn seines Schwerpuncts, und der von der Fläche der Planfigur beschriebene Rotationskörper ist das Product der Fläche mit der Bahn ihres Schwerpuncts.**)

---

*) Brix und August. Vergl. §. 9, 10.

**) Dieser Doppelsatz ist unter dem Namen Guldin'sche Regel bekannt. Untersuchungen über Rotationsgebilde wurden zuerst von Archimedes (Sphäroide und Conoide) angestellt, fortgesetzt von Keppler in der stereometria doliorum 1615, worin auch einzelne Fälle der Guldin'schen Regel bereits vorkommen (theor. 18 ff.). Diese Regel ist von Pappus erfunden und mitgetheilt worden am Ende der Einleitung zum 7. Buch der collect. math., in der neuern Zeit von Guldin in der zweiten Abtheilung seines Werks Centrobaryca 1640, wo die Regel an vielen Beispielen erläutert aber noch nicht allgemein bewiesen ist. Von der Guldin'schen Regel handeln ausführlich Meier Hirsch geom. Aufg. II, 160 ff. 192 f., Zehme Geom. d. Körper. 1859.

Beweis. Ein planes Polygon, von welchem eine Seite $AB$ die Mitte $M$ hat, rotire um die auf der Ebene des Polygons liegende Axe $XY$. Die Seite $AB$ beschreibt die Kegelzone $AB.2\pi.MM'$ (§. 10, 2. Anm.), wenn $MM'$ der Abstand der Mitte $M$ von der Axe ist. Der Schwerpunct $N$ des ganzen Perimeters ist der Schwerpunct von den Schwerpuncten (Mitten) der Seiten, deren Coefficienten die Seiten sind. Indem man jede Seite mit dem Abstand ihres Schwerpuncts von der Axe multiplicirt und die Producte addirt, erhält man das Product des Perimeters mit dem Abstand $NN'$ seines Schwerpuncts von der Axe (2). Also ist die Summe der von den Seiten beschriebenen Kegelzonen das Product des Perimeters mit $2\pi.NN'$ d. i. mit der von dem Schwerpunct $N$ zurückgelegten Bahn.




Zieht man $AA'$ und $BB'$ normal zur Axe $XY$, so ist das Viereck $ABXB'$ sowohl die Summe der Dreiecke $XAB + XB'A$, als auch die Summe $XB'B + BB'A = XB'B + BB'A'$ d. i. $XA'B$, folglich $XAB = XA'B - XB'A$.

Der von dem Dreieck $XA'B$ beschriebene Rotationskörper ist $\frac{1}{3}\pi . BB'^2 . XA'$ oder $XA'B . \frac{2}{3}\pi . BB'$. Bezeichnet man durch $O$ den Schwerpunct der Fläche $XA'B$ und zieht $OO'$ normal zur Axe, so ist $OO' = \frac{1}{3}BB'$, folglich der von $XA'B$ beschriebene Rotationskörper $= XA'B . 2\pi . OO'$. Eben so findet man den von $XB'A$ beschriebenen Rotationskörper $= XB'A . 2\pi . PP'$, wenn $P$ der Schwerpunct der Fläche $XB'A$ und $PP'$ normal zur Axe ist. Bezeichnet man ferner den Schwerpunct der Fläche $XAB$ d. i. $XA'B - XB'A$ durch $Q$ und zieht $QQ'$ normal zur Axe, so ist $Q$ der Schwerpunct von $XA'B . O$ und $-XB'A . P$, d. h.

$$XA'B . OO' - XB'A . PP' = XAB . QQ'$$

Daher hat der von $XAB$ beschriebene Rotationskörper das Volum $XAB . 2\pi . QQ'$.

Die Fläche der gegebenen Planfigur ist die Summe der Dreiecke, deren Basen die Theile des Perimeters sind und deren gemeinschaftliche Spitze in $X$ liegt (Planim. §. 9, 10). Der Schwerpunct $R$ der Fläche ist der Schwerpunct von den Schwerpuncten der einzelnen Dreiecksflächen, wenn diese Flächen ihren Schwerpuncten als Coefficienten beigegeben werden. Das Product der ganzen Fläche mit dem Abstand $RR'$ ihres Schwerpuncts von der Axe ist die Summe der Producte der einzelnen Dreiecksflächen mit den Abständen ihrer Schwerpuncte von der Axe (2). Also ist der von der gegebenen Planfigur beschriebene Rotationskörper das Product der bewegten Fläche mit $2\pi.RR'$ d. i. mit der von dem Schwerpunct $R$ zurückgelegten Bahn.

Wenn das Polygon $AB$.. einer Curve eingeschrieben ist und mit ihr bei unendlicher Anzahl der gemeinschaftlichen Puncte zusammenfällt, so fallen die Schwerpuncte für den Perimeter und die Fläche des Polygons mit den entsprechenden Schwerpuncten der Curve zusammen, u. s. w.

**14.** Wenn ein Kreis um eine Axe seiner Ebene rotirt, so wird die beschriebene Ringfläche und das Ringvolum nach der Guldin'schen Regel (13) gefunden. Bezeichnet man den Perimeter des Kreises durch $p$, die Fläche durch $f$, den Abstand des Centrums von der Axe durch $a$, so ist

$$\text{die Ringfläche} = p \,.\, 2\pi a$$
$$\text{das Ringvolum} = f \,.\, 2\pi a$$

weil der Schwerpunct für den Perimeter und für die Fläche mit dem Centrum zusammenfällt.

Wenn überhaupt eine mit einer Axe versehene Planfigur um eine Gerade ihrer Ebene rotirt, die mit der Axe der Figur parallel ist, so beschreiben die beiden Hälften des Perimeters $p$ und der Fläche $f$ Ringflächen und Ringvolume, deren halbe Differenzen der Fläche und dem Volum gleich sind, welche eine Hälfte der Planfigur durch Rotation um ihre eigene Axe beschreibt.*) Haben die Schwerpuncte des Perimeters und seiner beiden Hälften die Abstände $b$, $b'$, $b''$ von der Rotationsaxe, und die Abstände 0, $c$, $-c$ von der Axe der Figur, so ist $b' = b + c$, $b'' = b - c$, folglich

$$\text{die ganze Ringfläche} = p \,.\, 2\pi b$$
$$\text{» äußere »} = \tfrac{1}{2}p \,.\, 2\pi b' = \tfrac{1}{2}p \,.\, 2\pi b + \tfrac{1}{2}p \,.\, 2\pi c$$
$$\text{» innere »} = \tfrac{1}{2}p \,.\, 2\pi b'' = \tfrac{1}{2}p \,.\, 2\pi b - \tfrac{1}{2}p \,.\, 2\pi c$$

folglich die halbe Differenz der äußern und innern Ringfläche $= \frac{1}{2}p \,.\, 2\pi c$. Eben so findet man die entsprechenden Ausdrücke für die Ringvolume.

Wenn die rotirende Planfigur keine Axe, aber ein Centrum besitzt, und durch den mit der Rotationsaxe parallelen Diameter getheilt wird, so ergeben sich dieselben Resultate wie vorhin.

Kennt man das von einer Planfigur (Linie oder Fläche) durch Rotation um eine Gerade ihrer Ebene beschriebene Gebilde (Fläche oder Volum), so kann man ohne Weiteres auch das von der Planfigur durch Rotation um eine andere Gerade der Ebene beschriebene Gebilde berechnen, wenn die beiden Rotationsaxen parallel sind. Ist $A$ der Schwerpunct der rotirenden Figur $q$, und wird die erste Rotationsaxe in $B$, die andere in $C$ von der durch $A$ gehenden Normale getroffen, so erhält man für die Differenz der beiden Rotationsgebilde den Ausdruck

---

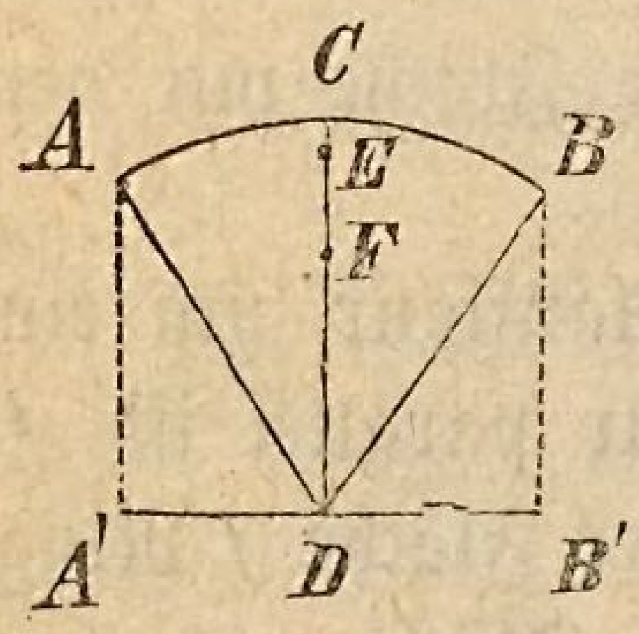
*) Meier Hirsch geom. Aufg. II, 173.

$$q.2\pi.AC - q.2\pi.AB = q.2\pi.BC$$

worin $BC$, der Abstand der beiden Rotationsaxen, positiv oder negativ ist, je nachdem die andere Axe von dem Schwerpunct eine größere oder kleinere Entfernung hat, als die erste Axe.

**15.** Wenn die Fläche und das Volum eines Rotationsgebildes gegeben ist, so können nach der Guldin'schen Regel die Schwerpuncte für den Perimeter und die Fläche der Meridianfigur bestimmt werden.*)

Z. B. der Schwerpunct $E$ des Kreisbogens $AB$ und der Schwerpunct $F$ des Kreissectors $DAB$ liegen auf dem Radius $DC$, welcher den Bogen und den Sector halbirt (9). Wenn der Bogen und der Sector um die normal zu $DC$ durch $D$ gelegte Axe rotiren, so hat man für die von dem Bogen beschriebene Fläche




$$AB.2\pi.DE = A'B'.2\pi.DC \quad (§. 10, 7)$$

wobei die Normalprojection $A'B'$ des Bogens $AB$ auf die Rotationsaxe der Sehne des Bogens gleich ist; und für das von dem Sector beschriebene Volum

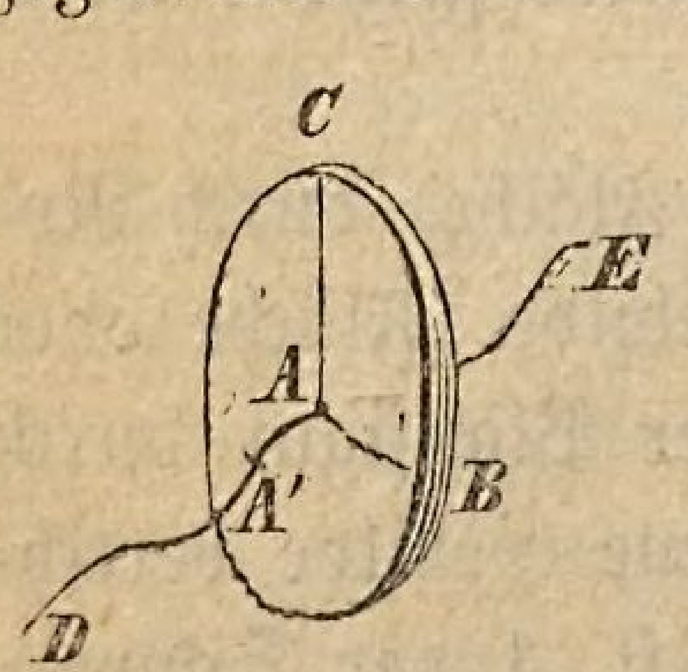
$$DAB.2\pi.DF = A'B'.\tfrac{2}{3}\pi.DC^2 \quad (§. 10, 7)$$

Nun ist der Sector $DAB = \frac{1}{2}AB.DC$, folglich

$$\frac{DE}{DC} = \frac{A'B'}{AB}, \quad DF = \frac{2}{3}\frac{A'B'}{AB}DC = \tfrac{2}{3}DE$$

**16.** Die Guldin'sche Regel dient auch dann zur Berechnung der Oberfläche und des Volums, welche eine bewegte Planfigur beschreibt, wenn die Puncte der Planfigur nicht auf parallelen Kreisen, sondern auf beliebigen andern parallelen Curven normal zur Ebene der Planfigur fortschreiten.**)

Die Planfigur $ABC$ werde so bewegt, daß der Punct $A$ auf einer gegebenen Curve $DE$ fortschreitet, daß die Ebene $ABC$ die Curve $DE$ immer normal schneidet, und daß die Gerade $AB$, welche die bewegte Planfigur einmal mit der Ebene der Curve $DE$ gemein hat, immer auf der Ebene der Curve $DE$ bleibt. Während der Punct $A$ den Bogen $AA'$ zurücklegt, beschreibt der Perimeter der Planfigur ein Stück Ringfläche und die Fläche der Planfigur ein Stück Ringvolum, die nach der Gul-




*) Meier Hirsch geom. Aufg. II, 192.

**) Diese Bemerkung ist zum Theil von Leibniz gemacht worden. Acta Erud. 1695 p. 493. Euler hat in der Abhandlung „über krumme Cylinder" 1778 (Nov. Act. Petrop. 12 p. 91) die nähern Bedingungen festgestellt. Vergl. Meier Hirsch geom. Aufg. II, §. 174 ff. (davon einiges ungenau) und Poisson Mécan. 84.

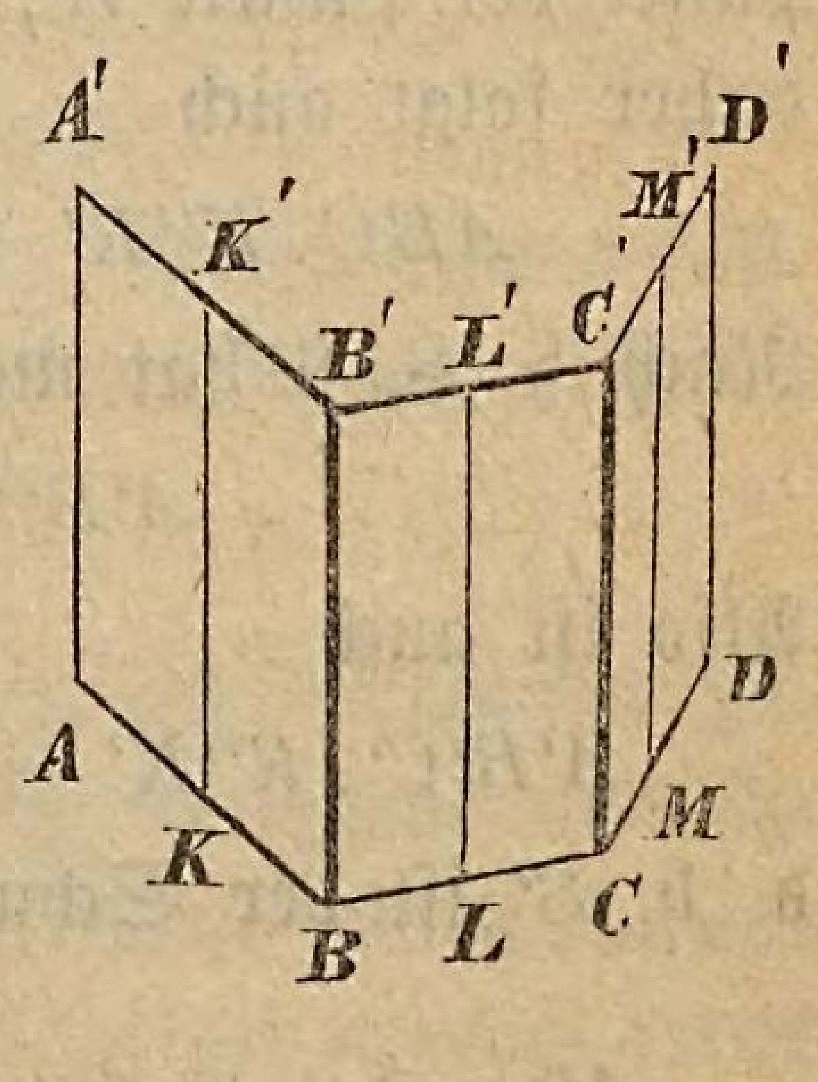
din'schen Regel desto genauer gefunden werden, je kleiner der Bogen $AA'$ ist. Man kann nämlich das beschriebene Stück Ringfläche oder Ringvolum durch ein Stück der Ringfläche oder des Ringvolums ersetzen, welche die Planfigur $ABC$ beschreibt, wenn sie um die Axe zu rotiren beginnt, die auf der Ebene $ABC$ normal zu $AB$ durch das Krümmungscentrum des Bogens $AA'$ geht. Die Summe aller Stücke ist das Product von dem Perimeter oder der Fläche der Planfigur mit der Summe aller Bahnen des zugehörigen Schwerpuncts. Die Bahn des Schwerpuncts ist von der parallelen Bahn des Punctes $A$ der Länge nach nicht verschieden.

Die Curve $DE$ kann auch uneben sein. Dann hat man unter ihrer Ebene in dem Punct $A$ diejenige zu verstehen, welche den verschwindenden Bogen $AA'$ und dessen Krümmungscentrum enthält. U. s. w.

17. Unter einem Prismenhuf (ungula, onglet) wird der Theil eines Prisma verstanden, welchen zwei nicht parallele Ebenen begrenzen. Man construire einen Normalschnitt des Prisma, bestimme den Schwerpunct seines Perimeters und ziehe durch diesen Punct die Gerade, welche mit den Kanten des Prisma parallel ist. Das Stück dieser Geraden, welches zwischen den nicht parallelen Ebenen enthalten ist, die den Huf begrenzen, heißt die Schwerkante (barycentrische Kante) für die Perimeter der Normalschnitte.

Die prismatische (cylindrische) Huffläche ist das Product des Perimeters ihres Normalschnitts mit der zugehörigen Schwerkante.*)

Beweis. $ABCD$ . . ist ein Normalschnitt des Prisma, $K$, $L$, $M$, . . sind die Mitten von $AB$, $BC$, $CD$, . . . Der Schwerpunct $S$ des Perimeters $ABCD$ . . ist der Schwerpunct von $AB.K$, $BC.L$, $CD.M$, . . . Werden nun die durch $A$, $B$, $C$, . . gehenden Kanten und die durch $S$, $K$, $L$, $M$, . . gehenden Parallelen von einer beliebigen Ebene in $A'$, $B'$, $C'$, . . und $S'$, $K'$, $L'$, $M'$, . . geschnitten, so hat man (2)




$$AB.KK' + BC.LL' + CD.MM' + .. = (AB + BC + ..)SS'$$

Eben so ist, wenn eine andere Ebene dieselben Geraden schneidet,

$$AB.KK'' + BC.LL'' + CD.MM'' + .. = (AB + BC + ..)SS''$$

folglich durch Subtraction

*) Die Cylinderhufe sind zuerst von Gregorius a. St. Vincentio (opus geom. 1647) ohne barycentrische Betrachtungen complanirt und cubirt worden. Meier Hirsch (geom. Aufg. II, 163) hat den obigen umfassenden Satz nicht ganz correct dargestellt, wie von Steiner u. A. erinnert worden ist.

$$AB.K'K'' + BC.L'L'' + .. = (AB + BC + ..)S'S''$$

Nun ist der auf der Ebene $ABB'A'$ liegende Theil der Hufflâche $= AB.K'K''$, u. s. w., $S'S''$ die Schwerkante für die Perimeter der Normalschnitte, also u. s. w.

Anmerkung. Zwei Hufe eines Prisma (Cylinder) haben gleiche Flächen (Zonen), wenn ihre Schwerkanten in Bezug auf die Perimeter der Normalschnitte des Prisma von gleicher Länge sind.

18. Die Schwerpuncte der Flächen von allen Schnitten eines Prisma liegen auf einer Geraden, die mit den Kanten des Prisma parallel ist.*)

Beweis. Die Flächen der Dreiecke $ABC$, $ACD$, .., aus denen ein Schnitt $ABCD$.. des Prisma besteht, haben die Schwerpuncte $K$, $L$, .., die Fläche des Schnitts $ABCD$.. hat den Schwerpunct $S$. Zieht man durch die Puncte $S$, $K$, $L$, .. parallel mit den Kanten des Prisma Gerade, welche die Ebene eines andern Schnitts $A'B'C'D'$.. des Prisma in $S'$, $K'$, $L'$, .. schneiden, so ist

$$AA' + BB' + CC' = 3KK',\ AA' + CC' + DD' = 3LL', ..$$
$$ABC.KK' + ACD.LL' + .. = (ABCD..)SS'$$

Zieht man ferner durch die Puncte $A'$, $B'$, .. Parallelen von beliebiger Richtung, welche die Ebene $ABC$ in $A''$, $B''$, .. schneiden, so sind die Ebenen $AA'A''$, $BB'B''$, .. parallel und die auf denselben liegenden Dreiecke ähnlich, also

$$A''A' : B''B' : .. = AA' : BB' : ..$$

Daher ist $A''A' + B''B' + C''C' = 3K''K'$, d. h. $K'$ der Schwerpunct der Puncte $A'$, $B'$ und $C'$ oder der Fläche $A'B'C'$, u. s. w. Ebendaher folgt auch

$$ABC.K''K' + ACD.L''L' = .. = (ABCD..)S''S'$$

Nach §. 8, 6 hat man aber die Proportion der Flächen

$$A'B'C' : A'C'D' : .. = ABC : ACD : ..$$

Also ist auch

$$A'B'C'.K''K' + A'C'D'.L''L' + .. = (A'B'C'D'..)S''S'$$

d. h. $S'$ ist der Schwerpunct der Fläche $A'B'C'D'$...

19. Zur Cubatur eines Prismenhufs bestimme man für die Fläche der Basis des Hufs den Schwerpunct und ziehe durch denselben die mit den Kanten des Prisma parallele Gerade. Das Stück derselben, welches zwischen den nicht parallelen Ebenen enthalten ist, die den Huf be-

*) Meier Hirsch a. a. O. 161.

grenzen, heißt die Schwerkante für die Flächen der Prismenschnitte (18).

Das Volum des Prismenhufs ist das Product der Fläche des Normalschnitts des Prisma mit der zugehörigen Schwerkante.*)

Beweis. $A'B'C'D'$.. und $A''B''C''D''$.. sind die Schnitte des Prisma, die den Huf begrenzen, $ABCD$.. ist ein Normalschnitt des Prisma. Die Geraden, welche parallel mit den Kanten des Prisma durch die Schwerpuncte $K, L, .. S$ der Flächen $ABC, ACD, .., ABCD..$ gezogen werden, schneiden die Ebenen der Schnitte in $K', L', .., S'$ und $K'', L'', .., S''$ so daß

$$ABC.KK' + ACD.LL' + .. = (ABCD..)SS'$$
$$ABC.KK'' + ACD.LL'' + .. = (ABCD..)SS''$$

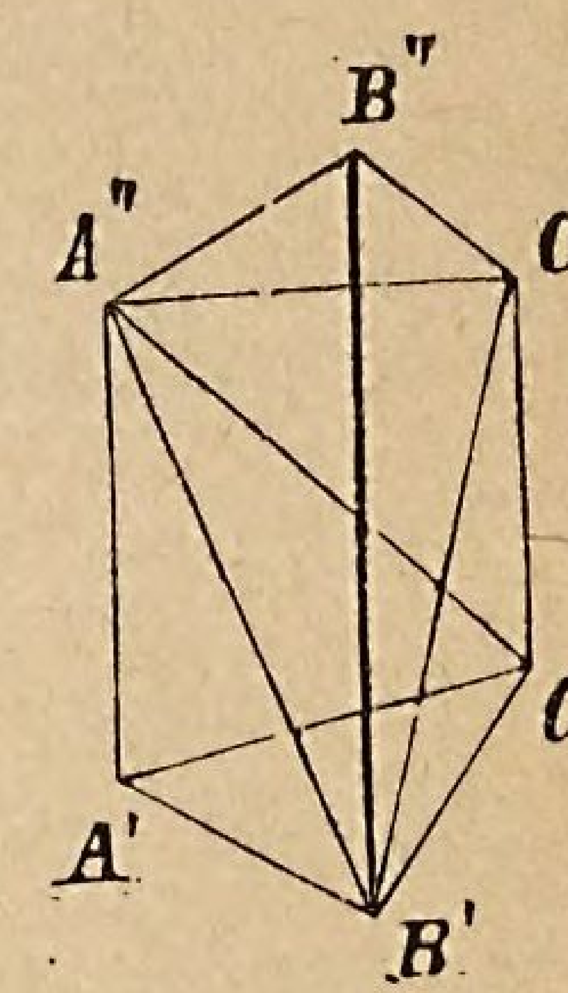
folglich $ABC.K'K'' + ACD.L'L'' + .. = (ABCD..)S'S''$

Der dreiseitige Prismenhuf $A'B'C'A''B''C''$ wird durch die Diagonaldreiecke $A''B'C'$ und $A''B'C''$ in die dreiseitigen Pyramiden $A'B'C'A''$, $A''B'C'C''$ und $A''B'C''B''$ zerlegt. Davon ist

$$A''B'C'C'' = A'B'C'C''$$

weil $A''A'$ mit der Fläche $B'C'C''$ parallel ist, und

$$A''B'C''B'' = A'B'C''B'' = A'B'C'B''$$




weil $A''A'$ mit der Fläche $B'C''B''$ und $C''C'$ mit der Fläche $A'B'B''$ parallel ist. Nun ist $A'B'C'A''$ der dritte Theil des Prisma, dessen Normalschnitt $ABC$ und dessen Längenkante $A'A''$ ist, u. s. w. Also ist der dreiseitige Prismenhuf $A'BC'A''B''C''$

$$= \frac{1}{3}ABC(A'A'' + B'B'' + C'C'') = ABC.K'K''$$

folglich der ganze Prismenhuf

$$= ABC.K'K'' + ACD.L'L'' + .. = (ABCD..)S'S''$$

Anmerkung. Insbesondere haben zwei Hufe eines Prisma (Cylinder) gleiche Volume, wenn ihre Schwerkanten in Bezug auf die Schnittflächen des Prisma von gleicher Länge sind.

**20.** Das Volum eines Polyeders kann aus Prismenhufen zusammengesetzt werden**), wie die Fläche eines planen Polygons aus begrenzten Streifen (Planim. §. 10, 6). Man ziehe durch die Eckpuncte Parallelen von beliebiger Richtung und schneide dieselben normal durch eine Ebene. Dadurch erhält man soviel Prismenhufe als Flächen des

---

*) Meier Hirsch a. a. O. 162. Vergl. Steiner Crelle J. 16 p. 90. Die Zerlegung des dreiseitigen Prismenhufs ist von Legendre (Elém. de géom. VI, 22) gegeben worden.

**) Meier Hirsch a. a. O. 165.

Polyeders, und von jeder Fläche ihre Normalprojection auf die schneidende Ebene. Bezeichnet man die Schwerpuncte der einzelnen Flächen durch $A$, $B$, $C$, . ., die Normalprojectionen dieser Puncte auf die schneidende Ebene durch $A'$, $B'$, $C'$, . ., und die Normalprojectionen der Flächen durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, . ., so haben die Hufe die Werthe $\alpha . AA'$, $\beta . BB'$, $\gamma . CC'$, . . (19), und das Volum des Polyeders ist die Summe

$$\alpha . AA' + \beta . BB' + \gamma . CC' + \ldots$$

Durch die Perimeter der Flächen des Polyeders (§. 8, 16) sind die Perimeter der Normalprojectionen dieser Flächen, mithin die Zeichen von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, . . bestimmt.

Die Summe der Normalprojectionen der Flächen eines Polyeders $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$ ist null (vergl. unten Trigon. §. 6, 3), also hat das System $\alpha . A$, $\beta . B$, $\gamma . C$, . . einen unendlich fernen Schwerpunct (6). Wenn insbesondere das System $\alpha . A$, $\beta . B$, . . keinen Schwerpunct hat, so ist das Volum des Polyeders null.

# Sechstes Buch.

---

# Trigonometrie.

## §. 1. Von dem Sinus.

**1.** Wenn eine Figur eine andere Figur aus dem Grunde deckt, weil sie mit ihr gewisse Elemente gemein hat, so ist sie durch diese Elemente eindeutig bestimmt. Es ist z. B. eine Gerade durch 2 Puncte, ein Kreis durch 3 Puncte, eine Kugel durch 4 Puncte eindeutig (unzweideutig) bestimmt. Wenn es aber $m$ verschiedene Figuren giebt, welche gewisse Elemente gemein haben, und wenn eine gegebene Figur eine dieser Figuren aus dem Grunde deckt, weil sie mit ihr die erwähnten Elemente gemein hat, so ist die Figur durch diese Elemente $m$deutig bestimmt. Es ist z. B. ein Dreieck durch 2 Seiten und den davon eingeschlossenen Winkel, durch eine Seite und die daran liegenden Winkel, durch die 3 Seiten eindeutig, durch 2 Seiten und den der kleinern gegenüberliegenden Winkel zweideutig bestimmt. Ein Kreis ist durch 3 Tangenten 4deutig, eine Kugel durch 4 Tangentenebenen 8deutig bestimmt. U. s. w.

Zur Bestimmung eines Dreiecks sind $2.3 - 3$ Elemente erforderlich. Zur Bestimmung eines vierten Punctes auf der Ebene des Dreiecks sind 2 Elemente erforderlich, also braucht man zur Bestimmung eines planen 4Ecks, 5Ecks, . ., $n$Ecks

$$2.4 - 3,\ 2.5 - 3,\ ..,\ 2n - 3$$

Elemente, die von einander unabhängig sind. Anstatt derselben können auch eben so viel von einander unabhängige Functionen der Elemente gegeben werden.

Zur Bestimmung eines vierten Punctes im Raume braucht man 3 Elemente, also sind zur Bestimmung eines räumlichen Vierecks 6 d. i. $3.4 - 6$, zur Bestimmung eines räumlichen 5Ecks, 6Ecks, . ., $e$Ecks

$$3.5 - 6,\ 3.6 - 6,\ ..,\ 3e - 6$$

Elemente erforderlich.

Anmerkung. Zur Bestimmung eines Polyeders, welches weder prismatisch noch mehr oder weniger regulär ist, sind so viel Elemente erforderlich, als das Polyeder Kanten hat.*) Das Polyeder habe $e$

---

*) Legendre Géom. Note 8. Möbius Statik 246.

Ecken, $f$ Flächen und $k$ Kanten. Die gegenseitige Lage der $e$ Eckpuncte würde im Allgemeinen durch $3e - 6$ Elemente bestimmt sein. Wenn aber die Flächen des Polyeders der Reihe nach $n_1$, $n_2$, $n_3$, . . Seiten haben, so liegen $n_1 - 3$ Eckpuncte der ersten Fläche, $n_2 - 3$ Eckpuncte der zweiten Fläche, . . jedesmal auf der Ebene der 3 übrigen Eckpuncte; die Bestimmung dieser Puncte erfordert demnach je 1 Element weniger. Also ist das Polyeder durch

$$3e - 6 - (n_1 - 3) - (n_2 - 3) - (n_3 - 3) - \ldots$$

Elemente bestimmt. Die Anzahl der Subtrahenden ist $f$, die Summe $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots$ ist $2k$, ferner ist $3e + 3f - 6 = 3k$ (Stereom. §. 7, 2), folglich

$$3e - 6 - (n_1 - 3) - (n_2 - 3) - \ldots = k$$

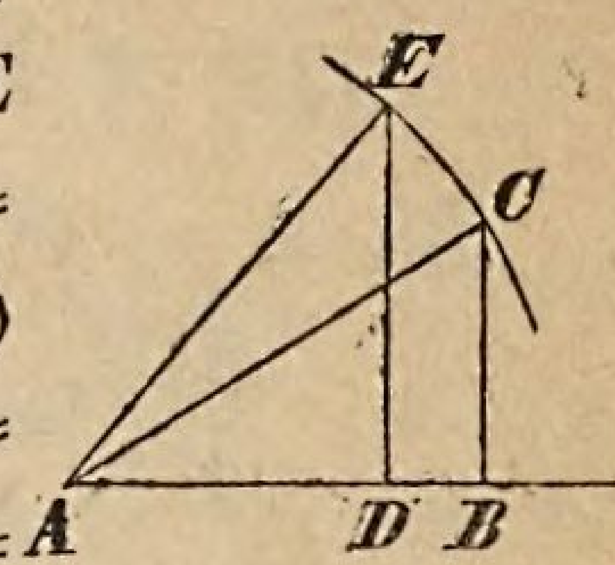
Die Anzahl $k$ erreicht den Werth $3e - 6$ in dem Falle, daß alle Flächen des Polyeders Dreiecke sind. In der That ist dann $3f = 2k$, u. s. w.

2. An die Erkenntniß, daß eine Figur durch $n$ ihrer Elemente bestimmt ist, schließt sich die Aufgabe, aus den $n$ bestimmenden (gegebenen) Elementen nicht nur die Figur zu construiren, sondern auch die übrigen bestimmten (unbekannten) Elemente der Figur zu berechnen. Die Mittel zur Construction der Figuren sind in der reinen Geometrie selbst enthalten, und werden zum Theil für technische Zwecke besonders ausgebildet in der angewandten Disciplin, welche den Namen descriptive Geometrie führt. Von den Mitteln zur Berechnung der bestimmten aus den bestimmenden Elementen einer Figur handelt die Trigonometrie. Nun wird zwar in der Geometrie gelehrt, wie man einen Winkel eines planen Polygons aus den übrigen Winkeln desselben, eine Seite eines rechtwinkeligen Dreiecks aus den beiden andern Seiten, die Fläche eines Dreiecks aus seiner Basis und der Höhe oder aus den drei Seiten berechnen kann, u. s. w. Es giebt aber noch andere metrische Relationen unter den Elementen einer Figur, die auf dem Gebrauch der sogenannten trigonometrischen Functionen beruhen, und diese vorzugsweise bilden den Inhalt der eigentlichen Trigonometrie.

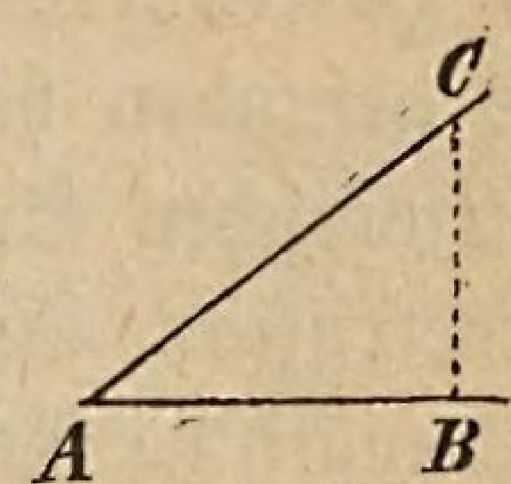
Besondere Abschnitte der Trigonometrie, in denen die metrischen Relationen unter den Elementen eines Vierecks, Polygons, Tetraeders, Polyeders zur Betrachtung kommen, werden durch die Namen Tetragonometrie, Polygonometrie, Tetraedrometrie, Polyedrometrie bezeichnet. Je nachdem die Figuren plan oder sphärisch sind, wird auch die von ihnen handelnde Trigonometrie plan oder sphärisch genannt.

3. Bei einem geradlinigen Dreieck sind die Verhältnisse der Seiten zu einander durch die Winkel bestimmt. Denn wenn zwei Dreiecke die Winkel der Reihe nach gleich haben, so sind sie ähnlich, u. s. w.

Wenn insbesondere das Dreieck rechtwinkelig ist, so wird durch einen spitzen Winkel desselben das Verhältniß von je zwei seiner Seiten bestimmt, z. B. das Verhältniß der gegenüberliegenden Cathete zur Hypotenuse. Wenn der spitze Winkel wächst, so wächst auch das Verhältniß der gegenüberliegenden Cathete zur Hypotenuse. Ist der Winkel $BAE > BAC$, und die Hypotenuse $AE$ der Hypotenuse $AC$ gleich, so ist die Cathete $DE$ größer als die Cathete $BC$ (Planim. §. 5, 6), folglich $DE : AE > BC : AC$. Daher ist das Verhältniß einer Cathete zur Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks eine bestimmte Function des Winkels, welcher der Cathete gegenüberliegt, eine goniometrische oder trigonometrische Function, und wird der Sinus des Winkels*) genannt. Vergl. Algebra §. 2.




4. Unter dem Sinus eines spitzen Winkels wird demnach das Verhältniß der gegenüberliegenden Cathete zur Hypotenuse eines beliebig von dem Winkel abgeschnittenen rechtwinkeligen Dreiecks verstanden. Der Sinus des Winkels $A$ wird durch $\sin A$ bezeichnet; und wenn $BC$ zu dem Schenkel $AB$ des Winkels $A$ normal steht, so hat man




$$\sin A = \frac{BC}{AC}$$

Der Sinus eines spitzen Winkels ist eine unbenannte Zahl (Verhältniß) zwischen 0 und 1, weil eine Cathete des rechtwinkeligen Dreiecks kleiner ist als die Hypotenuse.

Wenn der Winkel von 0 bis $90^0$ wächst, so wächst sein Sinus von 0 bis 1. Unter der Voraussetzung nämlich, daß die Hypotenuse $AC$ unverändert ihre Länge behält, erreicht die Cathete $BC$, wenn der Winkel verschwindet, den Werth 0, und wenn der Winkel recht wird, die

---

*) Das Wort Sinus ist die lateinische Uebersetzung eines bei den arabischen Astronomen, namentlich seit Albatenius (Al Batani um 900) gebräuchlichen Kunstworts. Die im 12ten Jahrhundert von Plato Tiburtinus verfertigte und 1537 zu Nürnberg gedruckte lateinische Uebersetzung eines astronomischen Werks von Albatani ist die erste bekannte Schrift, welche das Wort Sinus und den Anfang einer Umgestaltung der griechischen Trigonometrie enthält (de motu stellarum cap. 3 p. 6). S. Pfleiderer Trigonometrie 1802 p. 14. Delambre hist. de l'astron. du moyen âge 1819.

Größe $AC$. Man hat also die Grenzwerthe

$$\sin 0 = 0, \ \sin 90^0 = 1$$

5. Von den elementar construirbaren Winkeln können die Sinus nach bekannten planimetrischen Sätzen berechnet werden.

Ist $A = 45^0$, so ist $BC = AB$, $2BC^2 = AC^2$ nach dem Pythagoreischen Satz, also

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \tfrac{1}{2}, \ \frac{BC}{AC} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \sin 45^0 = 0{,}7071\,..$$

Ist $A = 60^0$, so ist $AB = \frac{1}{2}AC$, $\frac{1}{4}AC^2 + BC^2 = AC^2$, folglich

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \tfrac{3}{4}, \ \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \sin 60^0 = 0{,}8660\,..$$

Ist $A = 30^0$, so ist $BC = \frac{1}{2}AC$, also $\sin 30^0 = 0{,}5$.

Ist $A = 18^0$, so ist $BC$ dem halben goldnen Abschnitt von $AC$ gleich (Planim. §. 11, 6), also

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \ \sin 18^0 = 0{,}3090\,..$$

Von andern Winkeln, welche Summen oder Differenzen, Zweifache oder Hälften, u. s. w. von solchen Winkeln sind, deren Sinus man bereits gefunden hat, können die Sinus berechnet werden auf Grund des Ptolemäischen Satzes (Planim. §. 14, 15) oder des entsprechenden goniometrischen Satzes. Vergl. unten §. 4, 6 und 7. Auch bietet die mathematische Analysis die umfassendsten Mittel zur directen Berechnung der Sinus aller Winkel (Allg. Arithm. §. 31, 7).

Man ist daher im Stande gewesen, Tabellen zusammenzustellen, welche zu jedem Winkel von 0 bis $90^0$ nicht nur den Sinus, sondern auch den gemeinen Logarithmus desselben mit hinreichender Genauigkeit enthalten.*) Die Logarithmen der Sinus sind negativ, und erhalten

---

*) Die Griechen haben zu allen von 0 bis $180^0$ um halbe Grade verschiedenen Centriwinkeln die Verhältnisse ihrer Sehnen zum Radius berechnet, und dabei den Radius in 60 Theile (μοῖραι), jeden Theil in 60 Minuten, jede Minute in 60 Secunden getheilt. Die ältesten Schriften, welche von den erforderlichen metrischen Relationen der Kreissehnen handelten, waren nach Theon's Zeugniß (im Commentar zum Almagest) von Hipparchus und Menelaus verfaßt. Die Tabelle der Sehnenverhältnisse und eine einfache Methode, nach welcher die Tabelle construirt werden kann, ist von Ptolemäus (Almagest I, 9) mitgetheilt. Vergl. Kästner geom. Abhandl. I p. 525, II p. 354. Weil der Sinus eines Peripheriewinkels das Verhältniß der gegenüberliegenden Sehne zum Diameter ist, so konnten die Araber aus der Ptolemäischen Tabelle sofort die Tabelle der in Sexagesimalbrüchen ausgedrückten Sinus ableiten, indem sie die Centriwinkel und die nebenstehenden Verhältnisse ihrer Sehnen zum Radius halbirten. Statt der Sexagesimalbrüche wurden die Decimalbrüche in die Sinustabellen eingeführt durch die deutschen Astronomen Peurbach und Regiomontan 1450. Die (natürlichen) Logarithmen der Sinus sind

gewöhnlich die negative Kennziffer $-10$, die deshalb in den Tabellen und in den Rechnungen weggelassen wird.

In der Tabelle der Sinus (der Logarithmen der Sinus) wird nicht nur zu jedem gegebenen Winkel sein Sinus (dessen Logarithmus), sondern auch zu jedem gegebenen Sinus (dessen Logarithmus) der entsprechende Winkel gefunden mit einer Genauigkeit, die durch die Genauigkeit der in der Tabelle verzeichneten Zahlen bestimmt ist. Die erforderlichen Interpolationen werden nach denselben Regeln wie bei andern mathematischen Tabellen (Algebra §. 2, 4. Allg. Arithm. §. 20, 4) verrichtet.

I. In den Tabellen*) liegt der Winkel $23^0\,17'$ zwischen $23^0\,10'$ und $23^0\,20'$, deren Differenz $10'$ beträgt, und $\sin 23^0\,17'$ zwischen 0,3934 und 0,3961, deren Differenz 0,0027 ist. Wenn der Winkel $23^0\,10'$ um 10, 1, 7 Minuten steigt, so steigt sein Sinus um 27, $\frac{27}{10}$, $\frac{27.7}{10}$ Zehntausendtel. Also ist $\sin 23^0\,17' = 0{,}3934 + 0{,}0019 = 0{,}3953$.

Eben so findet man $\log \sin 23^0\,17' = 9{,}5948 + 0{,}0021 = 9{,}5969$ aus den Werthen von $\log \sin 23^0\,10'$ und $\log \sin 23^0\,20'$, deren Differenz 0,0030 mit 0,7 multiplicirt wegen der $7'$ zu $\log \sin 23^0\,10'$ addirt wird. Die Kennziffer $-10$ ist hinzuzudenken.

II. In der Colonne der Sinus liegt $\sin x = \frac{3}{4} = 0{,}7500$ zwischen 0,7490 und 0,7509, deren Differenz 0,0019 ist, also der Winkel $x$ zwischen $48^0\,30'$ und $48^0\,40'$, deren Differenz $10'$ beträgt. Wenn der Sinus 0,7490 um 19, 1, 10 Zehntausendtel steigt, so steigt sein Winkel um 10, $\frac{10}{19}$, $\frac{10.10}{19}$ Minuten. Also ist $x = 38^0\,30' + 5',3 = 48^0\,35',3$.

Wenn $\log \sin x = 9{,}8751$ ($-10$ wird hinzugedacht), so findet man $x = 48^0\,35',4$ aus den zu 9,8745 und 9,8756 gehörigen Winkeln, deren Differenz $10'$ mit $\frac{6}{11}$ multiplicirt wegen der übrigen 0,0006 zu $48^0\,30'$ addirt wird.

**6.** Die Gleichung (4)

$$\sin A = \frac{BC}{AC}$$

welche für das rechtwinkelige Dreieck gilt, dessen Hypotenuse $AC$ ist, und welche den Sinus des Winkels $A$ definirt, ist die Relation zwischen

---

von Neper 1614 erfunden worden (Allg. Arithm. §. 19). Tabellen von der jetzt gebräuchlichen Art wurden bald darauf von Briggs und Vlacq 1628 vollendet.

*) J. H. T. Müller's vierstellige Logarithmen. 2te Aufl. 1860.

der Hypotenuse, einer Cathete und dem gegenüberliegenden Winkel eines rechtwinkeligen Dreiecks. Man hat demnach

$$BC = AC \,.\, \sin A, \quad AC = \frac{BC}{\sin A}$$

Eine Cathete ist das Product der Hypotenuse mit dem Sinus des der Cathete gegenüberliegenden Winkels.

Die Hypotenuse ist der Quotient einer Cathete durch den Sinus des der Cathete gegenüberliegenden Winkels.

Insbesondere ist eine Kreissehne das Product des Diameters mit dem Sinus des auf der Sehne stehenden Peripheriewinkels, weil der auf dem Diameter stehende Peripheriewinkel recht ist.

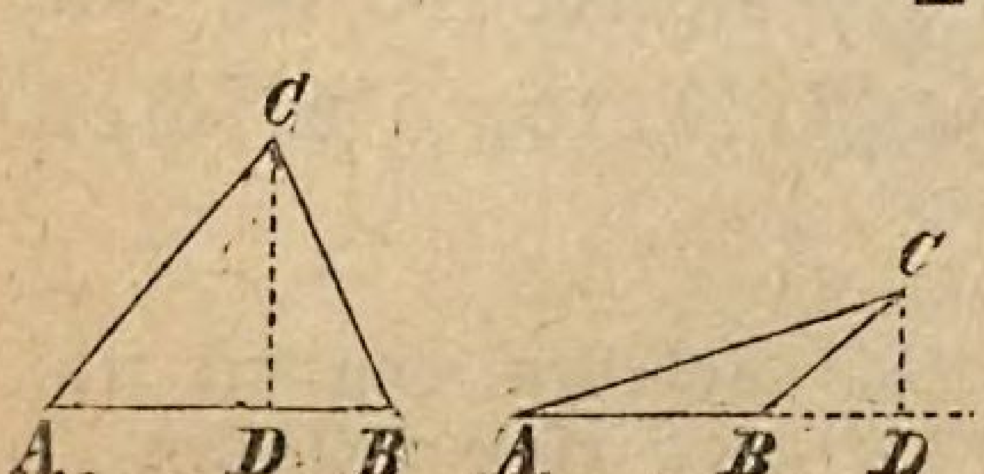
Diese Gleichungen enthalten die Lösung der trigonometrischen Aufgaben: 1) aus der Hypotenuse und einer Cathete den der Cathete gegenüberliegenden Winkel zu berechnen, 2) aus der Hypotenuse und einem spitzen Winkel die dem Winkel gegenüberliegende Cathete zu berechnen, 3) aus einer Cathete und dem gegenüberliegenden Winkel die Hypotenuse zu berechnen.

Beispiele.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $BC$ | 718 | $\log BC$ | 2,8561 |
| $AC$ | 922,4 | $\log AC$ | 2,9649 |
| $A$ | $51^0 7'$ | $\log \sin A$ | 9,8912 |
| $AC$ | 5,27 | $\log AC$ | 0,7218 |
| $A$ | $41^0 26'$ | $\log \sin A$ | 9,8207 |
| $BC$ | 3,4875 | $\log BC$ | 0,5425 |
| $BC$ | 25,7 | $\log BC$ | 1,4099 |
| $A$ | $81^0 47'$ | $\log \sin A$ | 9,9955 |
| $AC$ | 25,965 | $\log AC$ | 1,4144 |

7. Die Fläche eines Dreiecks ist das halbe Product von zwei Seiten mit dem Sinus des von den beiden Seiten eingeschlossenen Winkels. Dabei hat man unter dem Sinus eines stumpfen Winkels den Sinus seines spitzen Supplements zu verstehn. Bezeichnet man die Fläche des Dreiecks $ABC$ durch $\Delta$, so hat man

$$\Delta = \tfrac{1}{2} AB \,.\, BC \,.\, \sin CBA$$

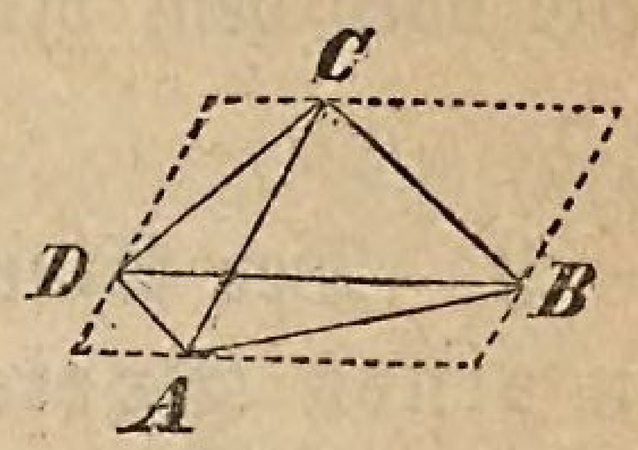



Beweis. Die Höhe $DC$ des Dreiecks $ABC$ ist eine Cathete des rechtwinkeligen Dreiecks $BCD$, dessen Hypotenuse $BC$ ist. Daher hat man in Rücksicht auf Planim. §. 10, 4

$$DC = BC \,.\, \sin CBD \quad (6)$$
$$\Delta = \tfrac{1}{2} AB \,.\, DC = \tfrac{1}{2} AB \,.\, BC \,.\, \sin CBA$$

wenn $CBA$ spitz ist, und wenn man den stumpfen Winkel $CBA$ durch sein spitzes Supplement $DBC$ ersetzt.

Anwendung. Die Fläche eines Parallelogramms ist das Product von zwei folgenden Seiten mit dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.




Die Fläche eines Vierecks ist das halbe Product seiner Diagonalen mit dem Sinus ihres Winkels.

8. Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich zu einander der Reihe nach wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.*) Die Seiten durch die Sinus der gegenüberliegenden Winkel dividirt geben gleiche Quotienten, deren Werthe sowohl den Quotienten des Products der Seiten durch die doppelte Fläche, als auch den Diameter des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises ausdrücken (Sinus-Satz).

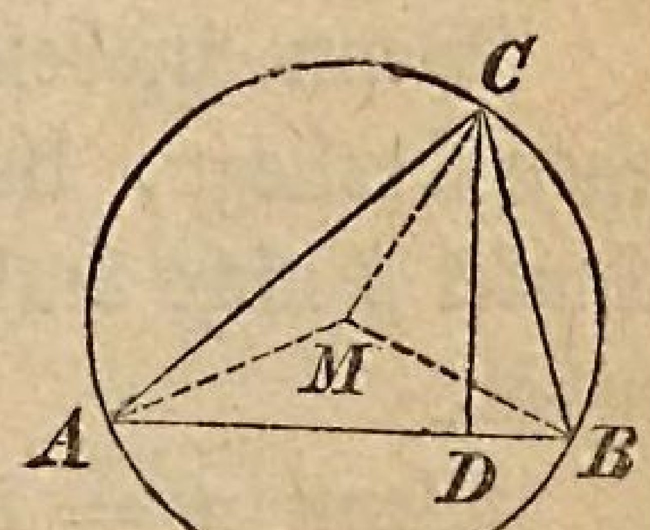
Beweis. Nach (7) hat man

$$\frac{DC}{BC} = \sin CBA, \quad \frac{DC}{CA} = \sin BAC$$

folglich

$$CA : BC = \sin CBA : \sin BAC, \text{ u. s. w.}$$

Bezeichnet man die Seiten $BC$, $CA$, $AB$ der Reihe nach durch $a$, $b$, $c$ und die gegenüberliegenden Winkel durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$**), die Fläche $ABC$ durch $\Delta$ und den Radius des umgeschriebenen Kreises durch $r$, so ist (7)




$$2\Delta = bc \sin\alpha = ca \sin\beta = ab \sin\gamma$$

folglich durch Division

$$\frac{abc}{2\Delta} = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

weil den Sehnen $a$, $b$, $c$ die Peripheriewinkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gegenüberliegen (6).

---

*) In der alten Trigonometrie war dieser Satz tautologisch, weil $AB$ die Sehne des Centriwinkels $AMB = 2ACB$ ist, u. s. w. Ueber die andern Beziehungen vergl. Planim. §. 14, 25.

**) Diese übersichtliche Bezeichnung ist von Euler eingeführt worden. Durch Euler ist es auch üblich geworden, Ausdrücke wie $\sin\alpha$ in die Formeln aufzunehmen, während man sonst deren Werthe durch besondere Buchstaben bezeichnete. Vergl. Nov. Comm. Petrop. 5 p. 164.

Anmerkung. Weil $b = a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 2r\sin\beta$, $a = 2r\sin\alpha$, so ist

$$2\Delta = a^2\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha},\quad \Delta = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

Hiernach kann man die Fläche des Dreiecks aus den Winkeln und einer Seite oder dem Radius des umgeschriebenen Kreises berechnen.

9. Der Sinussatz enthält die Relation zwischen zwei Seiten eines Dreiecks und den gegenüberliegenden Winkeln, und dient deshalb zur Lösung der trigonometrischen Aufgaben: 1) aus zwei Winkeln eines Dreiecks und der dem einen gegenüberliegenden Seite die dem andern gegenüberliegende Seite zu berechnen, 2) aus zwei Seiten und dem der einen gegenüberliegenden Winkel den der andern gegenüberliegenden Winkel zu berechnen. Man hat nämlich, wenn $a$, $\alpha$ und $\beta$ gegeben sind,

$$b = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\beta$$

und wenn $\alpha$, $a$ und $b$ gegeben sind,

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{a}b$$

Die zweite Aufgabe hat im Allgemeinen zwei Auflösungen, denn es giebt zwei Winkel $\beta$, einen spitzen und den supplementären stumpfen, deren Sinus denselben Werth haben (7).

Wenn insbesondere die Seite $a$, welcher der gegebene Winkel $\alpha$ gegenüberliegt, kleiner ist als $b\sin\alpha$, so ist $\sin\beta > 1$ und der gesuchte Winkel $\beta$ nicht real, also giebt es kein Dreieck, das die gegebenen Elemente enthält.

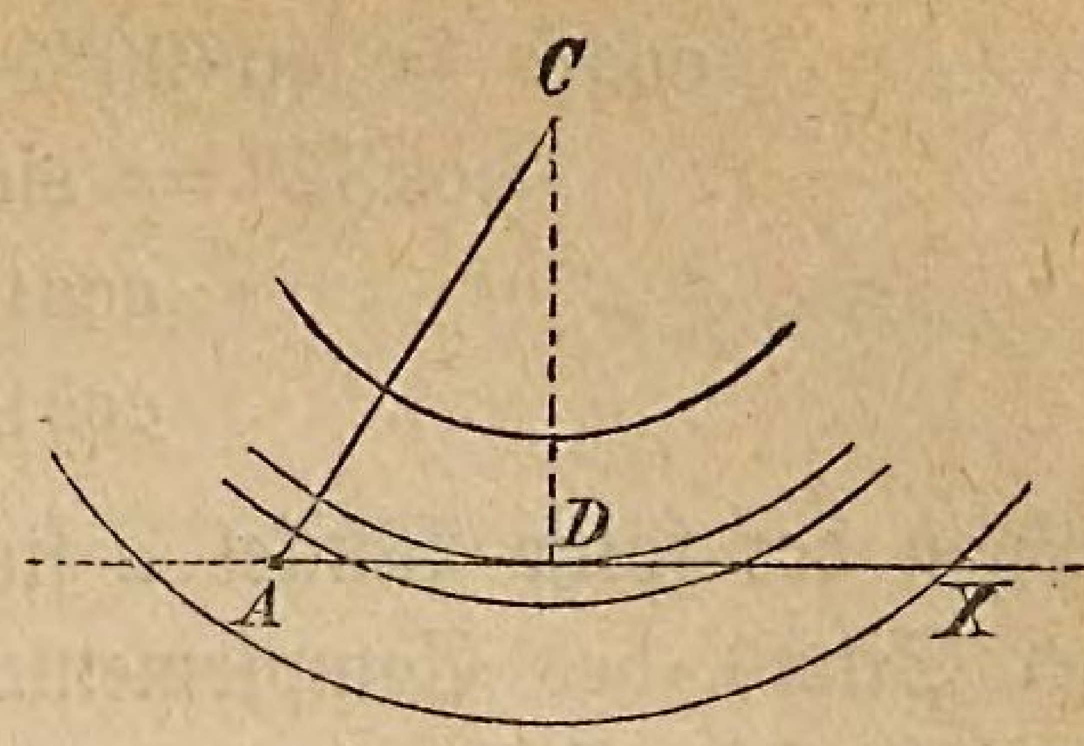
Wenn $a = b\sin\alpha$, so ist $\sin\beta = 1$, $\beta = 90^0$.

Wenn $a$ zwischen den Grenzen $b\sin\alpha$ und $b$ liegt, so ist $\sin\beta > \sin\alpha$, der gesuchte Winkel $\beta$ hat einen spitzen Werth, der größer als $\alpha$ ist, und den supplementären stumpfen Werth.

Wenn $a = b$ ist, so ist $\sin\beta = \sin\alpha$, und $\beta$ kann nur den Werth $\alpha$, nicht $180^0 - \alpha$ haben.

Wenn $a > b$, so ist $\sin\beta < \sin\alpha$, und $\beta$ kann nur spitz und kleiner als $\alpha$ sein, weil einem stumpfen Winkel des Dreiecks die größte Seite gegenüberliegen würde, wider die Voraussetzung.

Mit dieser Determination befindet sich die Construction des Dreiecks $ABC$ aus den gegebenen Elementen in vollkommener Uebereinstimmung. In der That hat der um das Centrum $C$ mit dem Radius $a$ beschriebene




Kreis mit dem Schenkel $AX$ des Winkels $\alpha$ zwei Puncte gemein, die imaginär oder real vereint oder getrennt sind, je nachdem $a$ kleiner oder eben so groß oder größer ist als die Höhe $CD = b \sin\alpha$. Wenn $a = b$, so fällt der zweite Durchschnittspunct mit $A$ zusammen. Wenn $a > b$, so fällt der zweite Durchschnittspunct in den zu $\alpha$ gehörigen Nebenwinkel.

Beispiel 1.

| | |
|---|---|
| $a$ | 325 |
| $\beta$ | $46^0 15'$ |
| $\gamma$ | $57^0 30'$ |
| $\beta + \gamma$ | $103^0 45'$ |
| $\alpha$ | $76^0 15'$ |
| $b$ | 241,7 |
| $c$ | 282,2 |
| $\Delta$ | 33130 |

| | |
|---|---|
| $\log a$ | 2,5119 |
| $\log \sin\alpha$ | 9,98735 |
| $\log \dfrac{a}{\sin\alpha}$ | 2,52455 |
| $\log \sin\beta$ | 9,8588 |
| $\log \sin\gamma$ | 9,9260 |
| $\log \left(\dfrac{a}{\sin\alpha} \sin\beta\right)$ | 2,38335 |
| $\log \left(\dfrac{a}{\sin\alpha} \sin\gamma\right)$ | 2,45055 |
| $\log \frac{1}{2}$ | 9,6990 |
| $\log (\frac{1}{2} bc \sin\alpha)$ | 4,5202 |

Beispiel 2.

| | |
|---|---|
| $\alpha$ | $23^0 4'$ |
| $a$ | 8377 |
| $b$ | 12249 |
| $\beta'$ | $34^0 57',2$ |
| $\alpha + \beta'$ | $58^0 1',2$ |
| $\gamma'$ | $121^0 58',8$ |
| $c'$ | 18134 |
| $\beta''$ | $145^0 2',8$ |
| $\gamma'' = \beta' - \alpha$ | $11^0 53',2$ |
| $c''$ | 4403 |

| | |
|---|---|
| $\log \sin\alpha$ | 9,5930 |
| $\log a$ | 3,9230 |
| $\log \dfrac{\sin\alpha}{a}$ | 5,6700 |
| $\log b$ | 4,0881 |
| $\log \sin\beta$ | 9,7581 |
| $\log \sin\gamma'$ | 9,9285 |
| $\log \left(\sin\gamma' : \dfrac{\sin\alpha}{a}\right)$ | 4,2585 |
| $\log \sin\gamma''$ | 9,3139 |
| $\log \left(\sin\gamma'' : \dfrac{\sin\alpha}{a}\right)$ | 3,6439 |

## §. 2. Von dem Cosinus.

**1.** Der Sinus des Complements eines Winkels heißt der Cosinus des Winkels.*) Der Cosinus des Winkels $\alpha$ wird durch $\cos\alpha$ bezeichnet. Man hat also

*) Die Abkürzung Cosinus für complementi sinus rührt von Gunter her,

$$\cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha), \quad \cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos 32^0 = \sin 58^0, \quad \cos 45^0 = \sin 45^0$$
$$\cos 0 = \sin 90^0 = 1$$
$$\cos 90^0 = \sin 0 = 0$$

Wenn der spitze Winkel $\alpha$ steigt, so fällt sein Complement und zugleich der Sinus des Complements (§. 1, 3), d. h. wenn der Winkel steigt, so fällt sein Cosinus.

Aus der Tabelle der Sinus oder ihrer Logarithmen entsteht die Tabelle der Cosinus oder ihrer Logarithmen, wenn alle Winkel durch ihre Complemente ersetzt werden. Bei der Interpolation der Tabelle der Cosinus oder ihrer Logarithmen ist nur zu beachten, daß der Cosinus oder sein Logarithmus fällt, wenn sein Winkel steigt, und umgekehrt.

Z. B. $\cos 23^0\,17'$ liegt zwischen 0,9194 und 0,9182. Wenn der Winkel $22^0\,10'$ um 10, 1, 7 Minuten steigt, so fällt sein Cosinus um $12, \frac{12}{10}, \frac{12 . 7}{10}$ Zehntausendtel. Also ist

$$\cos 23^0\,17' = 0{,}9194 - 0{,}0008 = 0{,}9186$$

Eben so findet man $\log \cos 23^0\,17' = 9{,}9635 - 0{,}0006 . \frac{7}{10} = 9{,}9631$.

Ist $\cos x = 0{,}8347$, so liegt $x$ zwischen $33^0\,20'$ und $33^0\,30'$. Wenn der Werth 0,8355 des Cosinus um 16, 1, 8 Zehntausendtel fällt, so steigt sein Winkel um $10, \frac{10}{16}, \frac{10 . 8}{16}$ Minuten. Also ist $x = 33^0\,25'$.

Ist $\log \cos x = 9{,}7336$ gegeben, so findet man

$$x = 57^0\,10' + 10' . \tfrac{6}{20} = 57^0\,13'$$

Anmerkung. Wenn $\alpha$ stumpf ist, so ist (§. 1, 7)

$$\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha) = \cos[90^0 - (180^0 - \alpha)] = \cos(\alpha - 90^0)$$

Z. B. $\sin 138^0\,23' = \cos 48^0\,23'$. In der That ist es einfacher, den stumpfen Winkel um $90^0$ zu vermindern, als ihn von $180^0$ zu subtrahiren. Deshalb werden die Sinus stumpfer Winkel in der Cosinus-Tabelle aufgesucht.

2. In einem rechtwinkeligen Dreieck ist der Cosinus eines spitzen Winkels das Verhältniß der anliegenden Cathete zur Hypotenuse. Eine Cathete ist das Product der Hypotenuse mit dem Cosinus des an der Cathete liegenden spitzen Winkels. Die Hypotenuse ist der Quotient

---

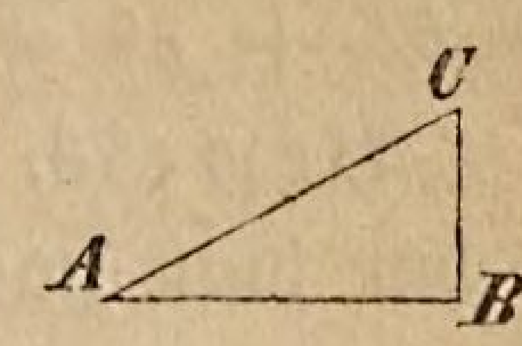
einem Zeitgenossen von Briggs, wie Keppler mitgetheilt hat. Vergl. Pfleiderer's Trigon. p. 101.

einer Cathete durch den Cosinus des an der Cathete liegenden spitzen Winkels.

Beweis. In dem rechtwinkeligen Dreieck $ABC$, dessen Hypotenuse $AC$ ist, hat man (§. 1, 6)

$$\cos A = \sin C = \frac{AB}{AC}$$

$$AB = AC.\cos A, \quad AC = \frac{AB}{\cos A}$$



Anmerkung. Nach dem Pythagoreischen Satze ist

$$\cos^2 A + \sin^2 A = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2} = 1^{*)}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{(1 + \cos A)(1 - \cos A)}$$

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{(1 + \sin A)(1 - \sin A)}$$

Z. B. $\sin(45^0 + \alpha) = \cos(45^0 - \alpha) = \sqrt{1 - \sin^2(45^0 - \alpha)}$. Die Sinus von Winkeln über $45^0$ konnten aus den Sinus der Winkel unter $45^0$ berechnet werden.

Aus dem gegebenen Werth von $\sin x$ oder $\log \sin x$ wird $\cos x$ oder $\log \cos x$ durch Interpolation der Tabellen gefunden, ohne daß man den Winkel $x$ bestimmt. Z. B. $\sin x = 0{,}3016$ liegt zwischen den Sinus 0,3007 und 0,3035, also $\cos x$ zwischen den Cosinus 0,9537 und 0,9528. Wenn nun der Sinus 0,3007 um 28, 1, 9 Zehntausendtel steigt, so fällt der Cosinus 0,9537 um 9, $\frac{9}{28}$, $\frac{9.9}{28}$ Zehntausendtel. Also ist $\cos x = 0{,}9534$.

Um aus der Hypotenuse $AC$ und einer Cathete $AB$ die andere Cathete $BC$ zu berechnen, sucht man in der Tabelle $\cos A = AB : AC$, daneben $\sin A$, und findet $BC = AC \sin A$ einfacher als $\sqrt{AC^2 - AB^2}$.

3. Das Quadrat einer Seite eines Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten vermindert um das doppelte Product dieser Seiten mit dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels (Cosinus-Satz). Dabei hat man unter dem Cosinus eines stumpfen Winkels den negativen Cosinus seines spitzen Supplements zu verstehen.**) Nach den angenommenen Bezeichnungen ist (§. 1, 8)

---

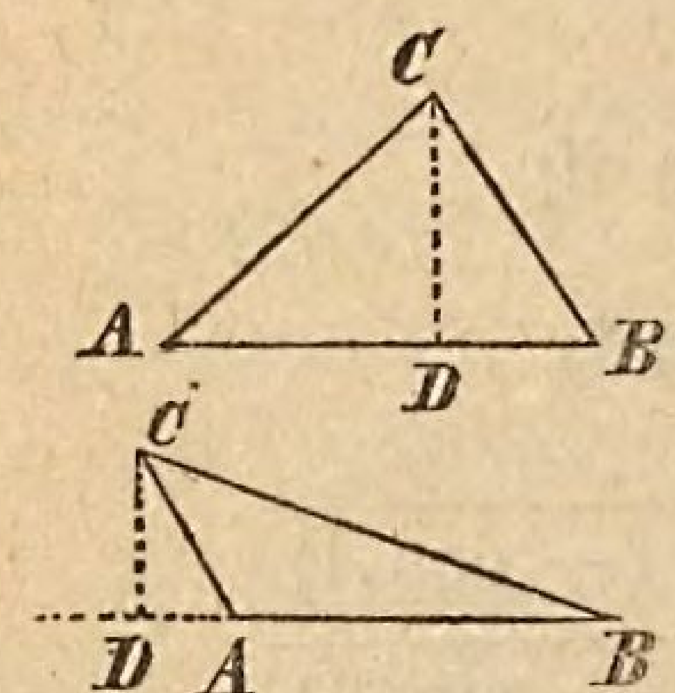
*) Man schreibt $\cos^2 A$ oder $\cos A^2$, $\cos ma$ für $(\cos A)^2$, $\cos(ma)$.

**) Dieser Satz, welcher den Pythagoreischen Satz als einen besondern Fall in

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$$

Wenn $\alpha$ recht ist, so ist $\cos\alpha = 0$ (1), $a^2 = b^2 + c^2$; wenn $\alpha$ stumpf ist, so ist $\cos\alpha = -\cos(180^0 - \alpha)$, $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(180^0 - \alpha) = b^2 + c^2 + 2bc\sin(\alpha - 90^0)$.

Beweis. Wenn man in dem Dreieck $ABC$ die Höhe $CD$ zieht, so hat man nach dem Pythagoreischen Satz




$$BC^2 = DB^2 + CD^2$$

Liegt der Seite $BC$ der spitze Winkel $A$ gegenüber, so ist $DB = AB - AD$, mithin

$$BC^2 = AB^2 - 2AB.AD + AD^2 + CD^2$$

Nun ist $AD^2 + CD^2 = AC^2$, folglich

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AD$$

Liegt aber der Seite $BC$ der stumpfe Winkel $A$ gegenüber, so ist $DB = DA + AB$, mithin

$$BC^2 = AB^2 + 2AB.DA + DA^2 + DC^2$$
$$= AB^2 + AC^2 + 2AB.DA$$

In dem rechtwinkeligen Dreieck $ADC$ hat $AD$ in dem ersten Falle den Werth $AC\cos A$ (2), in dem andern Falle den Werth $AC\cos(180^0 - A)$, folglich u. s. w. Durch die Erklärung des Cosinus eines stumpfen Winkels wird der zweite Fall in den ersten eingeschlossen.

Anmerkung. Nach (1) hat man, wenn $\alpha$ stumpf ist,

$$\cos(180^0 - \alpha) = \sin[90^0 - (180^0 - \alpha)] = \sin(\alpha - 90^0)$$
$$\cos\alpha = -\sin(\alpha - 90^0)$$

Z. B. Für $\cos 127^0 46'$ wird $-\sin 37^0 46'$ gesetzt, weil es einfacher ist, $90^0$ von dem Winkel, als den Winkel von $180^0$ zu subtrahiren.

4. Der Cosinussatz enthält die Relation zwischen den drei Seiten eines Dreiecks und dem Winkel, welcher einer Seite gegenüberliegt, und kann deshalb zur Lösung der trigonometrischen Aufgaben dienen: 1) aus zwei Seiten eines Dreiecks und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel die diesem Winkel gegenüberliegende Seite zu berechnen, 2) aus den drei Seiten die denselben gegenüberliegenden Winkel zu berechnen, 3) aus zwei Seiten und dem Winkel, welcher der einen gegenüberliegt, die dritte Seite zu berechnen.

---

sich schließt, findet sich Eucl. II, 12 und 13 ohne den trigonometrischen Ausdruck des letzten Gliedes. Vergl. Planim. §. 14, 16.

Aus $b = 3921$, $c = 4652$, $\alpha = 27^0\,38'$ findet man

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} = 2168$$

Aus $a = 246{,}9$, $b = 163{,}9$, $\gamma = 113^0\,16',4$ findet man

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\sin 23^0\,16',4} = 346{,}1$$

Man kann die Berechnung durch Benutzung der Gauß'schen Tabelle (Allg. Arith. §. 21, 2) erleichtern. Am einfachsten aber wird die erste Aufgabe durch den Gauß'schen Doppelsatz gelöst. S. unten §. 3, 8.

5. Zur Berechnung des Winkels $\alpha$ aus den Seiten $a$, $b$, $c$ hat man die Gleichung $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, folglich

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Wenn $a^2 = b^2 + c^2$, so ist $\cos\alpha = 0$, $\alpha = 90^0$. Wenn $a^2 > b^2 + c^2$, so ist $\cos\alpha$ negativ, $\alpha$ stumpf, und man findet in den Tabellen $\alpha - 90^0$, nachdem man $-\cos\alpha = \sin(\alpha - 90^0)$ gesetzt hat.

Wenn $b^2 + c^2 - a^2 \gtrless \pm 2bc$ d. h. $(b \mp c)^2 - a^2 \gtrless 0$

wenn also die Differenz von 2 Seiten größer oder die Summe von 2 Seiten kleiner ist als die dritte Seite, so fällt $\cos\alpha$ außerhalb der Grenzen 1 und $-1$, der gesuchte Winkel ist nicht real und das Dreieck nicht construirbar.

Anmerkung. Aus den Gleichungen (§. 1, 7)

$$4\varDelta = 2bc\sin\alpha$$
$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos\alpha$$

findet man, weil $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$,

$$16\varDelta^2 + (b^2 + c^2 - a^2)^2 = 4b^2c^2$$
$$\varDelta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

wenn $s$ die halbe Summe der Seiten bedeutet. S. Planim. §. 14, 23. Nachdem man die Fläche $\varDelta$ aus den Seiten berechnet hat, kann man die Winkel auch aus den Gleichungen

$$\sin\alpha = \frac{2\varDelta}{abc}a,\quad \sin\beta = \frac{2\varDelta}{abc}b,\quad \sin\gamma = \frac{2\varDelta}{abc}c$$

finden. Vergl. §. 1, 8. Man berechnet zuerst die den kleinern Seiten gegenüberliegenden Winkel, welche spitz sind; der der größten Seite gegenüberliegende Winkel ist spitz oder stumpf, so daß er mit den beiden andern Winkeln die Summe $180^0$ bildet.

Die einfachste numerische Lösung der zweiten Aufgabe gründet sich auf Formeln, welche in §. 3, 5 folgen.

6. Zur Berechnung der Seite $c$ aus den Seiten $b$ und $a$, und dem Winkel $\alpha$, welcher der Seite $a$ gegenüberliegt, hat man die Gleichung $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, folglich

$$c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2 - b^2$$

$$(c - b\cos\alpha)^2 = b^2\cos^2\alpha + a^2 - b^2 = a^2 - b^2\sin^2\alpha \quad (2)$$

$$c = b\cos\alpha + \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha}$$

Es giebt also im Allgemeinen 2 Werthe von $c$. Diese Werthe sind nicht real, wenn $a < b\sin\alpha$ ist; sie sind real und einander gleich, wenn $a = b\sin\alpha$; sie sind real verschieden, wenn $a > b\sin\alpha$. Wenn im letzten Falle $a = b$ oder $a > b$ ist, so beträgt die Quadratwurzel soviel oder mehr als $b\cos\alpha$, und der zweite Werth von $c$ verschwindet oder wird negativ, d. h. die den Werthen von $c$ entsprechenden Strecken $AB'$ und $AB''$ haben entgegengesetzte Richtungen (Planim. §. 14, 1).

Diese Determination stimmt mit der §. 1, 9 gegebenen überein und findet bei der Construction des Dreiecks $ABC$ aus den gegebenen Elementen ihre Bestätigung. Die directe Ausrechnung der Seite $c$ steht aber der indirecten Ausrechnung derselben mit Hülfe des Winkels $\gamma$ an Einfachheit nach.

## §. 3. Von der Tangente und Cotangente.

1. Der Quotient des Sinus eines Winkels durch den Cosinus desselben heißt die Tangente des Winkels.*) Die Tangente des Complements eines Winkels wird die Cotangente des Winkels genannt. Man bezeichnet die Tangente und die Cotangente des Winkels $\alpha$ durch $\operatorname{tang}\alpha$ und $\cot\alpha$, und hat demnach

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cot\alpha = \operatorname{tang}(90^0 - \alpha)$$

Nun ist

$$\operatorname{tang}(90^0 - \alpha) = \frac{\sin(90^0 - \alpha)}{\cos(90^0 - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (§. 2, 1)$$

folglich

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \operatorname{tang}\alpha . \cot\alpha = 1$$

---

*) Die Tabelle der Tangenten ist von den Arabern (Al Batani 900) construirt worden, wie Burckhardt bemerkt hat. Im Occident wurde sie von Regiomontanus 1463 unter dem Namen tabula foecunda eingeführt. Der Name Tangente rührt von Fink (geom. rotundi 1583) her. Vergl. Pfleiderer Trigon. p. 129. 141. 161.

d. h. die Tangente und die Cotangente eines Winkels sind reciprok, ihre Logarithmen sind entgegengesetzt gleich.

2. Die Gleichung $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ (§. 2, 2) giebt durch Division

$$1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

d. i. zufolge der aufgestellten Definitionen

$$1 + \operatorname{tang}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \cot^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Man kann also aus dem Cosinus eines Winkels seine Tangente, aus dem Sinus eines Winkels seine Cotangente unmittelbar berechnen, und umgekehrt.

3. Wenn der Winkel von 0 bis $45^0$ und weiter bis $90^0$ steigt, so steigt seine Tangente von 0 bis 1 und bis $\infty$, und seine Cotangente fällt von $\infty$ bis 1 und bis 0. Denn es ist

$$\operatorname{tang} 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\operatorname{tang} 45^0 = \frac{\sin 45^0}{\cos 45^0} = 1$$

$$\operatorname{tang} 90^0 = \frac{\sin 90^0}{\cos 90^0} = \frac{1}{0} = \infty$$

Ist $\beta > \alpha$, so ist $\sin\beta > \sin\alpha$, $\cos\beta < \cos\alpha$ (§. 1, 4 und §. 2, 1),

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} > \frac{\sin\alpha}{\cos\beta} > \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

folglich $\operatorname{tang}\beta > \operatorname{tang}\alpha$. Dagegen ist

$$\cot 0 = \infty, \quad \cot 45^0 = 1, \quad \cot 90^0 = 0$$

$$\cot\beta < \cot\alpha$$

Die Tabellen der Tangenten und Cotangenten werden wie andere Tabellen interpolirt. Wenn der Winkel steigt, so steigt seine Tangente oder deren Logarithmus, und fällt seine Cotangente oder deren Logarithmus, und umgekehrt.

Anmerkung. Wenn der Winkel $\alpha$ stumpf ist, so hat man (§. 2, 3)

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin(180^0 - \alpha)}{-\cos(180^0 - \alpha)} = -\operatorname{tang}(180^0 - \alpha)$$

$$= \frac{\cos(\alpha - 90^0)}{-\sin(\alpha - 90^0)} = -\cot(\alpha - 90^0)$$

Supplementäre Winkel haben also entgegengesetzt gleiche Tangenten oder Cotangenten.

4. In einem rechtwinkeligen Dreieck ist die Tangente eines spitzen Winkels das Verhältniß der dem Winkel gegenüberliegenden Cathete zu der andern Cathete. Die Cotangente eines spitzen Winkels ist das Verhältniß der dem Winkel anliegenden Cathete zu der andern Cathete. Eine Cathete ist das Product der andern Cathete mit der Tangente des der ersten Cathete gegenüberliegenden Winkels oder mit der Cotangente des der ersten Cathete anliegenden Winkels.

Beweis. In dem rechtwinkeligen Dreieck $ABC$, dessen Hypotenuse $AC$ ist, hat man

$$\sin A = \frac{BC}{AC}, \quad \cos A = \frac{AB}{AC}$$

folglich durch Division

$$\operatorname{tang} A = \frac{BC}{AB}, \quad \cot A = \frac{AB}{BC}$$

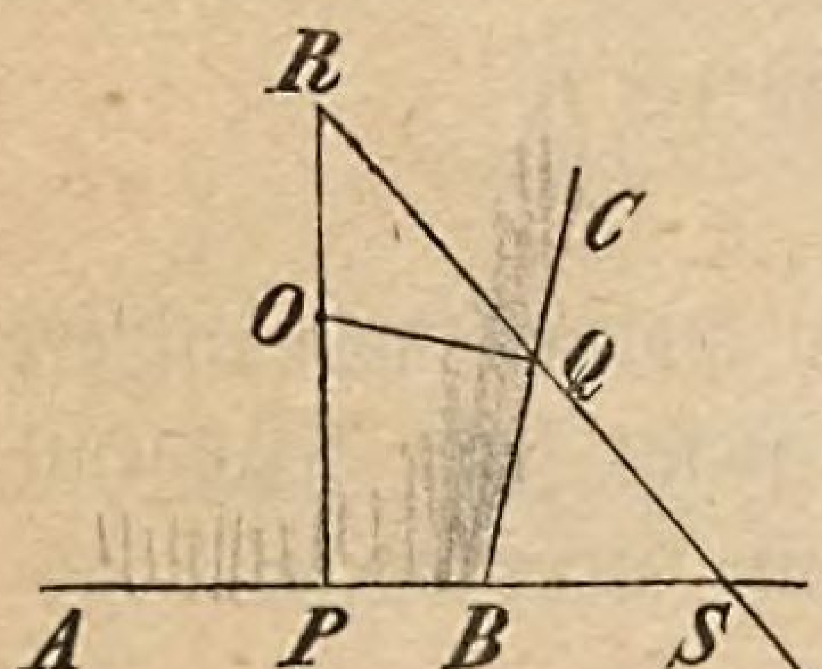
also

$$BC = AB \,.\, \operatorname{tang} A = AB \,.\, \cot C$$

Anwendungen. Mit Hülfe dieses Satzes findet man aus den beiden Catheten die Winkel des rechtwinkeligen Dreiecks, aus einer Cathete und einem spitzen Winkel die andere Cathete.

Um aus den Catheten $AB$ und $BC$ die Hypotenuse zu berechnen, sucht man in der Tabelle $\operatorname{tang} A = BC : AB$, daneben $\sin A$ oder $\cos A$ (der größere von beiden erfordert die geringere Interpolation), und findet $AC = BC : \sin A$ oder $AB : \cos A$ einfacher als $\sqrt{AB^2 + AC^2}$. Vergl. §. 2, 2.

Ein beliebiger Punct $O$ des Winkels $CBA$ hat von den Schenkeln die Abstände $PO$, $QO$, deren Summe $PR$ zu der Summe der Abschnitte $PB$, $BQ$ das unveränderliche Verhältniß $\operatorname{tang} \frac{1}{2} CBA$ hat*). Denn die Gerade $QR$ schneidet von dem Nebenwinkel das Dreieck $SQB$ ab, dessen Winkel $Q$, $S$ gleiche Complemente haben und $\frac{1}{2} CBA$ betragen, so daß $PS = PB + BQ$, $PR : PS = \operatorname{tang} \frac{1}{2} CBA$. Die Strecken $PB$, $BQ$ sind negativ, wenn ihre Richtungen den Richtungen $AB$, $BC$ entgegengesetzt sind.




Wenn durch $aa'$, $bb'$, $cc'$ die Winkel bezeichnet werden, welche mit den Seiten $BC$, $CA$, $AB$ eines Dreiecks die Mittellinien desselben $A_1 A$, $B_1 B$, $C_1 C$ bilden, so ist

---

*) Aus diesem Lemma fließen Sätze über Perimeter von Polygonen und über Oberflächen von Polyedern, welche auf anderem Wege Lindelöf Bulletin de Petersburg 1870 t. 14 p. 256 abgeleitet hat.

$$AC^2 - BC^2 = 2AB \,.\, C_1 C \cos cc' \text{ (Planim. §. 14, 2)}$$
$$4\varDelta = 2AB \,.\, C_1 C \sin cc' \text{ (§. 1, 7)}$$
$$\cot cc' = \frac{b^2 - a^2}{4\varDelta}, \quad \cot aa' = \frac{c^2 - b^2}{4\varDelta}, \quad \cot bb' = \frac{a^2 - c^2}{4\varDelta}$$
$$\cot aa' + \cot bb' + \cot cc' = 0\text{*)}$$

5. Um aus den Seiten $a$, $b$, $c$ eines Dreiecks die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ zu finden (§. 2, 5), berechnet man am einfachsten nach Planim. §. 14, 23 den Radius des eingeschriebenen Kreises

$$d = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s}}$$

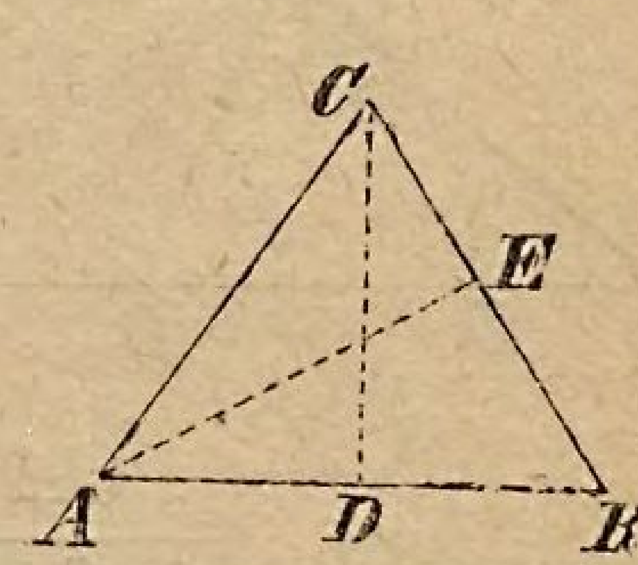
wo $s$ den halben Perimeter des Dreiecks bedeutet, und erhält in der a. a. O. gegebenen Figur $\cot D'AD = AD' : D'D$ (4), u. s. w., folglich**)

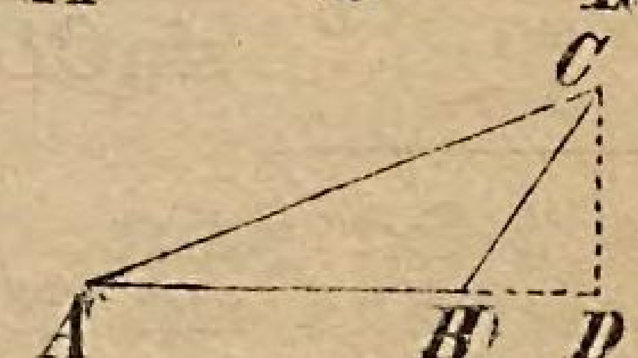
$$\cot \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{s - a}{d}, \quad \cot \tfrac{1}{2}\beta = \frac{s - b}{d}, \quad \cot \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{s - c}{d}$$
$$\cot \tfrac{1}{2}\alpha + \cot \tfrac{1}{2}\beta + \cot \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{s}{d} = \frac{s^2}{\varDelta} = \cot \tfrac{1}{2}\alpha \cot \tfrac{1}{2}\beta \cot \tfrac{1}{2}\gamma$$

Beispiel.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | 3921 | $\log(s - a)$ | 3,1611 |
| $b$ | 4652 | $\log(s - b)$ | 2,8561 |
| $c$ | 2167 | $\log(s - c)$ | 3,5055 |
| $2s$ | 10740 | . . . . | 9,5227 |
| $s$ | 5370 | $\log s$ | 3,7300 |
| $s - a$ | 1449 | $\log d^2$ | 5,7927 |
| $s - b$ | 718 | $\log d$ | 2,89635 |
| $s - c$ | 3203 | $\log \cot \frac{1}{2}\alpha$ | 10,26475 |
| $\frac{1}{2}\alpha$ | $28^0\,31',5$ | $\log \cot \frac{1}{2}\beta$ | 9,95975 |
| $\frac{1}{2}\beta$ | $47^0\,39'$ | $\log \cot \frac{1}{2}\gamma$ | 10,60915 |
| $\frac{1}{2}\gamma$ | $13^0\,49'$ | | |

$\alpha = 57^0\,3'$, $\beta = 95^0\,18'$, $\gamma = 27^0\,38'$




6. Um aus zwei Seiten eines Dreiecks und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel, $b$, $\alpha$, $c$ oder $b$, $\gamma$, $a$, den Winkel $\beta$ zu berechnen, welcher einer von den beiden Seiten $b$ gegenüberliegt, kann man von dem Winkel $\beta$ entweder durch die Höhe $CD$ das rechtwinkelige Dreieck $BCD$ abschneiden, dessen

*) Faßbender Grunert Archiv 49 p. 115.

**) Joachim Rhäticus. Vergl. Pfleiderer Trigonom. p. 394.

Catheten $DB = AB - AD = c - b\cos\alpha$ und $DC = b\sin\alpha$ sind, oder durch die Höhe $AE$ das rechtwinkelige Dreieck $BAE$, dessen Catheten $BE = BC - EC = a - b\cos\gamma$ und $EA = b\sin\gamma$ sind. Nach (4) hat man

$$\tang\beta = \frac{b\sin\alpha}{c - b\cos\alpha} = \frac{b\sin\gamma}{a - b\cos\gamma}$$

Wenn der Nenner verschwindet, d. h. $AB = AD$, so ist $\tang\beta$ unendlich, und $\beta$ recht. Wenn der Nenner negativ ist, d. h. $AB < AD$, so ist $\beta$ stumpf und (3)

$$\cot(\beta - 90^0) = \frac{b\sin\alpha}{b\cos\alpha - c}$$

in Uebereinstimmung mit der Figur.

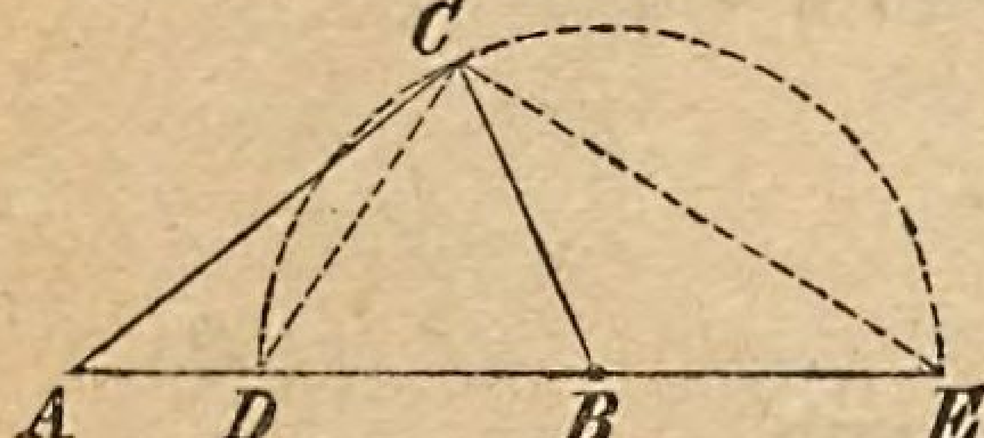
Die einfachste numerische Lösung dieser Aufgabe gründet sich auf den folgenden Satz.

7. Das Product einer Seite eines Dreiecks mit dem Sinus (Cosinus) der halben Differenz der anliegenden Winkel ist dem Product der Differenz (Summe) der den beiden Winkeln gegenüberliegenden Seiten mit dem Sinus (Cosinus) der halben Summe derselben Winkel gleich.

Die Tangente der halben Differenz von zwei Winkeln eines Dreiecks hat zur Tangente der halben Summe derselben Winkel dasselbe Verhältniß, als die Differenz der gegenüberliegenden Seiten zur Summe derselben.*) Z. B.

$$b\sin\tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha) = (c - a)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma + \alpha)$$
$$b\cos\tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha) = (c + a)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma + \alpha)$$
$$\tang\tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha) : \tang\tfrac{1}{2}(\gamma + \alpha) = c - a : c + a$$

Beweis. Macht man $AD = AB - BC$, $AE = AB + BC$, so ist der Winkel




$$DCB = BDC = \tfrac{1}{2}EBC = \tfrac{1}{2}(\gamma + \alpha)$$
$$ACD = ACB - DCB = \tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha)$$

und $DCE = 90^0$. In den Dreiecken $ADC$ und $AEC$ ist nach §. 1, 8

$$\frac{CA}{\sin CDA} = \frac{AD}{\sin ACD}, \quad \frac{CA}{\sin CEA} = \frac{AE}{\sin ACE}$$

*) Der Zusatz, welchen Fink (geom. rotundi 1583 p. 281) aus einer von Ptolemäus und Regiomontanus angestellten Betrachtung (9) abgeleitet hat (Pfleiderer Trigon. p. 356), ist wie der entsprechende Satz für das sphärische Dreieck unter dem Namen der Neper'schen Analogie bekannt. Der Hauptsatz heißt wie der entsprechende Satz der Sphärik der Gauß'sche Doppelsatz. Vergl. unten §. 5, 10.

Nun ist $\sin CDA = \sin BDC$ (§. 1, 7), $\sin CEA = \cos EDC$ und $\sin ACE = \cos ACD$ (§. 2, 1), folglich nach gewöhnlicher Bezeichnung

$$\frac{b}{\sin\frac{1}{2}(\gamma + \alpha)} = \frac{c - a}{\sin\frac{1}{2}(\gamma - \alpha)}, \quad \frac{b}{\cos\frac{1}{2}(\gamma + \alpha)} = \frac{c + a}{\cos\frac{1}{2}(\gamma - \alpha)}$$

oder

$$b \sin\tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha) = (c - a)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma + \alpha)$$
$$b \cos\tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha) = (c + a)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma + \alpha)$$

Durch Division erhält man

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha) = \frac{c - a}{c + a}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\gamma + \alpha)$$

8. Mit Hülfe des vorstehenden Satzes werden am einfachsten aus zwei Seiten $c$, $a$ eines Dreiecks und dem eingeschlossenen Winkel $\beta$ die übrigen Elemente $\gamma$, $\alpha$, $b$ des Dreiecks berechnet. Der Winkel $\frac{1}{2}(\gamma + \alpha)$ ist das Complement von $\frac{1}{2}\beta$. Man kennt demnach die Producte $b\sin\frac{1}{2}(\gamma - \alpha)$ und $b\cos\frac{1}{2}(\gamma - \alpha)$. Aus ihren Werthen findet man durch Division $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma - \alpha)$, und hierzu sowohl $\sin\frac{1}{2}(\gamma - \alpha)$ und $\cos\frac{1}{2}(\gamma - \alpha)$, als auch den Winkel $\frac{1}{2}(\gamma - \alpha)$. Daher kann man nun die Seite $b$ auf zwei verschiedene Arten durch Division berechnen, und findet endlich aus $\frac{1}{2}(\gamma + \alpha)$ und $\frac{1}{2}(\gamma - \alpha)$ die Winkel $\gamma$ und $\alpha$.

Beispiel.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $c$ | 4652 | $\log(c - a)$ | 2,8639 |
| $a$ | 3921 | $\log\sin\frac{1}{2}(\gamma + \alpha)$ | 9,9872 |
| $\beta$ | 27° 38′ | $\log(c + a)$ | 3,9332 |
| $c - a$ | 731 | $\log\cos\frac{1}{2}(\gamma + \alpha)$ | 9,3781 |
| $c + a$ | 8573 | $\log b \sin\frac{1}{2}(\gamma - \alpha)$ | 2,8511 |
| $\frac{1}{2}\beta$ | 13° 49′ | $\log b \cos\frac{1}{2}(\gamma - \alpha)$ | 3,3113 |
| $\frac{1}{2}(\gamma + \alpha)$ | 76° 11′ | $\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma - \alpha)$ | 9,5398 |
| $\frac{1}{2}(\gamma - \alpha)$ | 19° 7′ | $\log\sin\frac{1}{2}(\gamma - \alpha)$ | 9,5151 |
| $\gamma$ | 95° 18′ | $\log\cos\frac{1}{2}(\gamma - \alpha)$ | 9,9754 |
| $\alpha$ | 57° 4′ | $\log b$ | 3,3360 |
| $b$ | 2167,5 | | |

Anmerkung. Um aus einer Seite $b$ eines Dreiecks, dem gegenüberliegenden Winkel $\beta$ und dem Verhältniß der beiden andern Seiten $a : c = m$ die übrigen Elemente des Dreiecks zu berechnen, setzt man

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha) = \frac{c - a}{c + a}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\gamma + \alpha) = \frac{1 - m}{1 + m}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\gamma + \alpha)$$

$$\tfrac{1}{2}(c - a) = \tfrac{1}{2}b\frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma - \alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\gamma + \alpha)}, \quad \tfrac{1}{2}(c + a) = \tfrac{1}{2}b\frac{\cos\frac{1}{2}(\gamma - \alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\gamma + \alpha)}$$

9. Weil $c : a = \sin\gamma : \sin\alpha$ (§. 1, 8), so hat man, wenn $\sin\alpha : \sin\gamma = m$ ist, nach dem Lehrsatz (7)

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha) : \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\gamma + \alpha) = \frac{\sin\gamma - \sin\alpha}{\sin\gamma + \sin\alpha} = \frac{1 - m}{1 + m}$$

Man kann also aus der Summe von zwei Winkeln und dem Verhältniß ihrer Sinus die Differenz der beiden Winkel, also auch die Winkel selbst berechnen.*) Dabei kann $m = \sin\mu$ gesetzt werden, u. s. w. Wenn die gegebene Summe $180^0$ übersteigt, so setze man $\gamma = 180^0 - \gamma'$, $\alpha = 180^0 - \alpha'$, und hat

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha' - \gamma') : \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha' + \gamma') = \frac{\sin\alpha' - \sin\gamma'}{\sin\alpha' + \sin\alpha'}$$

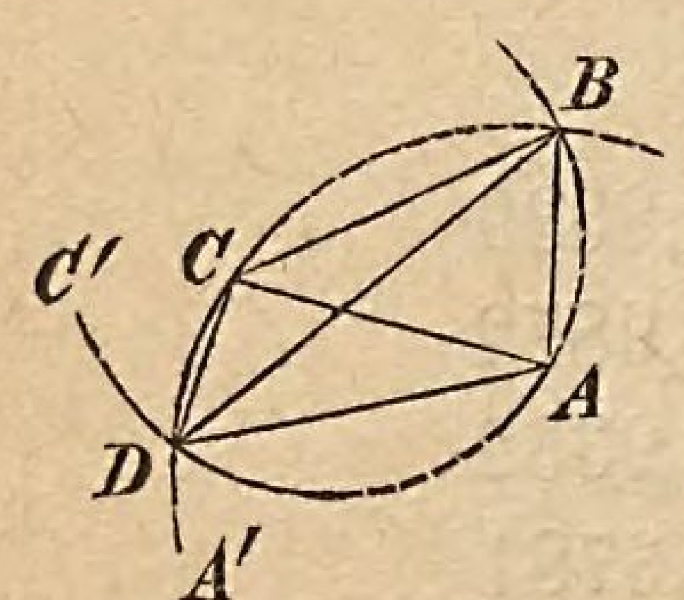
Nun ist $\alpha' - \gamma' = \gamma - \alpha$, $\tfrac{1}{2}(\alpha' + \gamma') = 180^0 - \tfrac{1}{2}(\gamma + \alpha)$, und (3)

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha' + \gamma') = -\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\gamma + \alpha)$$
$$\sin\alpha' = \sin\alpha, \quad \sin\gamma' = \sin\gamma$$

also wie vorhin

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha) : \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\gamma + \alpha) = \frac{\sin\gamma - \sin\alpha}{\sin\gamma + \sin\alpha}$$

Anwendung. Auf der Ebene des Dreiecks $ABC$ giebt es einen Punct $D$, für welchen die Seiten $AB$ und $BC$ gegebene scheinbare Größen haben. Dieser Punct $D$ ist der zweite gemeinschaftliche Punct der Kreise $ABC'$ und $BCA'$, deren Sehnen $AB$ und $BC$ für $C'$ und $A'$ die gegebenen scheinbaren Größen besitzen; er ist unbestimmt, wenn die beiden Kreise mit dem Kreis $ABC$ zusammenfallen.




Um aus den gegebenen Elementen des Dreiecks $ABC$, wovon $AB$, $BC$ und der Winkel $CBA$ durch $c$, $a$, $\beta$ bezeichnet werden, und aus den Winkeln $ADB$ und $BDC$, die durch $\gamma'$ und $\alpha'$ bezeichnet werden, die Strecken $DA$, $DB$, $DC$, die durch $f$, $g$, $h$ bezeichnet werden, zu berechnen**), bezeichne man die Winkel $BAD$ und $DCB$ des Vierecks $ABCD$ durch $\varphi$ und $\psi$, und hat

$$\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) = 180^0 - \tfrac{1}{2}(\gamma' + \alpha' + \beta)$$

In den Dreiecken $ABD$ und $BCD$ ist

---

*) Diese Aufgabe und ihre constructive Lösung ist durch Ptolemäus und Regiomontanus bekannt geworden. Vergl. die Bemerkung zu (7).

**) Snellius 1614, Pothenot 1692, Lambert 1765 u. A. Vergl. Pfleiderer Trigon. p. 275. Diese Aufgabe wird gewöhnlich nach dem zweiten Bearbeiter die Pothenot'sche Aufgabe genannt.

$$\frac{g}{\sin\varphi} = \frac{c}{\sin\gamma'}, \quad \frac{g}{\sin\psi} = \frac{a}{\sin\alpha'}$$

folglich durch Division

$$\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{c}{\sin\gamma'} : \frac{a}{\sin\alpha'} = m$$

Nach dem Obigen ist aber

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) : \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) = \frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\varphi + \sin\psi} = \frac{1 - m}{1 + m}$$

wodurch $\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$, also auch $\varphi$ und $\psi$ bekannt werden. Endlich hat man zur Berechnung von $f$, $g$, $h$

$$\frac{f}{\sin(\varphi + \gamma')} = \frac{g}{\sin\varphi} = \frac{c}{\sin\gamma'}, \quad \frac{h}{\sin(\psi + \alpha')} = \frac{a}{\sin\alpha'}$$

## Beispiel.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $c$ | 520 | $\log c$ | 2,7160 |
| $a$ | 312 | $\log\sin\gamma'$ | 9,7346 |
| $\beta$ | $65^0\,27'$ | $\log(c : \sin\gamma')$ | 2,9814 |
| $\gamma'$ | $32^0\,52'$ | $\log a$ | 2,4942 |
| $\alpha'$ | $23^0\,25'$ | $\log\sin\alpha'$ | 9,5993 |
| $\frac{1}{2}(\beta + \gamma' + \alpha')$ | $60^0\,52'$ | $\log(a : \sin\alpha')$ | 2,8949 |
| $\frac{1}{2}(\varphi + \psi)$ | $119^0\,8'$ | $\log m$ | 0,0865 $(A)$ |
| $\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$ | $10^0\,6'$ | $\log\left(1 - \frac{1}{m}\right)$ | $-$ 0,7433 $(-U)$ |
| $\varphi$ | $129^0\,14'$ | | |
| $\psi$ | $109^0\,2'$ | $\log\left(1 + \frac{1}{m}\right)$ | 0,2599 $(S)$ |
| $g$ | 742,2 | | |
| $f$ | 294,5 | $\log\frac{1-\,.\,.}{1+\,.\,.}$ | $-$ 1,0032 |
| $h$ | 579,3 | | |
| | | $\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\beta + .\,.)$ | 10,2539 |
| | | $\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$ | 9,2506 |
| | | $\log\sin\varphi$ | 9,8891 |
| | | $\log\sin(\varphi + \gamma')$ | 9,4877 |
| | | $\log\sin(\psi + \alpha')$ | 9,8680 |
| | | $\log g$ | 2,8705 |
| | | $\log f$ | 2,4691 |
| | | $\log h$ | 2,7629 |

Weil in diesem Falle $m > 1$ und $\operatorname{tang}\frac{\varphi + \psi}{2} = -\operatorname{tang}\frac{\beta + \gamma' + \alpha'}{2}$

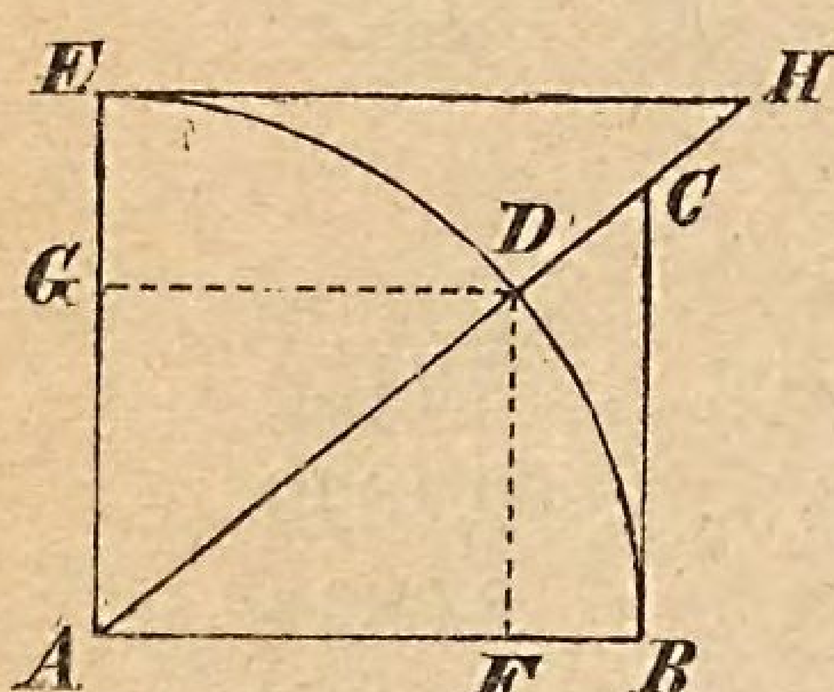
so ist $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$

$$= \frac{m-1}{m+1} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma' + \alpha') = \frac{1-\frac{1}{m}}{1+\frac{1}{m}} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma' + \alpha')$$

**10.** Außer dem Sinus und Cosinus, der Tangente und Cotangente eines Winkels $\alpha$ werden in der Trigonometrie bisweilen noch andere Functionen des Winkels $\alpha$ gebraucht, nämlich die Secante und Cosecante, der Sinus versus und Cosinus versus desselben, und durch sec $\alpha$, cosec $\alpha$, sin vers $\alpha$, cos vers $\alpha$, bezeichnet. Ihre Definitionen lauten:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\cos(90^0 - \alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\sin\operatorname{vers}\alpha = 1 - \cos\alpha, \quad \cos\operatorname{vers}\alpha = 1 - \cos(90^0 - \alpha) = 1 - \sin\alpha$$




Die Benennungen Secante, Tangente und Sinus versus sind geometrischen Ursprungs. Mit dem Radius $AB$ beschreibe man um den Scheitel $A$ in den Winkel $BAC$ den Kreisbogen $BD$ und den Quadranten $BE$. Zieht man die Normalen $BC$, $DF$ zu $AB$, und die Normalen $DG$, $EH$ zu $AE$, so ist

$$\sin BAD = \frac{FD}{AD}, \quad \cos BAD = \sin DAE = \frac{GD}{AD}$$

$$\operatorname{tang} BAD = \frac{BC}{AB}, \quad \cot BAD = \operatorname{tang} DAE = \frac{EH}{AE}$$

$$\sec BAD = \frac{AD}{GD} = \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AB}$$

$$\operatorname{cosec} BAD = \sec DAE = \frac{AH}{AE}$$

$$\sin\operatorname{vers} BAD = 1 - \frac{AF}{AD} = \frac{FB}{AB}$$

$$\cos\operatorname{vers} BAD = \sin\operatorname{vers} DAE = \frac{GE}{AE}$$

Wenn der Radius eine Längeneinheit und $180:\pi$ eine Winkeleinheit ist, so ist der Kreisbogen $BD$ dem Centriwinkel $BAD$ (seinem Arcus, Planim. §. 13, 8) gleich, und man erhält die Ausdrücke

$$\sin BD = FD, \quad \cos BD = GD$$
$$\operatorname{tang} BD = BC, \quad \cot BD = EH$$
$$\sec BD = AC, \quad \operatorname{cosec} BD = AH$$
$$\sin\operatorname{vers} BD = FB, \quad \cos\operatorname{vers} BD = GE$$

denen die Namen Tangente, Secante, Sinus versus u. s. w. entsprechen.*)

*) Eine Tabelle der Secanten ist zur Erleichterung der trigonometrischen Rech-

Nach dem Pythagoreischen Satze ist $AB^2 + BC^2 = AC^2$, $AE^2 + EH^2 = AH^2$, d. h.

$$1 + \text{tang}^2 BD = \sec^2 BD, \quad 1 + \cot^2 BD = \text{cosec}^2 BD$$

wie oben (2) angegeben wurde.

Ein Bogen ist länger als seine Sehne, mithin länger als die halbe Sehne des verdoppelten Bogens. Der Sector $ABD$ ist kleiner als das Dreieck $ABC$, daher ist der Bogen $BD$ kürzer als die Tangente $BC$ (vergl. Planim. §. 10, 4). Man hat demnach die Begrenzungen

$$FD < \text{Bogen } BD < BC$$

$$\sin BD < \text{Bogen } BD < \text{tang } BD$$

$$1 < \frac{\text{Bogen } BD}{\sin BD} < \frac{1}{\cos BD}, \quad \cos BD < \frac{\text{Bogen } BD}{\text{tang } BD} < 1$$

$$\frac{\text{Bogen } BD}{\sin BD} - 1 < \frac{1}{\cos BD} - 1, \quad 1 - \frac{\text{Bogen } BD}{\text{tang } BD} < 1 - \cos BD$$

Bei hinreichend kleinen Bogen $BD$ sind $\sin BD$, $\text{tang} BD$, $1 - \cos BD$ beliebig klein, die kleinern Differenzen null, d. h. bei unendlich kleinen Bogen ist

$$\frac{\text{Bogen } BD}{\sin BD} = 1, \quad \frac{\text{Bogen } BD}{\text{tang } BD} = 1$$

## §. 4. Goniometrie.

1. Zur Bestimmung des Winkels $fg$ der Geraden $g$ mit $f$ auf einer Ebene ist es erforderlich, daß nicht nur die positive Richtung jeder Geraden (Planim. §. 14, 1), sondern auch der positive Sinn der Ebene gegeben sei, d. h. der Sinn der Drehung, durch welche positive Winkel (und Flächen) der Ebene beschrieben werden.*) Wenn die Gerade $f$ in dem gegebenen Sinne (z. B. linksum für den auf einer bestimmten Seite der Ebene stehenden Betrachter) um $\alpha$ Grad gedreht werden muß, bis daß die positive Richtung von $f$ mit der positiven Richtung von $g$ übereinstimmt, so hat der durch $fg$ bezeichnete Winkel $\alpha$ Grad. Dabei kann für $\alpha$ auch $\alpha + 360^0$, $\alpha + 2.360^0$, . ., $\alpha + k.360^0$ gesetzt werden, wenn $k$ irgend eine ganze Zahl, positiv

---

nungen von Joachim Rhäticus 1539 unter dem Titel canon hypotenusarum und von Maurolycus 1558 unter dem Titel tabula benefica berechnet und herausgegeben worden. Die Namen Tangente und Secante rühren von Fink her (geom. rotundi 1583). Der Name Sinus versus (im Gegensatz von sinus rectus) war früher gebräuchlich. Vergl. Pfleiderer a. a. O. Durch die Erfindung der Logarithmen wurde der Gebrauch der Secanten in der Trigonometrie überflüssig.

*) Diese genauern Bestimmungen sind von Möbius (analyt. Sphärik 1, Kreisverwandtschaft 8, und anderwärts) angegeben worden.

oder negativ, bedeutet (Planim. §. 2, 4). Wenn zu demselben Zwecke die Gerade $f$ in dem gegebenen Sinne um $360 - \beta$ Grad oder in dem entgegengesetzten Sinne um $\beta$ Grad gedreht werden muß, so hat der durch $fg$ bezeichnete Winkel $-\beta$ Grad.

Demnach hat die Summe der Winkel $fg + gf$ den Werth 0 oder $k.360^0$, die Winkel $fg$ und $gf$ sind entgegengesetzt gleich, $gf = - fg$.

Bei drei Geraden einer Ebene, $f$, $g$, $h$, hat man

$$fg + gh + hf = 0$$

auch in dem Falle, daß die Geraden nicht durch einen Punct gehn. Zieht man nämlich durch einen Punct der Ebene die Geraden $f'$, $g'$, $h'$, die mit $f$, $g$, $h$ der Reihe nach parallel und von einerlei positiven Richtungen sind, so sind die Winkel $f'g'$ und $fg$, $g'h'$ und $gh$, $h'f'$ und $hf$ gleich (Planim. §. 2, 8), daher $fg + gh + hf = f'g' + g'h' + h'f' = 0$. Aus dieser Gleichung erhält man

$$fg + gh = - hf = fh$$

$$fh = gh - gf = fg - hg, \text{ u. s. w.}$$

Bei der Bezeichnung eines Winkels durch 3 Buchstaben, z. B. $CBA$ wird vorausgesetzt, daß die positiven Richtungen der Schenkel von $B$ nach $C$ und von $B$ nach $A$ gehn. Bei der Bezeichnung des von zwei Strecken $AB$ und $CD$ gebildeten Winkels $AB^\wedge CD$ wird vorausgesetzt, daß die positiven Richtungen der Schenkel von $A$ nach $B$ und von $C$ nach $D$ gehn.

2. Wenn eine beliebige Strecke $AB$ der Geraden $h$ auf die Gerade $x$ durch Normalen projicirt und die Projection durch $A_1B_1$ bezeichnet wird, so ist das Verhältniß der Projection zur projicirten Strecke $A_1B_1 : AB$ unabhängig von der Länge der Strecke und ihrer Lage auf der Geraden $h$ (Planim. §. 8, 2), und verändert sich im Allgemeinen wenn der von den Geraden $x$ und $h$ gebildete Winkel eine Veränderung erleidet (§. 1, 3). Demnach ist das genannte Verhältniß eine bestimmte Function des Winkels $xh$ und heißt der Cosinus dieses Winkels. Man bezeichnet den Cosinus des Winkels $xh$ durch $\cos xh$, so daß

$$\cos xh = A_1B_1 : AB, \quad A_1B_1 = AB \cos xh$$

In dieser umfassenden Definition des Cosinus irgend eines Winkels ist die von dem Cosinus eines spitzen Winkels in §. 2 gegebene Definition enthalten.*) Vergl. die Figur §. 3, 10.

---

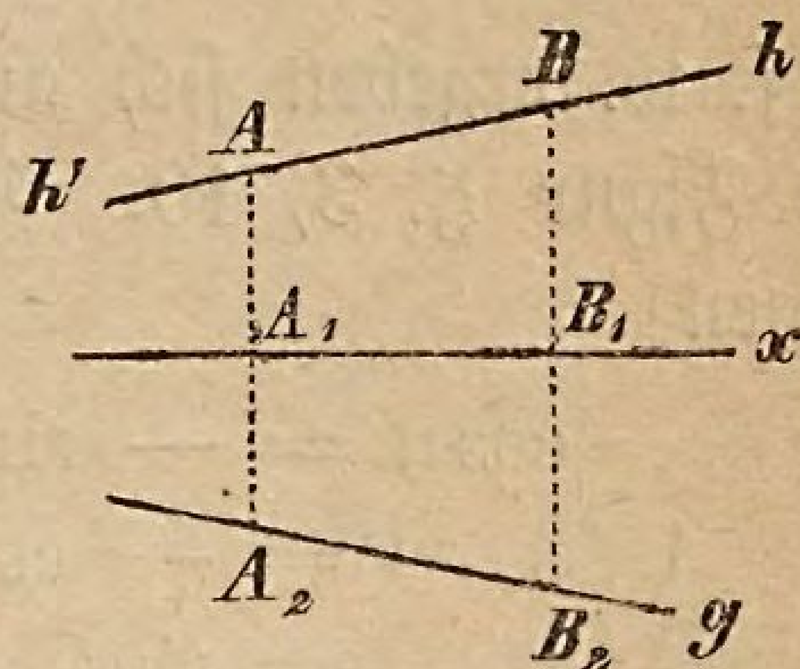
*) Diese Anordnung und unbeschränkte Begründung der Goniometrie und Trigonometrie verdankt man Möbius. Vergl. die angeführten Schriften.

Zwei Winkel, welche entgegengesetzt gleich sind, haben dieselben Cosinus; zwei Winkel, deren Differenz oder Summe $180^0$ beträgt, haben entgegengesetzt gleiche Cosinus, z. B.

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(\alpha + 180^0) = -\cos\alpha = \cos(-\alpha + 180^0)$$

Beweis. Wenn die Gerade $x$ den Winkel $gh$ halbirt, so sind die Winkel $hx$ und $xg$ gleich, $xg$ und $xh$ entgegengesetzt gleich. Die Geraden, welche die Strecke $AB$ der Geraden $h$ auf $x$ normal projiciren, schneiden $x$ in $A_1$ und $B_1$, und $g$ in $A_2$ und $B_2$ so daß $\cos xh = A_1B_1 : AB$, $\cos xg = A_1B_1 : A_2B_2$. Dreht man die Figur $A_1B_1B_2A_2$ um die Axe $x$, bis $A_2$ auf $A$ fällt, so fällt die positive Richtung von $g$ mit der positiven Richtung von $h$, und $B_2$ mit $B$ zusammen. Wenn nun $AB$ eine positive (negative) Strecke von $h$ ist, so ist $A_2B_2$ eine positive (negative) Strecke von $g$; also haben die Verhältnisse $A_1B_1 : A_2B_2$ und $A_1B_1 : AB$ einerlei Größe und Zeichen, d. h. es ist $\cos xg = \cos xh$.




Wenn aber die positiven Richtungen der vereinten Geraden $h$ und $h'$ entgegengesetzt sind, so unterscheiden sich die Winkel $xh$ und $xh'$ um $180^0$. Ist nun $AB$ eine positive Strecke von $h$, so ist $AB$ zugleich eine negative Strecke von $h'$, und umgekehrt. Das Verhältniß $A_1B_1 : AB$ hat in dem einen Falle den Werth $\cos xh$, in dem andern Falle den Werth $\cos xh'$, also sind $\cos xh$ und $\cos xh'$ entgegengesetzt gleich.

Anmerkung. Wenn die Geraden parallel und von einerlei positiver Richtung sind, so ist eine Strecke der einen mit ihrer Normalprojection auf die andere von einerlei Größe und Zeichen. Wenn die Geraden normal zu einander sind, so verschwindet die Normalprojection einer Strecke der einen auf die andere. Daher hat man

$$\cos 0 = 1, \quad \cos 90^0 = 0$$

$$\cos 180^0 = -\cos 0 = -1, \quad \cos 270^0 = 0, \text{ u. s. f.}$$

3. Aus den angegebenen Eigenschaften der Cosinus fließen die entsprechenden Eigenschaften des Sinus zufolge der Definition

$$\sin\alpha = \cos(90^0 - \alpha)$$

Indem man $\alpha$ durch $90^0 - \alpha$ ersetzt, findet man

$$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$$

Zwei Winkel, deren Summe $180^0$ beträgt, haben dieselben Sinus. Zwei Winkel, die entgegengesetzt gleich sind, sowie zwei Winkel, deren Differenz $180^0$ beträgt, haben entgegengesetzt gleiche Sinus. Z. B.

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha = \sin(180^0 + \alpha)$$

Denn $\sin(180^0 - \alpha) = \cos(90^0 - 180^0 + \alpha) = \cos(90^0 - \alpha)$, weil die Winkel $-90^0 + \alpha$ und $90^0 - \alpha$ entgegengesetzt gleich sind. Dagegen ist $\sin(-\alpha) = \cos(90^0 + \alpha) = -\cos(90^0 - \alpha)$, weil die Summe der Winkel $90^0 + \alpha$ und $90^0 - \alpha$ den Werth $180^0$ hat.

Die besondern Werthe

$$\sin 0 = 0,\quad \sin 90^0 = 1,\quad \sin 180^0 = 0,\quad \sin 270^0 = -1$$

u. s. w. ergeben sich aus den Werthen von $\cos 90^0$, $\cos 0$, ... Vergl. die Figur §. 3, 10. Zur Benutzung der Tabellen dienen die Reductionen

$$\cos\alpha = -\sin(\alpha - 90^0) \qquad \sin\alpha = \cos(\alpha - 90^0)$$
$$= -\cos(\alpha - 180^0) \qquad = -\sin(\alpha - 180^0)$$
$$= \sin(\alpha - 270^0) \qquad = -\cos(\alpha - 270^0)$$

4. Aus den gefundenen Eigenschaften der Cosinus und Sinus fließen die entsprechenden Eigenschaften der Tangenten und Cotangenten zufolge der Definitionen

$$\tang\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \cot\alpha = \tang(90^0 - \alpha)$$

Weil $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$, so ist

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tang\alpha}$$

Zwei Winkel, deren Differenz $180^0$ beträgt, haben dieselben Tangenten und Cotangenten. Zwei Winkel, deren Summe 0 oder $180^0$ beträgt, haben entgegengesetzt gleiche Tangenten und Cotangenten. Z. B.

$$\tang(\alpha + 180^0) = \tang\alpha$$
$$\tang(-\alpha) = \tang(-\alpha + 180^0) = -\tang\alpha$$

weil bei dem Uebergang von $\alpha$ zu $\alpha + 180^0$ sowohl der Sinus als auch der Cosinus das Zeichen wechselt, während bei den Uebergängen von $\alpha$ zu $-\alpha$ oder $-\alpha + 180^0$ nur der eine von beiden das Zeichen wechselt.

Die besondern Werthe

$$\tang 0 = 0,\quad \tang 45^0 = 1,\quad \tang 90^0 = \infty$$
$$\tang 135^0 = -1,\quad \tang 180^0 = 0,\quad \tang 225^0 = 1$$
$$\tang 270^0 = \infty,\quad \tang 315^0 = -1,\quad \text{u. s. f.}$$

ergeben sich aus den zugehörigen Werthen der Sinus und Cosinus.

Anmerkung. Jede der Gleichungen $\cos x = a$, $\sin x = b$, $\tang x = c$ giebt dem unbekannten Winkel $x$ unendlich viel bestimmte Werthe.

Ist $\alpha$ eine Wurzel der Gleichung $\cos x = a$, so ist auch $-\alpha$ eine Wurzel derselben. Die andern Wurzeln sind in den Formeln $\alpha + k.360^0$, $-\alpha + k.360^0$ enthalten, wo für $k$ jede ganze Zahl gesetzt werden kann (1).

Ist $\beta$ eine Wurzel der Gleichung $\sin x = b$, so ist auch $\beta + k.360^0$ und $180^0 - \beta + k.360^0$ eine Wurzel derselben.

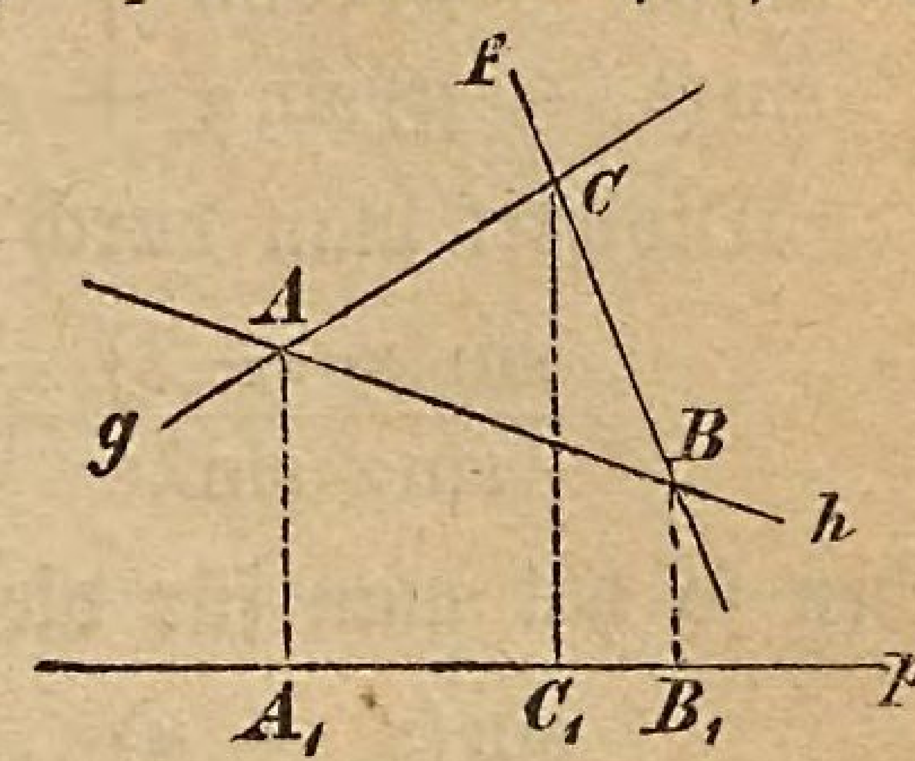
Ist $\gamma$ eine Wurzel der Gleichung $\operatorname{tang} x = c$, so ist auch $\gamma + k.360^0$ und $\gamma + 180^0 + k.360^0$ eine Wurzel derselben.

Die Arcus der gefundenen Winkel (Planim. §. 13, 8) werden in der Analysis durch arc cos $a$, arc sin $b$, arc tang $c$ bezeichnet, früher durch Ang cos $a$ oder arc(cos $= a$) u. s. w.

5. Die Geraden auf denen die Seiten $BC$, $CA$, $AB$ eines Dreiecks liegen, werden durch $f$, $g$, $h$, eine willkürliche Gerade der Ebene $ABC$ wird durch $p$ bezeichnet. Nach willkürlicher Festsetzung des positiven Sinnes der Ebene (1) und der positiven Richtungen von $f$, $g$, $h$, $p$ sind die Strecken und Winkel der Figur auch dem Zeichen nach bestimmt und durch folgende Gleichungen verbunden:*)

$$BC \cos pf + CA \cos pg + AB \cos ph = 0$$
$$BC \sin pf + CA \sin pg + AB \sin ph = 0$$
$$BC : CA : AB = \sin gh : \sin hf : \sin fg$$

Beweis. Bezeichnet man durch $A_1$, $B_1$, $C_1$ die Normalprojectionen von $A$, $B$, $C$ auf $p$, so ist $A_1B_1 = AB \cos ph$ (2), u. s. w. Nun ist $B_1C_1 + C_1A_1 + A_1B_1 = 0$ (Planim. §. 14, 1), folglich $BC \cos pf + CA \cos pg + AB \cos ph = 0$. Dreht man die Gerade $p$ um $90^0$, so geht der Winkel $ph$ in $ph - 90^0$, und $\cos ph$ in $\cos(ph - 90^0)$ d. i. $\sin ph$ (3) über, u. s. w. Also ist auch




$$BC \sin pf + CA \sin pg + AB \sin ph = 0$$

Durch Vereinigung der willkürlichen Geraden $p$ einmal mit $f$, dann mit $g$, findet man die Gleichungen

$$CA \sin fg + AB \sin fh = 0, \quad BC \sin gf + AB \sin gh = 0$$

welche die aufgestellte Proportion enthalten, in Betracht daß $\sin ff = 0$, $\sin fh = -\sin hf$ (3), u. s. w.

Anmerkung. Wenn die Seiten $BC$, $CA$, $AB$ des Dreiecks $ABC$

*) Vergl. unten §. 6, 1. Den genauen Ausdruck namentlich der dritten Gleichung verdankt man Möbius (Kreisverw. in der Einleitung).

positive Strecken der Geraden $f$, $g$, $h$ sind und die Werthe $a$, $b$, $c$ haben, so werden die durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bezeichneten Winkel $BAC$, $CBA$, $ACB$ des Dreiecks von den Winkeln $gh$, $hf$, $fg$ zu $180^0$ ergänzt. Nun ist $\sin\alpha = \sin gh$ (3), u. s. w., folglich

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma \quad (§. 1, 8)$$

6. Wenn man in die gefundenen Gleichungen für $BC$, $CA$, $AB$ die ihnen proportionalen Werthe $\sin gh$, $\sin hf$, $\sin fg$ setzt, so erhält man die für 4 beliebige Gerade einer Ebene, $f$, $g$, $h$, $p$ gültigen Gleichungen

$$\sin gh \cos fp + \sin hf \cos gp + \sin fg \cos hp = 0$$
$$\sin gh \sin fp + \sin hf \sin gp + \sin fg \sin hp = 0$$

aus denen die Relationen der goniometrischen Functionen sich ableiten lassen.

Setzt man die Winkel

$$fp = \varkappa, \quad gp = \lambda, \quad hp = \mu$$

so ist

$$gh = \lambda - \mu, \quad hf = \mu - \varkappa, \quad fg = \varkappa - \lambda$$

weil $gh = gp - hp$ (1), u. s. w. Demnach ist für 3 beliebige Winkel $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$

$$\sin(\lambda - \mu)\cos\varkappa + \sin(\mu - \varkappa)\cos\lambda + \sin(\varkappa - \lambda)\cos\mu = 0$$
$$\sin(\lambda - \mu)\sin\varkappa + \sin(\mu - \varkappa)\sin\lambda + \sin(\varkappa - \lambda)\sin\mu = 0$$

Dividirt man durch $\sin\varkappa \sin\lambda \sin\mu$, so erhält man

$$\frac{\sin(\varkappa - \lambda)}{\sin\varkappa \sin\lambda} + \frac{\sin(\lambda - \mu)}{\sin\lambda \sin\mu} + \frac{\sin(\mu - \varkappa)}{\sin\mu \sin\varkappa} = 0$$

Eben so hat man für die Winkel $\varkappa$, $\mu$, $\nu$

$$\frac{\sin(\varkappa - \mu)}{\sin\varkappa \sin\mu} + \frac{\sin(\mu - \nu)}{\sin\mu \sin\nu} + \frac{\sin(\nu - \varkappa)}{\sin\nu \sin\varkappa} = 0$$

daher durch Addition*)

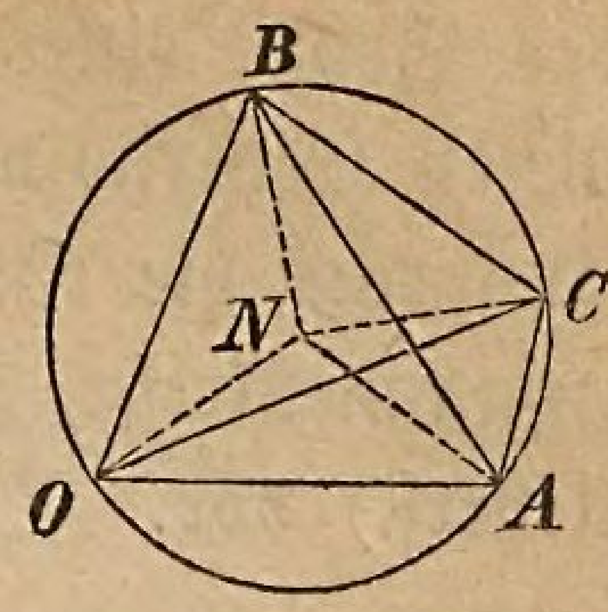
$$\frac{\sin(\varkappa - \lambda)}{\sin\varkappa \sin\lambda)} + \frac{\sin(\lambda - \mu)}{\sin\lambda \sin\mu} + \frac{\sin(\mu - \nu)}{\sin\mu \sin\nu} + \frac{\sin(\nu - \varkappa)}{\sin\nu \sin\varkappa} = 0$$

u. s. f. Als Divisoren können an die Stelle von $\sin\varkappa, \ldots$ auch $\cos\varkappa, \ldots$ gesetzt werden.

Anmerkung. Die obige Fundamentalgleichung der Goniometrie wurde im Alterthum durch den Ptolemäischen Lehrsatz (Planim. §. 14, 15)

---

*) Carnot géom. de pos. 139 ff., 215 und 216.




vertreten. Wenn nämlich die in einerlei Sinn beschriebenen Kreisbogen $AO$, $BO$, $CO$ die Centriwinkel $2\varkappa$, $2\lambda$, $2\mu$ haben, so haben die Bogen $AB$, $BC$, $CA$ die Centriwinkel $2\varkappa - 2\lambda$, $2\lambda - 2\mu$, $2\mu - 2\varkappa$. Die Sehne eines Kreisbogens ist das Product des Diameters mit dem Sinus des halben dem Bogen zugehörigen Centriwinkels (§. 1, 6) und wechselt mit dem Bogen das Zeichen. Also giebt die gefundene Gleichung

$$\frac{AB}{OA.OB} + \frac{BC}{OB.OC} + \frac{CA}{OC.OA} = 0, \text{ u. s. w.}$$

7. Die Substitution $\varkappa = \alpha$, $\lambda = \beta$, $\mu = 0$ giebt (6)

$$\text{I.} \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

Bei Vertauschung von $\beta$ mit $-\beta$ bleibt $\cos\beta$ unverändert, $\sin\beta$ wechselt das Zeichen. Vertauscht man $\alpha$ mit $90^0 - \alpha$, so findet man aus diesen Gleichungen

$$\text{II.} \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

Setzt man hierin $\beta = \alpha$, so erhält man

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \cos 0 = 1$$

in Uebereinstimmung mit §. 2, 2 und

$$\text{III.} \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha = 2\operatorname{tang}\alpha \cos^2\alpha = \frac{2\operatorname{tang}\alpha}{1 + \operatorname{tang}^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tang}^2\alpha}{1 + \operatorname{tang}^2\alpha}$$

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich

$$\text{IV.} \quad 1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$$
$$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$$
$$\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \cot^2\alpha$$

Anmerkung. Diese Gleichungen enthalten den Zusammenhang zwischen dem Sinus und dem Cosinus eines Winkels, zwischen den Sinus und Cosinus von zwei Winkeln und dem Sinus oder Cosinus der Summe und der Differenz von beiden Winkeln, zwischen dem Sinus und Cosinus eines Winkels und dem Sinus oder Cosinus des doppelten oder halben Winkels. Man kann also aus dem Sinus eines Winkels die Sinus von beliebig vielen Winkeln berechnen.

Die Relationen der goniometrischen Functionen wurden im Alterthum als Gleichungen zwischen Kreissehnen dargestellt (6, Anm.); aus

der Sehne eines Centriwinkels berechnete man die Sehnen von beliebig vielen Centriwinkeln. Ein dazu dienlicher Satz, dessen goniometrischer Ausdruck die Gleichung $\sin^2 \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha$ ist und mit (III, 1) zusammentrifft, kommt bei Archimedes (Cyclom. p. 114 der Nizze'schen Uebers.) vor.

8. Die Gleichungen (7) geben

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= 2\sin\alpha \cos\beta \\
\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) &= 2\cos\alpha \sin\beta \\
\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) &= 2\cos\alpha \cos\beta \\
\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) &= 2\sin\alpha \sin\beta
\end{aligned}$$

Die Multiplication von zwei Sinus oder Cosinus kann demnach auf die Addition oder Subtraction von zwei Sinus oder Cosinus zurückgeführt werden. Diese Methode (προςϑ-αφαίρεσις) ist beim numerischen Rechnen durch die Erfindung der Logarithmen überflüssig geworden.

Die Multiplication der gefundenen Gleichungen giebt, wenn man $\sin 2\alpha$ für $2\sin\alpha\cos\alpha, \ldots$ setzt (7)

$$\sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta) = \cos^2(\alpha-\beta) - \cos^2(\alpha+\beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta.$$

Durch Division findet man ebendaher

$$\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\beta}$$

$$\frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)} = \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta$$

Anders gestalten sich die gefundenen Gleichungen, wenn man

$$\alpha + \beta = x, \quad \alpha - \beta = y$$

folglich

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(x + y), \quad \beta = \tfrac{1}{2}(x - y)$$

setzt, wie folgt:

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin y &= 2\sin\tfrac{1}{2}(x + y)\cos\tfrac{1}{2}(x - y) \\
\sin x - \sin y &= 2\cos\tfrac{1}{2}(x + y)\sin\tfrac{1}{2}(x - y) \\
\cos y + \cos x &= 2\cos\tfrac{1}{2}(x + y)\cos\tfrac{1}{2}(x - y) \\
\cos y - \cos x &= 2\sin\tfrac{1}{2}(x + y)\sin\tfrac{1}{2}(x - y)
\end{aligned}$$

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \cos^2 x = \sin(x + y)\sin(x - y)$$

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x - y)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x + y)} \quad (\S.\ 3,\ 9)$$

$$\frac{\cos y - \cos x}{\cos y + \cos x} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(x - y)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(x + y)$$

9. Aus den Gleichungen (7) folgt

$$\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cos\beta} = \operatorname{tang}\alpha \pm \operatorname{tang}\beta, \quad \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha \sin\beta} = \cot\beta \pm \cot\alpha$$

$$\frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cos\beta} = 1 \mp \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta, \quad \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha \sin\beta} = \cot\alpha \cot\beta \mp 1$$

Bei Vertauschung von $\beta$ mit $-\beta$ wechseln $\operatorname{tang}\beta$ und $\cot\beta$ das Zeichen. Durch Division findet man

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}, \quad \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{1 + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta}{1 - \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta}$$

$$\operatorname{tang}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{1 - \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta}, \quad \cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot\alpha \cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$$

Insbesondere hat man, weil $\operatorname{tang} 45^0 = 1$,

$$\operatorname{tang}(45^0 + \beta) = \frac{1 + \operatorname{tang}\beta}{1 - \operatorname{tang}\beta}$$

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tang}\alpha}{1 - \operatorname{tang}^2\alpha}, \quad \cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$$

Anmerkung. Wenn ein gegebener Winkel in die Theile $x$ und $y$ zu theilen ist, so daß $\sin x : \sin y$ oder $\cos x : \cos y$ einen gegebenen Werth hat, so berechnet man $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x - y)$ u. s. w. Wenn $\sin x \cos y$ oder $\operatorname{tang} x : \operatorname{tang} y$ gegeben ist, so findet man $\sin(x - y)$. Wenn $\sin x \sin y$ oder $\operatorname{tang} x \operatorname{tang} y$ gegeben ist, so findet man $\cos(x - y)$. Wenn $\sin x + \sin y$ gegeben ist, so findet man $\cos\frac{1}{2}(x - y)$. Wenn $\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y$ gegeben ist, so findet man $\cos(x - y)$. U. s. w.

10. Die in (5) aufgestellte trigonometrische Gleichung giebt, wenn die Gerade $p$ der Reihe nach mit $f$, $g$, $h$ zusammenfällt, das System von Gleichungen

$$\begin{aligned} BC \quad &+ CA \cos fg + AB \cos hf = 0 \\ BC \cos fg &+ CA \quad + AB \cos gh = 0 \\ BC \cos hf &+ CA \cos gh + AB \quad = 0 \end{aligned}$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $BC$, die zweite mit $CA$, die dritte mit $-AB$, so findet man

$$BC^2 + CA^2 - AB^2 + 2\,BC.CA \cos fg = 0$$

mit §. 2, 3 übereinstimmend, in Betracht, daß $\cos fg = -\cos ACB$, wenn $BC$, $CA$ positive Strecken der Geraden $f$, $g$ sind (5, Anm.).

Bezeichnet man die Seiten des Dreiecks $ABC$ wie gewöhnlich durch $a$, $b$, $c$, und die gegenüberliegenden Winkel durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, so ist wie oben (§. 2, 5)

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$1 - \cos\gamma = \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab} = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{2ab}$$

$$1 + \cos\gamma = \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}$$

Nun ist (7)

$$\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma} = \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\gamma$$

also hat man

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a+b-c)} = \frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}$$

indem man $a + b + c = 2s$ setzt (§. 3, 5).

**11.** Wenn die Winkel des von den Geraden $f$, $g$, $h$ gebildeten Dreiecks in der angegebenen Weise durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bezeichnet werden, so ist

$$1 - \cos^2 gh - \cos^2 hf - \cos^2 fg + 2\cos gh \cos hf \cos fg = 0$$

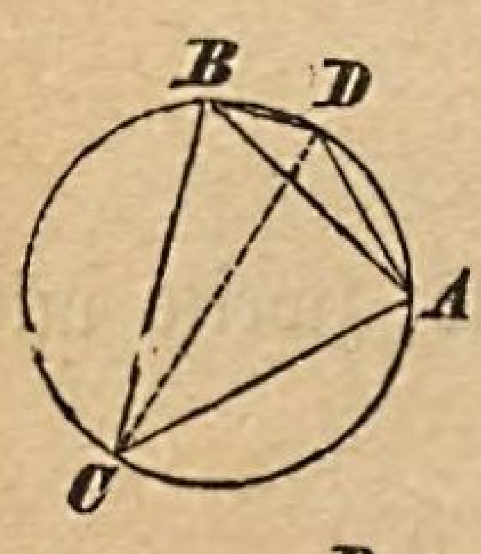
$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 0\text{*)}$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = 0$$

$$(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)(-\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)(\sin\alpha - \sin\beta + \sin\gamma)$$
$$(\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma)$$
$$= 4\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma$$

Beweis. Die erste Gleichung fließt aus dem System der oben (10) aufgestellten Gleichungen, wenn man die Strecken $CA$, $AB$ eliminirt. Geometrisch findet man dieselbe und die verwandte Gleichung, indem man einem Kreise, dessen Diameter eine Längeneinheit ist, ein Dreieck $ABC$ einschreibt, dessen Seiten $BC$, $CA$, $AB$ die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gegenüberliegen. Dann ist auch dem Zeichen nach (6, Anm.)

$$BC = \sin\alpha,\quad CA = \sin\beta,\quad AB = \sin\gamma$$



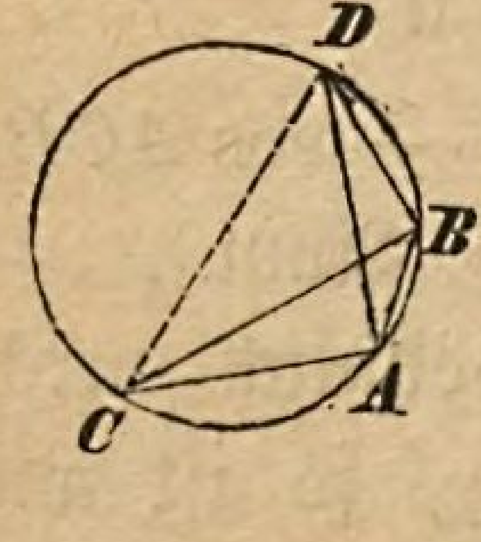

folglich (10)

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = 0$$

Zieht man noch den Diameter $CD$, so ist entweder

$$AD = \cos\beta,\quad DB = \cos\alpha,\quad \cos BDA = -\cos\gamma$$

oder




$$AD = \cos\beta,\quad DB = \cos\alpha,\quad \cos BDA = -\cos\gamma$$

je nachdem $B$ von dem Halbkreis $CAD$ ausgeschlossen ist oder nicht. Nun ist $AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2AD.DB \cos BDA$ (10), folglich in jedem Falle

$$\sin^2\gamma = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

*) Euler Acta Petrop. 6, I p. 3.

Dieselben Gleichungen folgen aus (7), wenn man beachtet, daß $\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$, $\cos\gamma = -\cos(\alpha + \beta)$, weil $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$. Man findet $\sin^2\gamma$

$$= \sin^2\alpha \cos^2\beta + \cos^2\alpha \sin^2\beta + 2\sin\alpha \sin\beta \cos\alpha \cos\beta$$
$$= \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin^2\alpha \sin^2\beta + 2\sin\alpha \sin\beta \cos\alpha \cos\beta$$
$$= \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha \sin\beta \cos(\alpha + \beta)$$

oder

$$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos^2\alpha \cos^2\beta + 2\sin\alpha \sin\beta \cos\alpha \cos\beta$$
$$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha \cos\beta \cos(\alpha + \beta)$$

Die dritte Gleichung folgt am einfachsten aus der Gleichung (Planim. §. 14, 23)

$$(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) = 16\Delta^2$$

wenn man die Seiten $a$, $b$, $c$ des Dreiecks als Producte des Diameters $2r$ des umgeschriebenen Kreises mit den Sinus der den Seiten gegenüberliegenden Winkel darstellt. Nun ist (§. 1, 8)

$$\frac{\Delta^2}{r^4} = 4\sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma$$

folglich u. s. w.

Anmerkung. Bezeichnet man durch $f$, $g$, $h$ die Geraden, welche die Eckpuncte $A$, $B$, $C$ des Dreiecks $ABC$ mit einem vierten Punct $D$ verbinden, durch $a$, $b$, $c$ die Seiten des Dreiecks, durch $p$, $q$, $r$ die Strecken $DA$, $DB$, $DC$, so hat man (10) $2DA.DB\cos fg = AD^2 + DB^2 - BA^2$, u. s. w., folglich

$$\cos fg = \frac{p^2+q^2-c^2}{2pq}, \quad \cos gh = \frac{q^2+r^2-a^2}{2qr}, \quad \cos hf = \frac{r^2+p^2-b^2}{2rp}$$

Durch Substitution dieser Werthe in der Gleichung

$$1 - \cos^2 fg - \cos^2 gh - \cos^2 hf + 2\cos fg \cos gh \cos hf = 0$$

erhält man

$$1 - \frac{(p^2 + q^2 - c^2)^2}{4p^2q^2} - \frac{(q^2 + r^2 - a^2)^2}{4q^2r^2} - \frac{(r^2 + p^2 - b^2)^2}{4r^2p^2}$$
$$+ \frac{(p^2 + q^2 - c^2)(q^2 + r^2 - a^2)(r^2 + p^2 - b^2)}{4p^2q^2r^2} = 0$$

oder entwickelt.*)

$$a^2p^2(b^2 + c^2 - a^2 + q^2 + r^2 - p^2)$$
$$+ b^2q^2(c^2 + a^2 - b^2 + r^2 + p^2 - q^2)$$
$$+ c^2r^2(a^2 + b^2 - c^2 + p^2 + q^2 - r^2)$$
$$- a^2q^2r^2 - b^2r^2p^2 - c^2p^2q^2 - a^2b^2c^2 = 0$$

*) Euler a. a. O.

Diese Gleichung enthält die Relation zwischen den 6 Strecken, welche 4 Puncte einer Ebene verbinden.

12. Die Fläche des von den Geraden $f$, $g$, $h$ gebildeten Dreiecks $ABC$ wird durch die Formeln (§. 1, 7)

$$\tfrac{1}{2}BC.\,CA\,\sin fg,\quad \tfrac{1}{2}CA.\,AB\sin gh,\quad \tfrac{1}{2}AB.\,BC\sin hf$$

welche nach (5) einander gleich sind, auch dem Zeichen nach ausgedrückt. Die auf gleiche Weise für die Fläche $ACB$ gebildete Formel $\tfrac{1}{2}AC.\,CB\sin gf$ ist der Formel $\tfrac{1}{2}BC.CA\,\sin fg$ entgegengesetzt gleich, sowie die Flächen $ABC$ und $ACB$ entgegengesetzt gleich sind (Planim. §. 9, 7).

Die Fläche eines Vierecks $ABCD$ ist durch die Seiten $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ und die Summe von zwei nichtfolgenden Winkeln z. B. $CBA + ADC$ bestimmt. Unter Beachtung der Zeichen der Dreiecke ist nämlich in allen Fällen

$$ABCD = ABC + CDA$$

Bezeichnet man die Fläche des Vierecks durch $u$, seine Seiten der Reihe nach durch $a$, $b$, $c$ $d$, die Winkel $CBA$ und $ADC$ durch $\alpha$ und $\gamma$, so hat man

$$4u = 2ab\sin\alpha + 2cd\sin\gamma$$

Nun ist (10)

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\gamma$$

folglich

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos\alpha - 2cd\cos\gamma$$

Indem man quadrirt und addirt, findet man

$$16u^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$
$$= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd\,(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma)$$

oder

$$16u^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 8abcd\cos(\alpha+\gamma)$$

Es ist aber (7)

$$\cos(\alpha + \gamma) = 2\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma) - 1 = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma)$$

folglich

$$16u^2 = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 16abcd\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma)$$
$$= 4(ab - cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 16abcd\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma)$$

Setzt man zur Abkürzung (Planim. §. 14, 29)

$$4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 16v^2$$
$$4(ab - cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 16v_1{}^2$$

wobei $v^2 - v_1{}^2 = abcd$ ist, so bleibt

$$u^2 = v^2 - abcd \cos^2 \tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma)^{*)} = v_1{}^2 + abcd \sin^2 \tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma)$$

Hieraus erkennt man, daß $v$ der größte, $v_1$ der kleinste Werth ist, welchen die von den Seiten $a$, $b$, $c$, $d$ eingeschlossene Fläche $u$ erhalten kann. Jener wird erreicht, wenn $\cos\frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = 0$, $\alpha + \gamma = 180^0$, und das Viereck einem Kreise so eingeschrieben ist, daß der Perimeter sich selbst nicht schneidet (Planim. §. 15, 7); der kleinste Werth wird erreicht, wenn $\sin\frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = 0$, $\alpha + \gamma = 0$, und das Viereck einem Kreise so eingeschrieben ist, daß der Perimeter sich selbst schneidet.**)

In dem ersten Falle ist $\cos\gamma = -\cos\alpha$, mithin

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

Daraus findet man wie oben (10)

$$1 - \cos\alpha = \frac{-(a+b)^2 + (c+d)^2}{2ab + 2cd} = \frac{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)}{2ab + 2cd}$$

$$1 + \cos\alpha = \frac{(a+b)^2 - (c-d)^2}{2ab + 2cd} = \frac{(a+b-c+d)(a+b+c+d)}{2ab + 2cd}$$

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)}{a+b-c+d)(a+b+c-d)} = \frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)(s-d)}$$

wenn man $a + b + c + d = 2s$ setzt (Planim. §. 14, 29). Aehnliche Werthe ergeben sich bei dem zweiten Falle, in welchem $\cos\gamma = \cos\alpha$ ist.

**13.** Die Mitten der Seiten $BC$, $CA$, $AB$ des Dreiecks $ABC$ werden durch $A_1$, $B_1$, $C_1$ bezeichnet, das Centrum des Kreises $ABC$ durch $M$, der gemeinschaftliche Punct der Höhen $OA$, $PB$, $QC$ durch $N$, die Winkel des Dreiecks durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, der Abstand des Punctes $M$ von $A$, $B$, $C$ durch $r$, der Abstand der Seiten $OP$, $PQ$, $QO$ des Dreiecks $OPQ$ von dem Punct $N$ durch $\varrho$ (Planim. §. 6, 9). Dann ist

$$A_1M = r\cos\alpha,\quad B_1M = r\cos\beta,\quad C_1M = r\cos\gamma$$

$$NA = 2r\cos\alpha,\quad NB = 2r\cos\beta,\quad NC = 2r\cos\gamma$$

$$ON = 2r\cos\beta\cos\gamma,\quad PN = 2r\cos\gamma\cos\alpha,\quad QN = 2r\cos\alpha\cos\beta$$

$$QP = r\sin 2\alpha,\quad OQ = r\sin 2\beta,\quad PO = r\sin 2\gamma$$

$$OPQ : ABC = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \varrho : r^{***)}$$

Beweis. Die positiven Richtungen der Geraden $f$, $g$, $h$, auf denen die Seiten $BC$, $CA$, $AB$ liegen, werden so bestimmt, daß die ge-

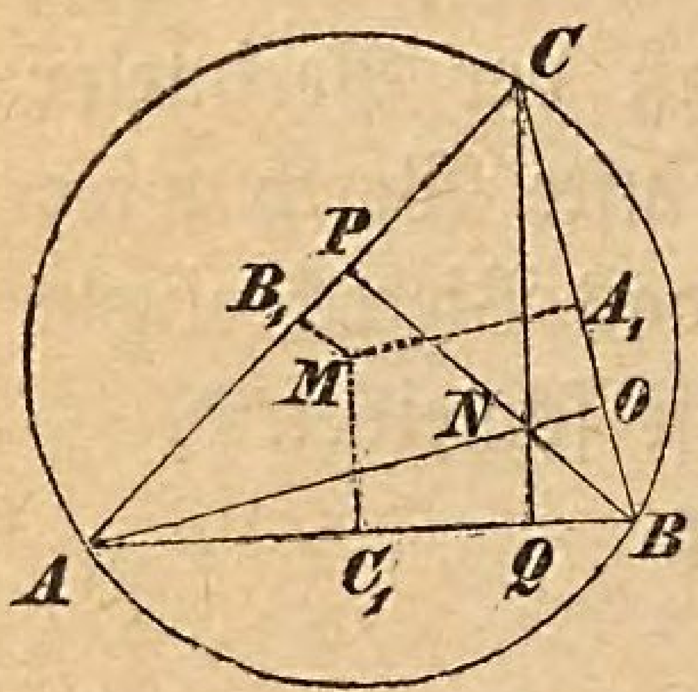
---

*) Strehlke Grun. Archiv 2 p. 326. Vergl. 4 p. 447, 34 p. 12 derselben Zeitschrift.

**) Diese Eigenschaft des einem Kreise eingeschriebenen Vierecks, dessen Perimeter sich selbst schneidet, ist von L'Huilier gefunden worden (de relatione mutua . . p. 23).

***) Feuerbach das geradlinige Dreieck 23 ff.

nannten Strecken positiv sind; die positiven Richtungen ihrer Normalen $f'$, $g'$, $h'$ werden so bestimmt, daß die Winkel $ff'$, $gg'$, $hh'$ je $90^0$ betragen; die positiven Richtungen der Geraden $k$, $l$, auf denen die Strecken $AM$, $BM$ liegen, werden so bestimmt, daß diese Strecken den Werth $r$ haben. Dann ist $C_1M = AM \cos kh'$, $kh' = \frac{1}{2}kl = \gamma$, also $C_1M = r\cos\gamma$, u. s. f. Die Strecke $NC$ hat mit $C_1M$ einerlei Richtung und ist doppelt so groß (Planim. §. 12, 8). Ferner ist $ON = CN\cos h'f'$, $h'f' = hf = 180^0 - \beta$, folglich $ON = NC\cos\beta$ u. s. w.




Weil $PA = BA\cos gh = AB\cos\alpha$ und $AQ = AC\cos gh = CA\cos\alpha$, so ist $PAQ : CAB = PA.AQ : CA.AB = \cos^2\alpha$, u. s. w. Durch Subtraction der Dreiecke $PAQ$, $QBO$, $OCP$ von $ABC$ behält man

$$OPQ : ABC = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \quad (11)$$

Weil $B$, $C$, $P$, $Q$ auf einem Kreise liegen, so sind die Dreiecke $APQ$ und $ABC$ ähnlich, $QP : PA = BC : AB$, folglich

$$QP = BC\cos\alpha = 2r\sin\alpha\cos\alpha = r\sin 2\alpha$$

$$2PQN = \varrho r\sin 2\alpha, \ldots, 2OPQ = \varrho r(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$$

Nun ist $2ABM = AB.C_1M = 2r^2\sin\gamma\cos\gamma = r^2\sin 2\gamma, \ldots$, also

$$2ABC = r^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$$

$$OPQ : ABC = \varrho : r$$

Für das Product $QN.NC$ findet man den Werth

$$4r^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 2r\varrho$$

in Uebereinstimmung mit Planim. §. 14, 7, weil $r$ der Diameter des Kreises $OPQ$ ist (Planim. §. 12, 8).

**14.** Wenn die Puncte $D$ und $F$ gleiche Abstände $d$ und $f$ von den Seiten des Dreiecks $ABC$ haben, und zwar $D$ in dem Dreieck, $F$ außen auf der Geraden, die den Winkel $BAC$ halbirt, so ist bei der angenommenen Bezeichnung (13)

$$AD = 4r\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma,\quad AF = 4r\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$d = 4r\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma,\quad f = 4r\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$ND^2 = 2d^2 - 2r\varrho,\quad NF^2 = 2f^2 - 2r\varrho\text{*)}$$

Beweis. Die Geraden, von welchen $AD$ und $BD$ positive Strecken sind, werden durch $x$ und $y$ bezeichnet. Dann ist $AD : AB =$

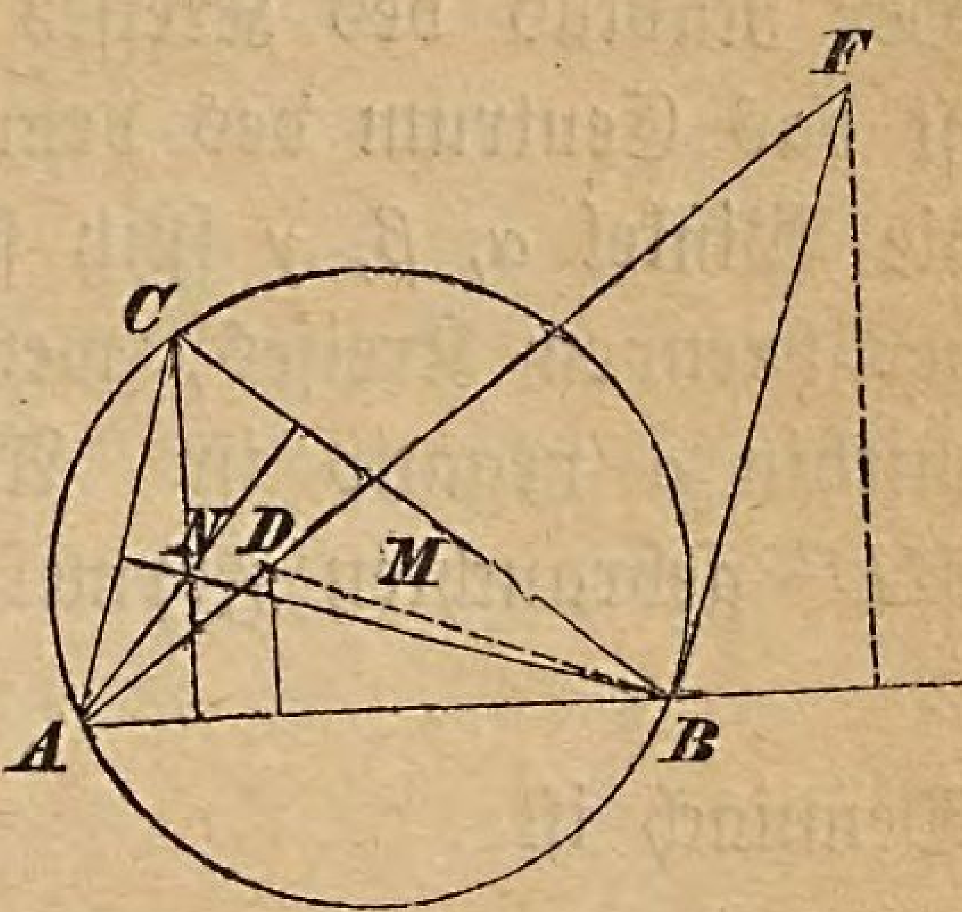
*) Feuerbach a. a. O. 51 ff. Für $NF^2$ steht daselbst durch ein Versehn der Werth $2f^2 + 2r\varrho$.

$\sin yh : \sin yx$ (5), $hx = \frac{1}{2}\alpha$, $hy = 180^0 - \frac{1}{2}\beta$, $xy = 180^0 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, folglich

$$AD = \frac{AB \sin \frac{1}{2}\beta}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{2r \sin\gamma \sin \frac{1}{2}\beta}{\cos \frac{1}{2}\gamma} = 4r \sin \tfrac{1}{2}\beta \sin \tfrac{1}{2}\gamma$$

Der Winkel $FBA$ übertrifft den Winkel $DBA$ um $90^0$, also ist $AF : AB = \cos yh : \cos yx$, und

$$AF = \frac{AB \cos \frac{1}{2}\beta}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{2r \sin\gamma \cos \frac{1}{2}\beta}{\sin \frac{1}{2}\gamma} = 4r \cos \tfrac{1}{2}\beta \cos \tfrac{1}{2}\gamma$$




Nun ist $d : AD = f : AF = \cos h'x = \cos(hx - 90^0) = \sin \frac{1}{2}\alpha$, folglich u. s. w.

In dem Dreieck $AND$ hat man nach (10)

$$ND^2 = NA^2 + AD^2 + 2NA . AD \cos xf'$$

Nun ist

$$xf' = xh + hf + ff' = 180^0 - \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)$$

also erhält man

$$ND^2 = NA^2 + AD^2 - 2NA . AD \cos \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)$$
$$= 4r^2 \cos^2\alpha + 16r^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma - 16r^2 \cos\alpha \sin \tfrac{1}{2}\beta \sin \tfrac{1}{2}\gamma \cos \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)$$
$$= 16r^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma + 4r^2 \cos^2\alpha$$
$$- 16h^2 \cos\alpha \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma - 16r^2 \cos\alpha \sin \tfrac{1}{2}\beta \sin \tfrac{1}{2}\gamma \cos \tfrac{1}{2}\beta \cos \tfrac{1}{2}\gamma$$
$$= 32r^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma - 4r^2 \cos\alpha (\sin\beta \sin\gamma - \cos\alpha)$$
$$= 2d^2 - 2r\varrho \quad (13)$$

Eben so findet man

$$NF^2 = NA^2 + AF^2 - 2NA . AF \cos \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)$$
$$= 4r^2 \cos^2\alpha + 16r^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\beta \cos^2 \tfrac{1}{2}\gamma - 16r^2 \cos\alpha \cos \tfrac{1}{2}\beta \cos \tfrac{1}{2}\gamma \cos \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)$$
$$= 16r^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\beta \cos^2 \tfrac{1}{2}\gamma + 4r^2 \cos^2\alpha$$
$$- 16r^2 \cos\alpha \cos^2 \tfrac{1}{2}\beta \cos^2 \tfrac{1}{2}\gamma - 16r^2 \cos\alpha \cos \tfrac{1}{2}\beta \cos \tfrac{1}{2}\gamma \sin \tfrac{1}{2}\beta \sin \tfrac{1}{2}\gamma$$
$$= 32r^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha \cos^2 \tfrac{1}{2}\beta \cos^2 \tfrac{1}{2}\gamma - 4r^2 \cos\alpha (\sin\beta \sin\gamma - \cos\alpha)$$
$$= 2f^2 - 2r\varrho$$

Anmerkung. Wenn man auf der Geraden $AB$ die Strecken $KA = CA$, $BL = BC$ macht, so hat das Dreieck $KLC$ an der Seite $KL = 2s$ die Winkel $\frac{1}{2}\alpha$ und $\frac{1}{2}\beta$, also ist

$$\frac{KL}{\sin KCL} = \frac{LC}{\sin LKC}, \quad \frac{2s}{\cos \frac{1}{2}\gamma} = \frac{2a \cos \frac{1}{2}\beta}{\sin \frac{1}{2}\alpha} = \frac{4a \cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta}{\sin\alpha}$$

$$\frac{s}{2 \cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

15. Daß der Feuerbach'sche Kreis $OPQ$ von den Kreisen berührt wird, welche die Seiten des Dreiecks $ABC$ berühren, von dem einge=

schriebenen Kreise innen, von den drei andern außen*), ergiebt sich aus folgender Rechnung.

Das Centrum $M_1$ des Kreises $OPQ$ ist die Mitte von $MN$ (Planim. §. 12, 8), also hat man (Plan. §. 14, 18)

$$M_1D^2 = \tfrac{1}{2}MD^2 + \tfrac{1}{2}ND^2 - M_1N^2$$
$$M_1F^2 = \tfrac{1}{2}MF^2 + \tfrac{1}{2}NF^2 - M_1N^2$$

Ferner ist (Planim. §. 14, 4)

$$MD^2 = r^2 - 2rd, \quad MF^2 = r^2 + 2rf$$

Der Radius des Kreises $OPQ$ hat den Werth $\frac{1}{2}r$, und der Punct $N$ ist das Centrum des dem Dreieck $OPQ$ eingeschriebenen Kreises, wenn die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ spitz sind, oder eines die Seiten des Dreiecks $OPQ$ berührenden Kreises, wenn einer unter den Winkeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ stumpf, mithin $\varrho$ negativ ist. Also hat man in jedem Falle zufolge der für $MD^2$ gebrauchten Formel

$$M_1N^2 = \tfrac{1}{4}r^2 - r\varrho$$

Demnach ist

$$M_1D^2 = \tfrac{1}{2}r^2 - rd + d^2 - r\varrho - \tfrac{1}{4}r^2 + r\varrho = (\tfrac{1}{2}r - d)^2$$
$$M_1F^2 = \tfrac{1}{2}r^2 + rf + f^2 - r\varrho - \tfrac{1}{4}r^2 + r\varrho = (\tfrac{1}{2}r + f)^2$$

Da $M_1D$ die Differenz der Radien der Kreise $(M_1)$ und $(D)$, $M_1F$ die Summe der Radien der Kreise $(M_1)$ und $(F)$ ist, so wird der Kreis $(M_1)$ von dem Kreise $(D)$ innen, von dem Kreise $(F)$ außen berührt (Planim. §. 3, 3), u. s. w.

Bezeichnet man durch $G$ und $H$ die Centren der beiden andern Kreise, welche die Seiten des Dreiecks $ABC$ berühren, durch $g$ und $h$ ihre Radien, so hat man

$$M_1D = \tfrac{1}{2}r - d, \quad M_1F = \tfrac{1}{2}r + f, \quad M_1G = \tfrac{1}{2}r + g, \quad M_1H = \tfrac{1}{2}r + h$$
$$M_1D + M_1F + M_1G + M_1H = 2r + f + g + h - d = 6r$$

Vergl. die Anmerkung zu Planim. §. 14, 4.

## §. 5. Sphärische Trigonometrie.

**1.** Bei der trigonometrischen Behandlung von sphärischen Figuren wird gewöhnlich vorausgesetzt, daß der Radius der Kugel, auf der sie liegen, eine Längeneinheit ist. Demgemäß werden die Bogen von Hauptkreisen für ihre Centriwinkel gesetzt (§. 3, 10).

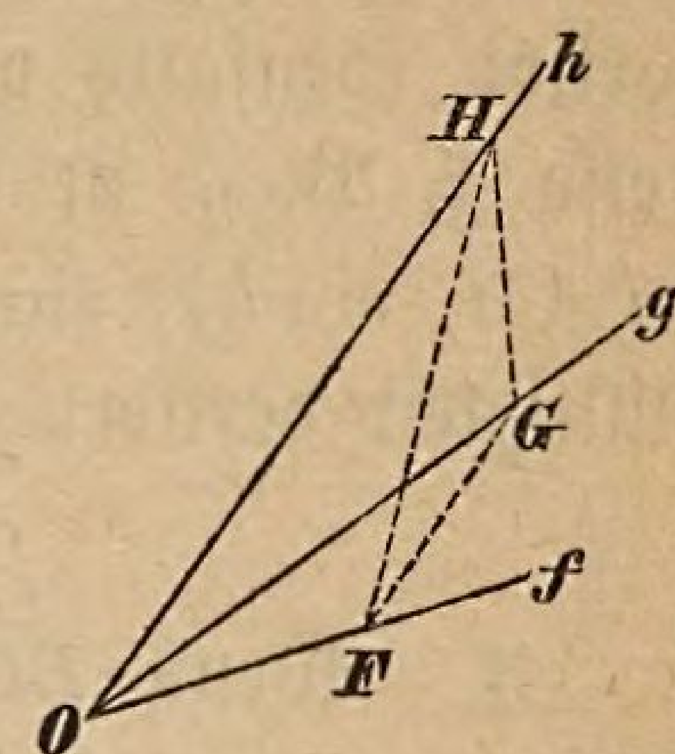
---

*) S. Planim. §. 12, 8.

Wenn die Seiten $AB$, $BC$ eines sphärischen Dreiecks normal zu einander stehn, so ist*)

$$\cos AB \cos BC = \cos CA$$

Beweis. Durch den Punct $O$ gehn die Geraden $f$, $g$, $h$, so daß die Ebenen $fg$ und $gh$ normal zu einander stehn. Ist $G$ die Normalprojection des Punctes $H$ der Geraden $h$ auf die Gerade $g$, und $F$ die Normalprojection von $G$ auf die Gerade $f$, so ist $GH$ eine Normale der Ebene $OFG$ und $OF$ eine Normale der Ebene $FGH$ (Stereom. §. 2, 3), folglich $F$ die Normalprojection von $H$ auf die Gerade $f$. Nach §. 4, 2 hat man



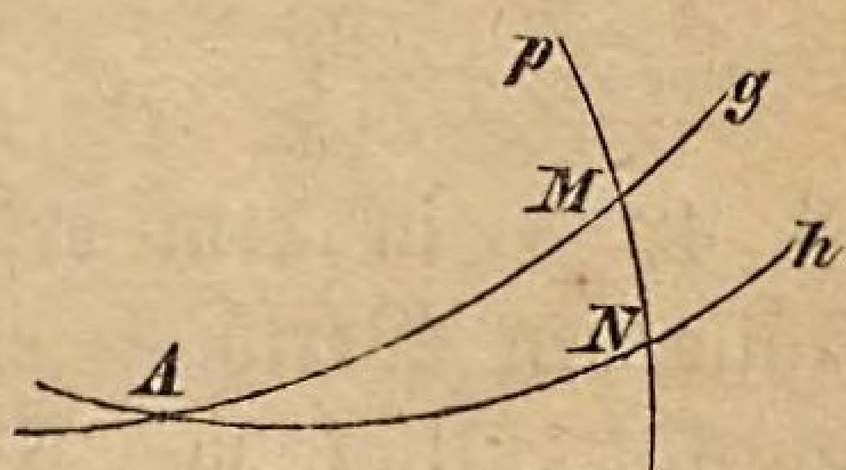

$OF = OG \cos fg$, $OG = OH \cos gh$, $OF = OH \cos hf$

folglich $\cos fg \cos gh = \cos hf$. Wenn nun die Kugel, deren Centrum $O$ und deren Radius eine Längeneinheit ist, die positiven Richtungen der Geraden $f$, $g$, $h$ in $A$, $B$, $C$ schneidet, so ist der Bogen $AB$ dem Winkel $fg$ gleich, u. s. w.

2. Wenn $AM$, $AN$, $NM$ Bogen der Hauptkreise $g$, $h$, $p$ sind, und $A$ ein Pol von $p$ ist, so hat man

$$\sin MN : \sin NA : \sin AM = \sin hg : \sin gp : \sin ph$$

Beweis. Bestimmt man zunächst die positiven Sinne der Hauptkreise $g$, $h$, $p$ so, daß $AM = 90^0$, $AN = 90^0$, und $A$ der linke Pol von $p$ ist, und beschreibt man die positiven Winkel durch linksum gehende Drehungen, so ist der Bogen $MN$ dem Winkel $gh$ gleich (Stereom. §. 4, 7), $gp = 90^0$, $hp = 90^0$, folglich




$$\begin{aligned} \sin MN : \sin NA : \sin AM &= \sin gh : -1 : 1 \\ &= \sin hg : 1 \quad : -1 \\ &= \sin hg : \sin gp : \sin ph \end{aligned}$$

---

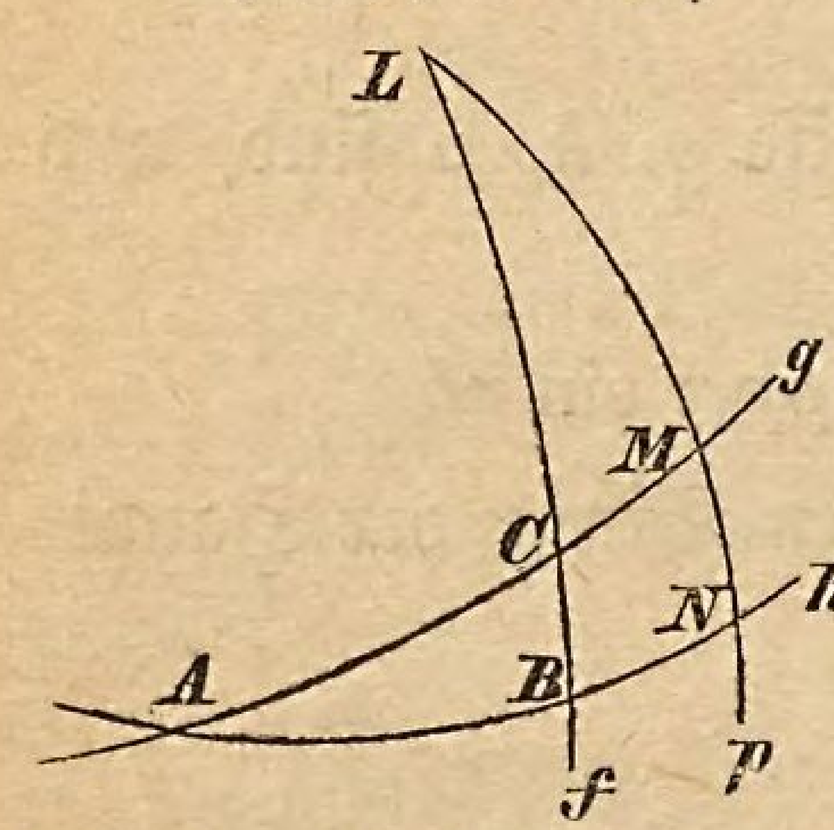
*) Die ersten Sätze der sphärischen Trigonometrie sind im 3ten Buch der Sphärik von Menelaus und im ersten Buch des Almagest von Ptolemäus enthalten. Dieselben wurden für den Gebrauch in der Astronomie von den Arabern, unter den Neuern im 15ten Jahrhundert von Regiomontan u. A. weiter ausgebildet. Die Ableitung der gesammten sphärischen Trigonometrie aus einfachen Principien hat Euler unternommen, Mém. de Berlin 1753 p. 234 und Acta Petrop. 1779, I p. 72. Auf ein einziges Princip wurde die sphärische Trigonometrie durch Lagrange (J. de l'Ecole polyt. Cah. 6 p. 270) zurückgeführt, dessen Abhandlung durch Gauß eine wesentliche Ergänzung erhalten hat in den Zusätzen zu Schumachers Uebersetzung von Carnot's géom. de pos. II p. 373. Die frühere Beschränkung der sphärischen Trigonometrie auf Dreiecke, deren Seiten und Winkel 180° nicht übersteigen, ist von Möbius aufgehoben worden (Analyt. Sphärik 15 ff. Berichte der Leipziger Gesellschaft 1860 p. 51), dessen Darstellung hier im Wesentlichen wiedergegeben wird.

Werden die positiven Winkel durch rechtsum gehende Drehungen beschrieben, so erhalten $\sin hg$, $\sin gp$, $\sin ph$ die entgegengesetzt gleichen Werthe (§. 4, 3), aber die Verhältnisse $\sin hg : \sin gp : \sin ph$ bleiben unverändert. Wird der positive Sinn von $p$ so bestimmt, daß $A$ der rechte Pol von $p$ ist, so wechselt der Bogen $MN$ das Zeichen, und die Winkel $hp$, $pg$ ändern sich um je $180^0$; dadurch wird die obige Proportion ebenfalls nicht verändert. Wird einer der beiden andern Hauptkreise z. B. $g$ in dem entgegengesetzten Sinne genommen, so wechseln $\sin AM$, $\sin hg$, $\sin gp$ das Zeichen, ohne daß die obige Proportion ihre Gültigkeit verliert.

3. Wenn $BC$, $CA$, $AB$ Bogen der Hauptkreise $f$, $g$, $h$ sind, und $h$ zu $f$ normal steht, so ist

$$\sin gh = \frac{\sin BC}{\sin CA} \sin hf, \quad \sin fg = \frac{\sin AB}{\sin CA} \sin hf$$

Beweis. Ist $A$ ein Pol des Hauptkreises $p$, von dem $f$, $g$, $h$ in $L$, $M$, $N$ geschnitten werden, so ist $L$ ein Pol des Hauptkreises $h$, weil $p$ und $f$ normal zu $h$ stehn. Zugleich ist $p$ normal zu $g$, folglich in dem Dreieck $CML$ (1)




$$\cos CM \cos ML = \cos LC$$

Weil $CM = CA + AM$ und $AM$ entweder einen oder drei Quadranten beträgt, so hat $\cos CM$ (§. 4, 3) in dem ersten Falle den Werth $-\sin CA$, in dem zweiten Falle den Werth $+\sin CA$, also in jedem Falle den Werth $-\sin CA \sin AM$. U. s. w. Also ist

$$\sin CA \sin AM \sin MN \sin NL = -\sin BC \sin LB$$

Nun ist aber in den Dreiecken $MNA$, $BNL$ (2)

$$\sin AM : \sin MN = \sin ph : \sin hg$$
$$\sin NL : \sin LB = \sin fh : \sin hp$$

Daher findet man durch Multiplication

$$\sin CA \sin^2 AM \sin^2 NL = \sin BC \sin^2 LB \frac{\sin fh}{\sin hg}$$

weil $\sin ph = -\sin hp$. Nun ist $\sin^2 AM = 1$, u. s. w., also

$$\sin CA = \sin BC \frac{\sin hf}{\sin gh}$$

gleichbedeutend mit der ersten der behaupteten Gleichungen. Die andere Gleichung ist auf dieselbe Weise gebildet.

Zusatz. In den Dreiecken $MNC$ und $BNC$ ist (1)

$$\cos MN \cos MC = \cos CN = \cos NB \cos BC$$

Unter der Voraussetzung, daß die Bogen $AM$ und $AN$ je $90^0$ betragen, ist der Bogen $MN$ dem Winkel $gh$ entweder gleich oder entgegengesetzt gleich, also $\cos MN = \cos gh$; ferner

$$\cos MC = \cos(CA + AM) = -\sin CA$$
$$\cos NB = \cos(AN - AB) = \sin AB$$

daher ist

$$-\cos gh \sin CA = \sin AB \cos BC$$

4. Bei der angenommenen Bezeichnung hat man

$$-\cos gh = \frac{\operatorname{tang} AB}{\operatorname{tang} CA}$$

$$-\operatorname{tang} gh = \frac{\operatorname{tang} BC}{\sin AB} \sin hf$$

$$\cos BC = -\frac{\cos gh}{\sin fg} \sin hf, \quad \cos AB = -\frac{\cos fg}{\sin gh} \sin hf$$

$$\cos CA = \cot fg \cot gh$$

Beweis. Nach (3, Zus.) ist

$$-\cos gh = \frac{\sin AB}{\sin CA} \cos BC = \frac{\sin AB \cos CA}{\sin CA \cos AB} \text{ (1) u. s. w.}$$

Aus den Gleichungen (3)

$$\sin gh \sin CA = \sin BC \sin hf$$
$$-\cos gh \sin CA = \sin AB \cos BC$$

folgt durch Division der Werth von $-\operatorname{tang} gh$.

Aus den Gleichungen (3)

$$\cos BC \sin AB = -\cos gh \sin CA$$
$$\sin AB \sin hf = \sin fg \sin CA$$

folgt durch Division der Werth von $\cos BC$. Auf dieselbe Art ist der Werth von $\cos AB$ gebildet.

Aus den Gleichungen

$$\cos BC = -\frac{\cos gh}{\sin fg} \sin hf, \quad \cos AB = -\frac{\cos fg}{\sin gh} \sin hf$$

folgt durch Multiplication (1)

$$\cos CA = \cot fg \cot gh \sin^2 hf$$

worin $\sin^2 hf = 1$ ist.

Anmerkung. Wenn $BC$, $CA$, $AB$ positive Bogen der Hauptkreise $f$, $g$, $h$ sind und die Werke $a$, $b$, $c$ haben, so werden die durch

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bezeichneten Winkel $BAC$, $CBA$, $ACB$ des sphärischen Dreiecks $ABC$ von den Winkeln $gh$, $hf$, $fg$ zu $180^0$ ergänzt. Für das rechtwinkelige sphärische Dreieck, dessen Winkel $\beta = 90^0$ ist, gilt demnach das System von Gleichungen:*)

$$\cos b = \cos a \cos c$$

$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin b}, \quad \sin\gamma = \frac{\sin c}{\sin b}$$

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} b}, \quad \cos\gamma = \frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} b}$$

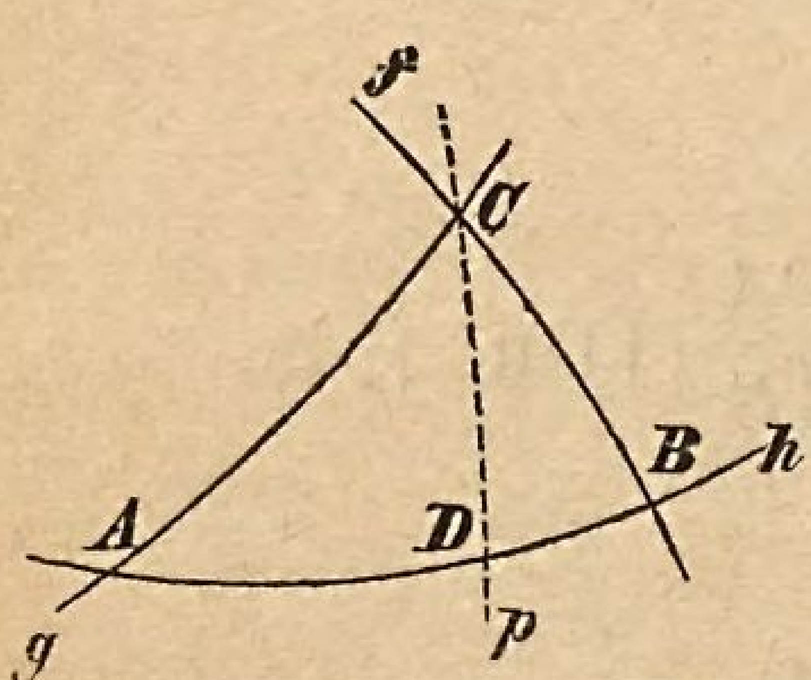
$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\operatorname{tang} a}{\sin c}, \quad \operatorname{tang}\gamma = \frac{\operatorname{tang} c}{\sin a}$$

$$\cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}, \quad \cos c = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$$

$$\cos b = \cot\alpha \cot\gamma$$

5. In jedem sphärischen Dreieck $ABC$, dessen Seiten $BC$, $CA$, $AB$ Bogen der Hauptkreise $f$, $g$, $h$ sind, hat man**)

$$\sin BC : \sin CA : \sin AB = \sin gh : \sin hf : \sin fg$$




Beweis. Zieht man durch $C$ normal zu $h$ den Hauptkreis $p$, welcher von $h$ in $D$ geschnitten wird, so ist in den Dreiecken $ADC$ und $CDB$ (3)

$$\sin gh = \frac{\sin DC}{\sin CA} \sin hp, \quad \sin hf = \frac{\sin CD}{\sin BC} \sin ph$$

folglich durch Division

$$\frac{\sin gh}{\sin hf} = \frac{\sin BC}{\sin CA}$$

weil $\sin CD = - \sin DC$ und $\sin ph = - \sin hp$. U. s. w.

6. In dem sphärischen Dreieck $ABC$ ist***)

$$\cos BC = \cos CA \cos AB - \sin CA \sin AB \cos gh$$

Beweis. In dem Dreieck $BCD$ hat man (1)

$$\cos BC = \cos CD \cos DB$$

*) Euler Mém. de Berlin 1753 p. 233.

**) Dieser Fundamentalsatz der sphärischen Trigonometrie steht anders ausgedrückt in Menelaus Sphaerica III, 2. Seinen ganzen Umfang hat er durch Möbius erhalten. Vergl. (1).

***) Aus dieser von Euler Mém. de Berlin 1753 p. 242 zusammengestellten Gleichung, von der ein einfacher Beweis unten §. 6, 1 gegeben wird, können die übrigen Gleichungen der sphärischen Trigonometrie durch Elimination abgeleitet werden, wie Lagrange 1799 J. de l'Ecole polyt. Cah. 6 p. 280, einfacher Gauß 1810 Zusätze zu Carnot géom. de pos. in Schumachers Uebersetzung II p. 373 gezeigt hat.

Weil $DB = DA + AB$, so ist (§. 4, 7)

$$\cos BC = \cos CD \cos DA \cos AB - \cos CD \sin DA \sin AB$$

Nun ist

$$\cos CD \cos DA = \cos CA \quad (1)$$

$$\sin AD \cos DC = - \cos gh \sin CA \quad (3, \text{Zus.})$$

$\cos CD = \cos DC$, $\sin DA = - \sin AD$, folglich u. s. w.

7. In dem sphärischen Dreieck $ABC$ ist*)

$$- \operatorname{tang} hf = \frac{\operatorname{tang} CA \sin gh}{\sin AB + \operatorname{tang} CA \cos AB \cos gh}$$

Beweis. In dem Dreieck $BCD$ hat man (4)

$$- \operatorname{tang} fh = \frac{\operatorname{tang} DC}{\sin BD} \sin hp = \frac{\sin DC \sin hp}{\cos DC \sin (BA + AD)}$$

Nun ist

$$\sin DC \sin hp = \sin CA \sin gh \quad (5)$$

$$\cos DC \sin BA \cos AD = - \sin AB \cos CA \quad (1)$$

$$\cos DC \cos BA \sin AD = - \sin CA \cos AB \cos gh \quad (6)$$

$\operatorname{tang} fh = - \operatorname{tang} hf$, folglich

$$- \operatorname{tang} hf = \frac{\sin CA \sin gh}{\sin AB \cos CA + \sin CA \cos AB \cos gh}$$

Dividirt man den Zähler und den Nenner durch $\cos CA$, so erhält man die zu beweisende Gleichung.

8. Bei gewöhnlicher Bezeichnung der Elemente des sphärischen Dreiecks $ABC$ (4, Anm.) hat man demnach

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{\operatorname{tang} b \sin \alpha}{\sin c - \operatorname{tang} b \cos c \cos \alpha}$$

Bezeichnet man in dem zu $ABC$ gehörigen Polardreieck $A'B'C'$ auf gleiche Weise die Seiten durch $a'$, $b'$, $c'$, und die gegenüberliegenden Winkel durch $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, so ist (Stereom. §. 4, 8)

$$\alpha' + a = 180^0, \quad \beta' + b = 180^0, \quad \gamma' + c = 180^0$$

$$a' + \alpha = 180^0, \quad b' + \beta = 180^0, \quad c' + \gamma = 180^0$$

Aus den Werthen von $\cos a'$ und $\operatorname{tang} \beta'$ findet man sofort

$$\cos \alpha = - \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

$$\operatorname{tang} b = \frac{\operatorname{tang} \beta \sin a}{\sin \gamma + \operatorname{tang} \beta \cos \gamma \cos a}$$

*) Euler a. a. O. p. 251.

9. Zur Berechnung eines Winkels aus den 3 Seiten dient die Gleichung (8)

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

welche sich wie folgt gestalten läßt. Nach §. 4, 7 ff. ist

$$1 - \cos\alpha = \frac{\cos(b - c) - \cos a}{\sin b \sin c}$$

$$1 + \cos\alpha = \frac{\cos a - \cos(b + c)}{\sin b \sin c}$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin(s - b)\sin(s - c)}{\sin b \sin c}$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin s \sin(s - a)}{\sin b \sin c}$$

$$\tang^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin(s - b)\sin(s - c)}{\sin s \sin(s - a)}\text{*)}$$

wenn man $a + b + c = 2s$ setzt. Vergl. §. 4, 10.

Setzt man ferner $\alpha + \beta + \gamma = 2\sigma$ und in Bezug auf das Polardreieck $a' + b' + c' = 2s'$, so ist $2s' + 2\sigma = 3.180^0$,

$$s' + \sigma = 270^0, \quad s' - a' + \sigma - \alpha = 90^0$$

Demnach findet man aus den Werthen von $\sin^2 \frac{1}{2}\alpha'$, $\cos^2 \frac{1}{2}\alpha'$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{\cos(\sigma - \beta)\cos(\sigma - \gamma)}{\sin\beta \sin\gamma}$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{-\cos\sigma \cos(\sigma - \alpha)}{\sin\beta \sin\gamma}$$

$$\cot^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{\cos(\sigma - \beta)\cos(\sigma - \gamma)}{-\cos\sigma \cos(\sigma - \alpha)}$$

Bei einem gemeinen sphärischen Dreieck liegt $\sigma$ zwischen $90^0$ und $270^0$ (Stereom. §. 4, 10), also ist $-\cos\sigma$ positiv.

Die Formeln für $\tang^2 \frac{1}{2}\alpha$ und $\cot^2 \frac{1}{2}a$ eignen sich besonders zur numerischen Berechnung eines Winkels aus den 3 Seiten und einer Seite aus den 3 Winkeln.

10. Wenn in dem sphärischen Dreieck $ABC$ die Seiten und die Winkel je $180^0$ nicht übersteigen, so ist**)

*) Euler a. a. O.

**) Diese Gleichungen heißen die Gauß'schen Gleichungen, erfunden und in die practische Trigonometrie eingeführt von Gauß theoria motus 54. Gleichzeitig sind dieselben Gleichungen auch von Delambre Connaiss. des temps 1808 p. 445 und von Mollweide (v. Zach monatl. Corresp. 1808 Nov. Bd. 18 p. 394) mitgetheilt worden. Vergl. §. 3, 7. Constructiv hat dieselben Gudermann niedere Sphärik 144 ff. abgeleitet, einfacher in der hier mitgetheilten Art Essen Grunert Archiv 27 p. 38.

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\sin\tfrac{1}{2}c = \sin\tfrac{1}{2}(a - b)\cos\tfrac{1}{2}\gamma$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\sin\tfrac{1}{2}c = \sin\tfrac{1}{2}(a + b)\sin\tfrac{1}{2}\gamma$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\tfrac{1}{2}c = \cos\tfrac{1}{2}(a - b)\cos\tfrac{1}{2}\gamma$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\tfrac{1}{2}c = \cos\tfrac{1}{2}(a + b)\sin\tfrac{1}{2}\gamma$$

Beweis. Indem man $\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ nach §. 4, 7 aus den in (9) entwickelten Werthen von $\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\sin\frac{1}{2}\beta$, $\cos\frac{1}{2}\alpha$ und $\cos\frac{1}{2}\beta$ zusammensetzt, findet man durch bekannte Reductionen für ein beliebiges sphärisches Dreieck

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a - b)}{\sin\frac{1}{2}c}\sqrt{\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma}$$

In dem gemeinen sphärischen Dreieck ist $\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ positiv, wenn $\alpha > \beta$, also gilt die positive Wurzel. U. s. w.

Vollständige Bestimmtheit erreicht man durch die folgende Ableitung.*) Nach (8) hat man

$$\sin\alpha\sin c = \sin a\sin\gamma$$
$$\sin\beta\sin c = \sin b\sin\gamma$$

demnach verbunden

$$\text{I.}\quad (\sin\alpha - \sin\beta)\sin c = (\sin a - \sin b)\sin\gamma$$
$$\text{II.}\quad (\sin\alpha + \sin\beta)\sin c = (\sin a + \sin b)\sin\gamma$$

Ferner geben die in (8) enthaltenen Gleichungen

$$\sin b\sin c\cos\alpha = \cos a - \cos b\cos c$$
$$\sin a\sin b\cos\gamma = \cos c - \cos a\cos b$$

verbunden

$$\sin b\sin c\cos\alpha + \sin a\sin b\cos b\cos\gamma = \cos a - \cos a\cos^2 b$$

oder einfacher

$$\sin c\cos\alpha + \sin a\cos b\cos\gamma = \cos a\sin b$$

Vertauscht man gegenseitig $a$ mit $b$, $\alpha$ mit $\beta$, so erhält man auch

$$\sin c\cos\beta + \sin b\cos a\cos\gamma = \cos b\sin a$$

und durch Addition

$$\text{III.}\quad (\cos\alpha + \cos\beta)\sin c = \sin(a + b).(1 - \cos\gamma)$$

Die zugeordnete Gleichung

$$\text{IV.}\quad \sin(\alpha + \beta).(1 + \cos c) = (\cos a + \cos b)\sin\gamma$$

---

*) Aus den Gleichungen I—III hatte Legendre Trigon. 83 nur die den Gauß'schen Gleichungen untergeordneten Neper'schen Analogien abgeleitet. Die Ausnutzung der Gleichungen I—IV ist von Gauß in seinen Vorlesungen gezeigt worden, wie Wittstein Stereom. 213 angiebt.

kann ohne Weiteres aus der Betrachtung des Polardreiecks abgeleitet werden.

Wenn man in den Gleichungen I—IV nach §. 4, 8 die halben Winkel und Seiten eingeführt, und wenn man dabei die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\sin\tfrac{1}{2}c &= l, & \sin\tfrac{1}{2}(a - b)\cos\tfrac{1}{2}\gamma &= \lambda \\ \cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\sin\tfrac{1}{2}c &= m, & \cos\tfrac{1}{2}(a - b)\cos\tfrac{1}{2}\gamma &= \mu \\ \sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\tfrac{1}{2}c &= r, & \sin\tfrac{1}{2}(a + b)\sin\tfrac{1}{2}\gamma &= \varrho \\ \cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\tfrac{1}{2}c &= s, & \cos\tfrac{1}{2}(a + b)\sin\tfrac{1}{2}\gamma &= \sigma \end{aligned}$$

gebraucht, so findet man

$$\begin{aligned} ls &= \lambda\sigma \\ mr &= \mu\varrho \\ ms &= \varrho\sigma \\ rs &= \mu\sigma \end{aligned}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt mit Rücksicht auf die zweite

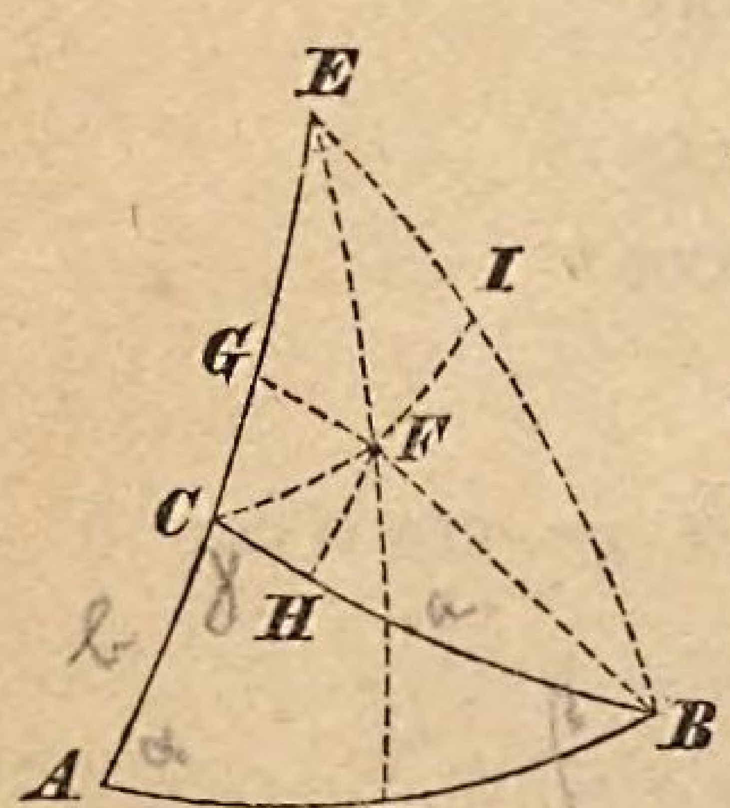
$$s^2 = \sigma^2$$

Also hat man

1) $s = \sigma$, und dazu $l = \lambda$, $m = \varrho$, $r = \mu$

2) $s = -\sigma$ und dazu $l = -\lambda$, $m = -\varrho$, $r = -\mu$

was zu beweisen war.




Die halbe Differenz von zwei Seiten $a$ und $b$ und von den gegenüberliegenden Winkeln $\alpha$ und $\beta$ des Dreiecks $ABC$ wird durch folgende Construction erhalten. Der Hauptkreis, welcher $AB$ in $D$ normal halbirt, schneidet $CA$ in $E$ so, daß $BE = EA$ und $DE$ den Winkel $AEB$ halbirt. Der den Winkel $BCE$ halbirende Hauptkreis schneidet den Bogen $DE$ in $F$ so, daß $F$ das Centrum des dem Dreieck $BCE$ eingeschriebenen Kreises ist. Sind nun $FG$, $FH$, $FJ$ normal zu $EC$, $CB$, $BE$, so hat man

$$\begin{aligned} CG + EJ + BH &= \tfrac{1}{2}(CE + EB + BC) \\ EJ + BH &= EB \\ CG &= \tfrac{1}{2}(BC - CA) \end{aligned}$$

Zugleich ist der Winkel $FCG = 90^0 - \tfrac{1}{2}ACB$

$$FBD = \tfrac{1}{2}(BAC - CBA) + CBA = \tfrac{1}{2}(BAC + CBA)$$
$$GFC + HFB + JFE = 180^0,\ HFB + JFE = BFE$$

folglich $GFC = DFB$, wenn $AB$ zwei Quadranten nicht übersteigt. In den rechtwinkeligen Dreiecken $GFC$ und $DFB$ hat man (4, Anm.)

$$\sin GFC = \frac{\sin CG}{\sin FC}, \quad \cos CG = \frac{\cos GFC}{\sin FCG}$$

$$\sin DFB = \frac{\sin DB}{\sin BF}, \quad \cos DB = \frac{\cos DFB}{\sin FBD}$$

folglich

$$\frac{\sin CG}{\sin DB} = \frac{\sin FC}{\sin BF} = \frac{\sin FBC}{\sin BCF} \; (5), \quad \frac{\cos CG}{\cos DB} = \frac{\sin FBD}{\sin FCG}$$

Hierin sind die erste und dritte der zu beweisenden Gleichungen enthalten.

Ist $B_1$ der Gegenpunct von $B$, so gelten in Bezug auf das Nebendreieck $AB_1C$ die Gleichungen

$$\sin \tfrac{1}{2}(\alpha' - \beta) \sin \tfrac{1}{2} c' = \sin \tfrac{1}{2}(a' - b) \cos \tfrac{1}{2}\gamma'$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(\alpha' + \beta) \cos \tfrac{1}{2} c' = \cos \tfrac{1}{2}(a' - b) \cos \tfrac{1}{2}\gamma'$$

Nun ist $\alpha' + \alpha = 180^0$, $\gamma' + \gamma = 180^0$, $a' + a = 180^0$, $c' + c = 180^0$, folglich

$$\sin \tfrac{1}{2}(\alpha' - \beta) = \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta), \; \sin \tfrac{1}{2}(\alpha' + \beta) = \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(a' - b) = \cos \tfrac{1}{2}(a + b), \; \cos \tfrac{1}{2}(a' - b) = \sin \tfrac{1}{2}(a + b)$$

$$\sin \tfrac{1}{2} c' = \cos \tfrac{1}{2} c, \; \cos \tfrac{1}{2} c' = \sin \tfrac{1}{2} c, \; \cos \tfrac{1}{2}\gamma' = \sin \tfrac{1}{2}\gamma$$

Durch diese Substitutionen ergeben sich die vierte und zweite der zu beweisenden Gleichungen.

Anmerkung. Wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel z. B. $a$, $b$, $\gamma$ gegeben sind, so berechnet man am einfachsten zuerst die Werthe von $\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2} c$ und $\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2} c$, dann durch Division den Werth von $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$; ferner die Werthe von $\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} c$ und $\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} c$, und aus diesen den Werth von $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Aus $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ und $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ findet man $\alpha$ und $\beta$; durch $\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ oder $\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ und durch $\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ oder $\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ ergiebt sich endlich jedesmal auf doppelte Art der Werth von $\frac{1}{2} c$.

Ganz analog rechnet man, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind. Wenn aber zwei Seiten und der Winkel, welcher einer derselben gegenüberliegt, z. B. $a$, $b$, $\alpha$ gegeben sind, so berechnet man zuerst den Winkel $\beta$ (5), dann mit Hülfe der obigen Gleichungen $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\gamma$ und $\operatorname{tang} \frac{1}{2} c$. Das analoge Verfahren führt zum Ziele, wenn zwei Winkel und die Seite gegeben sind, die dem einen derselben gegenüberliegt.

Die aus den Gauß'schen Gleichungen folgenden Werthe von

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta), \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a - b), \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a + b)$$

sind seit längerer Zeit im Gebrauch. Sie wurden von Neper, dem Erfinder der natürlichen Logarithmen, angegeben (Mirifici logarithmorum

canonis descriptio 1614. II, 6) und in Proportionen ausgesprochen, welche die Neper'schen Analogien heißen.

**11.** Bestimmt man die positiven Sinne der Höhen eines sphärischen Dreiecks so, daß jede Höhe mit der Seite, zu der sie normal steht, einen Winkel von $90^0$ bildet, so sind die Producte des Sinus jeder Seite mit dem Sinus der zugehörigen Höhe von derselben Größe, die durch $d$ bezeichnet wird, und die Producte des Sinus jedes Winkels mit dem Sinus der zugehörigen Höhe sind von derselben Größe, die durch $\delta$ bezeichnet wird.*) Denn man hat (5)

$$\sin DC \sin hp = \sin CA \sin gh = \sin BC \sin hf$$

und $\sin hp = 1$, folglich bei gewöhnlicher Bezeichnung

$$\sin c \sin DC = \sin b \sin c \sin \alpha = \sin c \sin a \sin \beta = \sin a \sin b \sin \gamma = d$$
$$\sin \gamma \sin DC = \sin \beta \sin \gamma \sin a = \sin \gamma \sin \alpha \sin b = \sin \alpha \sin \beta \sin c = \delta$$

Hieraus findet man sofort

$$\frac{\sin a \sin b \sin c}{d} = \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} = \frac{d}{\delta} \;^{**)}$$
$$\frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\delta} = \frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c} = \frac{\delta}{d}$$
$$\delta = \frac{d^2}{\sin a \sin b \sin c}, \quad d = \frac{\delta^2}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}$$

Zufolge der Werthe

$$d = \sin b \sin c \sin \alpha$$
$$\cos a - \cos b \cos c = \sin b \sin c \cos \alpha \quad (8)$$

ergiebt sich

$$d^2 = \sin^2 b \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2$$
$$= 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c$$

Nun ist $d^2 = 4 \sin b \sin c \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha \,.\, \sin b \sin c \cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha$ (§. 4, 7), folglich (9)

$$d^2 = 4 \sin s \sin(s - a) \sin(s - b) \sin(s - c)$$

Wenn $d'$ dieselbe Bedeutung für das Polardreieck $A'B'C'$ hat, wie $d$ für das Dreieck $ABC$, so ist (8)

$$d' = \sin b' \sin c' \sin \alpha' = \sin \beta \sin \gamma \sin a = \delta$$

folglich hat man auch

---

*) Vergl. Lexell Acta Petrop. 1782, I p. 71. Gudermann niedere Sphärik 124.

**) Vergl. Lagrange J. de l'Ecole polyt. Cah. 6 p. 272, Français in demselben Journal Cah. 14 p. 190, Gudermann niedere Sphärik 142. Die Werthe von $d^2$ hat Euler Nov. Comm. Petrop. 4 p. 158 gegeben, die Werthe von $\delta^2$ findet man in der Lexell'schen Abhandlung.

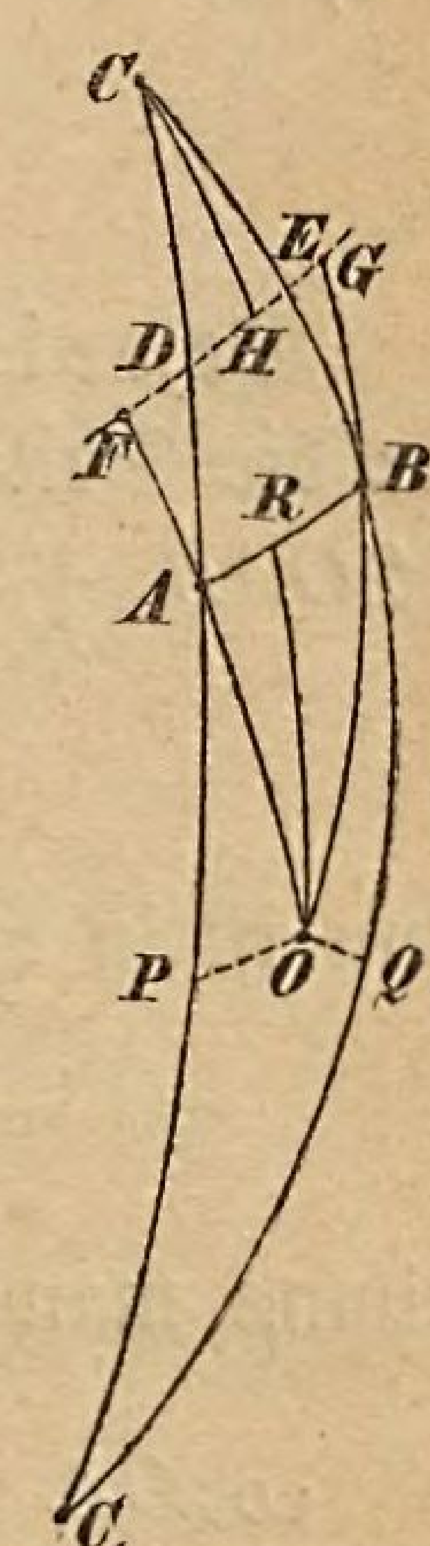
$$\delta^2 = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$= -4\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)$$

12. Wenn man durch $r$ und $\varrho$ die einen Quadranten nicht übersteigenden sphärischen Radien der Kreise bezeichnet, welche einem sphärischen Dreieck, dessen Seiten $a$, $b$, $c$ und dessen Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ je $180^0$ nicht übersteigen, der eine umgeschrieben, der andere eingeschrieben sind, so hat man*)

$$\cot r = \frac{d}{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}, \quad \tan g\,\varrho = \frac{\delta}{4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}$$

bei der in (11) angenommenen Bezeichnung.

Beweis. Bezeichnet man den Gegenpunct von $C$ durch $C_1$, das sphärische Centrum des Kreises $ABC_1$ durch $O$, die Mitten von $AC_1$, $C_1B$, $BA$, $CA$, $BC$ durch $P$, $Q$, $R$, $D$, $E$, so sind $DP$ und $QE$ Quadranten, $PO$, $QO$, $RO$, normal zu $AC_1$, $C_1B$, $BA$, folglich $D$ und $E$ Pole von $PO$ und $OQ$, also $DE$ Polare von $O$. Ist $HC$ eine Höhe des Dreiecks $CDE$, wird $DE$ von $OA$ und $OB$ in $F$ und $G$ geschnitten, so sind die rechtwinkeligen Dreiecke $DHC$ und $DFA$, $EHC$ und $EGB$ gleich und ähnlich, $D$ und $E$ die Mitten von $FH$ und $HG$, folglich




$$HC = AF = 90^0 - OA$$
$$DE = \tfrac{1}{2}FG = \tfrac{1}{2}FOG = AOR$$

Nun ist in den Dreiecken $CDE$ und $ORA$

$$\sin DE \sin HC = \sin EC \sin CD \sin DCE \quad (11)$$
$$\sin AOR \sin OA = \sin RA \quad (4, \text{Anm.}).$$

Bezeichnet man die Seiten $C_1B$, $BA$, $AC_1$ durch $a$, $c$, $b$ und den Winkel $DCE = BC_1A$ durch $\gamma$, so erhält man demnach

$$\sin AOR \cos r = \cos\tfrac{1}{2}a \cos\tfrac{1}{2}b \sin\gamma$$
$$\sin AOR \sin r = \sin\tfrac{1}{2}c$$

folglich

$$\cot r = \frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin\gamma}{\sin\frac{1}{2}c} = \frac{d}{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}$$

indem man $4\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}b\sin\gamma$ durch $d$ ersetzt.

Eben so hat man in dem zugehörigen Polardreieck

$$\cot r' = \frac{d'}{4\sin\frac{1}{2}a'\sin\frac{1}{2}b'\sin\frac{1}{2}c'}$$

---

*) Lexell a. a. O. p. 72 ff. Vergl. Gudermann 131 und 137.

Nun ist $r'$ das Complement von $\varrho$ (Stereom. §. 4, 12), $d' = \delta$, $\sin\frac{1}{2}a' = \cos\frac{1}{2}\alpha$, u. s. w. (11), folglich

$$\tang\varrho = \frac{\delta}{4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}$$

Für die Radien der Kreise, welche den Nebendreiecken umgeschrieben und eingeschrieben sind, findet man ähnliche Gleichungen, indem man den Zusammenhang der Seiten und Winkel der Nebendreiecke mit den Seiten und Winkeln des Dreiecks beachtet. Daraus folgen dann die Beziehungen unter den Radien dieser Kreise.

**13.** Die Functionen von $2\sigma = \alpha + \beta + \gamma$ haben besondere Bearbeitung erfahren, weil durch diese Summe die Fläche des sphärischen Dreiecks bestimmt ist, dessen Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sind (Stereom. §. 4, 5). Bei der angenommenen Bezeichnung ergiebt sich zunächst*)

$$-\cos\sigma = \frac{d}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} = \tfrac{1}{2}\delta\tang r$$

Beweis. Bezeichnet man in dem Dreieck $ABC$ der vorigen Figur die Seiten und Winkel durch $a$, $b$, $c$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, so ist

$$2OAB + 2OBC_1 + 2OC_1A = 180^0 - \alpha + 180^0 - \beta + \gamma$$
$$2OBC_1 + 2OC_1A = 2\gamma$$
$$OAB = 180^0 - \sigma$$

Nun ist in dem Dreieck $OAR$ (4, Anm.)

$$\cos OAR = \frac{\tang AR}{\tang OA}$$

Nimmt man hinzu (12)

$$\cot OA = \frac{\sin BC_1\sin C_1A\sin BC_1A}{4\sin\frac{1}{2}BC_1\sin\frac{1}{2}C_1A\sin AR} = \frac{d}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}$$

so erhält man

$$-\cos\sigma = \frac{d}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

Nach (11) ist

$$-\cos\sigma\cot r = \frac{d^2}{2\sin a\sin b\sin c} = \tfrac{1}{2}\delta$$

**14.** Bemerkenswerthe Ausdrücke ergeben sich für $\sin\sigma$, $-\cot\sigma$ und $-\tang\sigma$, nämlich**)

---

*) Lexell a. a. O. p. 68.

**) Die erste Gleichung hängt mit der letzten zusammen, die von Lagrange a. a. O. p. 278 und Legendre Géom. Note 10 gegeben worden ist. Die andern rühren von Euler her (Acta Petrop. 1778, II p. 31. Nova Acta 10 p 47).

$$\sin\sigma = \frac{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b + \sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos\gamma}{\cos\tfrac{1}{2}c}$$
$$= \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}$$
$$= \frac{\cos^2\tfrac{1}{2}a+\cos^2\tfrac{1}{2}b+\cos^2\tfrac{1}{2}c-1}{2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}$$
$$-\cot\sigma = \frac{d}{1+\cos a+\cos b+\cos c}$$
$$-\tan\sigma = \frac{\cot\tfrac{1}{2}a\cot\tfrac{1}{2}b+\cos\gamma}{\sin\gamma}$$

Beweis. In den Dreiecken $OAR$ und $CDE$ ist

$$\cos AR\sin OAR = \cos ROA \quad (4, \text{Anm.})$$
$$\cos ROA = \cos DE = \cos EC\cos CD + \sin EC\sin CD\cos DCE \quad (6)$$

daher durch Einführung der bekannten Werthe (13)

$$\sin\sigma = \frac{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b + \sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos\gamma}{\cos\tfrac{1}{2}c}$$

Der Zähler dieses Bruchs mit $4\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b$ multiplicirt lautet

$$4\cos^2\tfrac{1}{2}a\cos^2\tfrac{1}{2}b + \sin a\sin b\cos\gamma$$
$$= (1+\cos a)(1+\cos b) + \cos c - \cos a\cos b$$
$$= 1+\cos a+\cos b+\cos c$$
$$= 1+\cos a+1+\cos b+1+\cos c-2$$
$$= 2\cos^2\tfrac{1}{2}a+2\cos^2\tfrac{1}{2}b+2\cos^2\tfrac{1}{2}c-2$$

Durch diese Ausdrücke erhält man sofort den zweiten und den dritten Werth von $\sin\sigma$.

Der zweite Ausdruck von $\sin\sigma$ kann auch aus dem Werth von $-\cos\sigma$ (13) abgeleitet werden. Denn es ist

$$\sin^2\sigma = 1-\cos^2\sigma = \frac{(4\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c)^2 - d^2}{(4\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c)^2}$$
$$(4\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c)^2 = 2(1+\cos a)(1+\cos b)(1+\cos c)$$
$$d^2 = 1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c$$

folglich hat der Zähler den Werth $(1+\cos a+\cos b+\cos c)^2$ u. s. w.

Der dritte Ausdruck von $\sin\sigma$ kann auch direct entwickelt werden, indem man zur Berechnung von $\cos ROA$ das von den Sehnen $f$, $g$, $h$ der Bogen $BC_1$, $C_1A$, $AB$ gebildete plane Dreieck benutzt.*) Bezeichnet man die Normalprojection des Centrums $O$ auf die Ebene $ABC_1$ durch $O'$, so ist der Winkel $BO'A$ ein Normalschnitt des Flächenwinkels,

*) Gudermann 152. Vergl. Schulz Sphärik II, 79.

welchen die Ebenen der Hauptkreise $OB$ und $OA$ bilden. Nun ist der Centriwinkel $BO'A$ doppelt so groß als der von den Sehnen $f$ und $g$ gebildete Peripheriewinkel, folglich ist der letztere dem Winkel $ROA$ gleich. Also hat man (§. 4, 10)

$$\cos ROA = \frac{f^2 + g^2 - h^2}{2fg}$$

$$f = 2\sin\tfrac{1}{2}BC_1 = 2\cos\tfrac{1}{2}a,\ g = 2\sin\tfrac{1}{2}C_1A = 2\cos\tfrac{1}{2}b,\ h = 2\sin\tfrac{1}{2}c$$

$$\cos AR \sin OAR = \cos ROA = \frac{\cos^2\frac{1}{2}a + \cos^2\frac{1}{2}b - \sin^2\frac{1}{2}c}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}$$

Um ferner den Werth von $-\cot\sigma$ zu finden, dividirt man $-\cos\sigma$ (13) durch den zweiten Ausdruck von $\sin\sigma$.

Endlich den Werth von $-\operatorname{tang}\sigma$ erhält man, indem man den ersten Ausdruck von $\sin\sigma$ durch

$$-\cos\sigma = \frac{\sin a \sin b \sin\gamma}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\gamma}{\cos\frac{1}{2}c}$$

dividirt.

Anmerkung. Aus dem Werth von $-\operatorname{tang}\sigma$ schließt man: Wenn in einem sphärischen Dreieck ein Winkel und das Product der Cotangenten (oder der Tangenten) der halben Seiten, welche den Winkel einschließen, unverändert bleiben, so bleibt die Summe der beiden andern Winkel, also auch die Fläche des Dreiecks unverändert. Und wenn in einem sphärischen Dreieck eine Seite und das Product der Tangenten der halben Winkel, die an der Seite liegen, unverändert bleiben, so bleibt der Perimeter des Dreiecks unverändert.

15. Aus den gefundenen Functionen von $\sigma$ ergiebt sich noch, wenn $a + b + c = 2s$ gesetzt wird*),

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}(\sigma - 90^0) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s-a)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s-b)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s-c)$$

Beweis. Zufolge des dritten Ausdrucks von $\sin\sigma$ (14) ist

$$1 - \sin\sigma = \frac{1 - \cos^2\frac{1}{2}a - \cos^2\frac{1}{2}b - \cos^2\frac{1}{2}c + 2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

Der Zähler dieses Bruches hat nach (11) den Werth

$$4\sin\tfrac{1}{2}s\sin\tfrac{1}{2}(s-a)\sin\tfrac{1}{2}(s-b)\sin\tfrac{1}{2}(s-c)$$

Ferner ist (13)

$$-\cos\sigma = \frac{\frac{1}{2}d}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

*) L'Huilier nach Legendre's Mittheilung (Géom. Note 10). Diese Formel ist ein besondrer Fall der Formel, welche Lexell a. a. O. p. 88 für die Summe der Winkel eines dem Kreise eingeschriebenen sphärischen Vierecks entwickelt hatte.

folglich

$$\frac{1 - \sin\sigma}{-\cos\sigma} = \frac{4 \sin\frac{1}{2}s \sin\frac{1}{2}(s-a) \sin\frac{1}{2}(s-b) \sin\frac{1}{2}(s-c)}{\sqrt{\{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)\}}}$$

Nun ist

$$1 - \sin\sigma = 1 - \cos(\sigma - 90^0) = 2\sin^2\tfrac{1}{2}(\sigma - 90^0)$$

$$-\cos\sigma = \sin(\sigma - 90^0) = 2\sin\tfrac{1}{2}(\sigma - 90^0)\cos\tfrac{1}{2}(\sigma - 90^0)$$

$$\frac{\sin^2\frac{1}{2}s}{\sin s} = \frac{\sin^2\frac{1}{2}s}{2\sin\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}s} = \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s \text{ u. s. w.}$$

Durch diese Substitution findet man den obigen Werth von

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}(\sigma - 90^0)$$

Anmerkung. Den entwickelten Formeln stehn diejenigen zur Seite, durch welche man den Perimeter eines sphärischen Dreiecks aus den 3 Winkeln oder aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln berechnet. Aehnliche Formeln giebt es aber auch für $\sigma - \alpha$, $\sigma - \beta$, $\sigma - \gamma$ einerseits, und für $s - a$, $s - b$, $s - c$ andrerseits. S. Lexell a. a. O., Schulz II, 34 ff., Gudermann 132 ff.

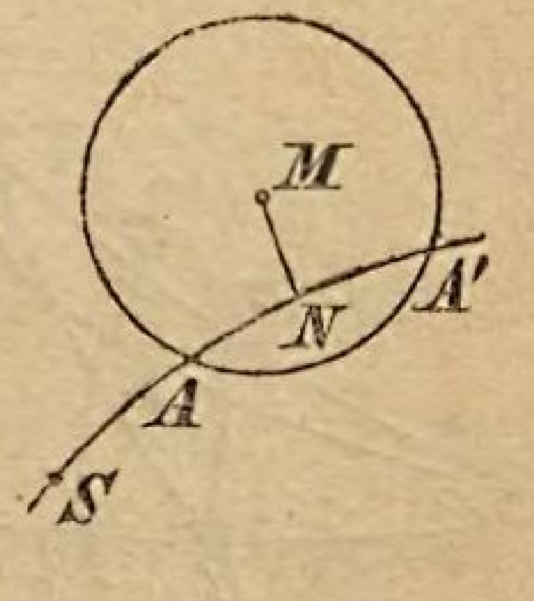
**16.** Wenn durch einen gegebenen Punct $S$ der Kugel Hauptkreise gezogen werden, die einen gegebenen Kreis der Kugel in $A$ und $A'$, $B$ und $B'$, . . schneiden, so sind die Producte

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}SA \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}SA', \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}SB \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}SB', \ldots$$

von derselben Größe, welche die sphärische Potenz des Punctes $S$ in Bezug auf den Kreis heißt. Wenn auf einem Hauptkreis $s$ Puncte liegen, aus denen an einen gegebenen Kreis der Kugel die sphärischen Tangenten $a$ und $a'$, $b$ und $b'$, . . gehn, so sind die Quotienten

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}sa}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}sa'}, \quad \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}sb}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}sb'}, \ldots$$

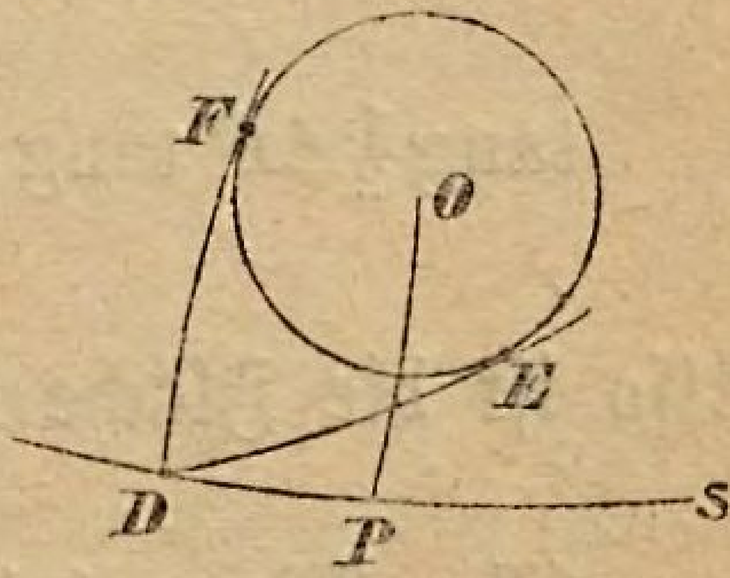
von derselben Größe.*)




Beweis. Zieht man aus dem Centrum $M$ den Hauptkreis $MN$ normal zu $SA$, so ist in den Dreiecken $SMN$ und $AMN$ (1)

$$\cos MN = \frac{\cos SM}{\cos SN} = \frac{\cos AM}{\cos AN}$$

Daher hat man




$$\frac{\cos AN}{\cos SN} = \frac{\cos AM}{\cos SM}$$

$$\frac{\cos AN - \cos SN}{\cos AN + \cos SN} = \frac{\cos AM - \cos SM}{\cos AM + \cos SM}$$

---

*) Lexell a. a. O. p. 65. Steiner Crelle J. 2 p. 59. Schulz II, 54. Den zugeordneten Satz hat Gudermann nied. Sphärik 296 hinzugefügt.

Nun ist $SN + AN = SA'$, $SN - AN = SA$, folglich (§. 4, 8)

$$\tang\tfrac{1}{2}SA \tang\tfrac{1}{2}SA' = \tang\tfrac{1}{2}(SM - AM)\tang\tfrac{1}{2}(SM + AM)$$

unveränderlich für jeden beliebigen durch $S$ gehenden Hauptkreis, der den gegebenen Kreis in $A$ und $A'$ schneidet.

Der Zusatz wird unmittelbar wie folgt bewiesen. Durch den Punct $D$ des Hauptkreises $s$ gehn die sphärischen Tangenten $DE$ und $DF$ des Kreises $(O)$. Zieht man $OP$ normal zu $s$, so ist in den Dreiecken $ODE$ und $ODP$ (4)

$$\sin OD = \frac{\sin EO}{\sin EDO} = \frac{\sin PO}{\sin PDO}$$

Daher hat man

$$\frac{\sin PDO}{\sin EDO} = \frac{\sin PO}{\sin EO}$$

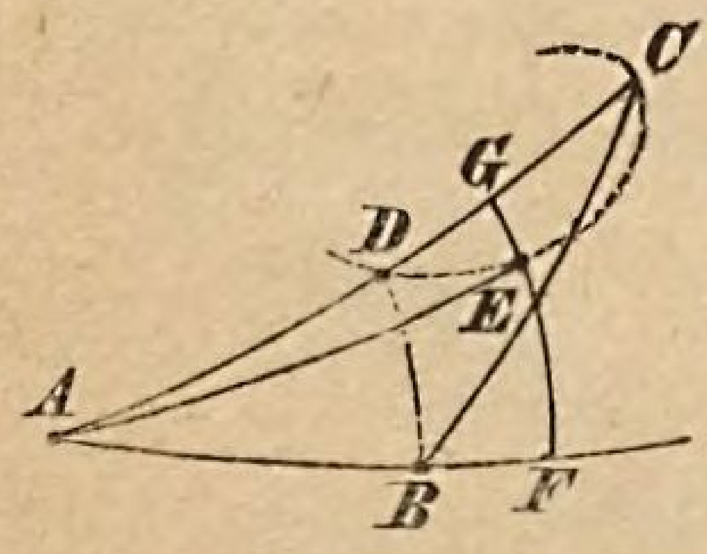
$$\frac{\sin PDO - \sin EDO}{\sin PDO + \sin EDO} = \frac{\sin PO - \sin EO}{\sin PO + \sin EO}$$

Nun ist $PDO - EDO = sa$, $PDO + EDO = sa'$, folglich

$$\frac{\tang\frac{1}{2}sa}{\tang\frac{1}{2}sa'} = \frac{\tang\frac{1}{2}(PO - EO)}{\tang\frac{1}{2}(PO + EO)}$$

unveränderlich für jeden beliebigen Punct des Hauptkreises $s$, aus dem die sphärischen Tangenten $a$ und $a'$ an den gegebenen Kreis gezogen werden.

Anmerkung. Auf dem angezeigten Wege findet man, daß $\cos AU : \cos BU = \cos AV : \cos BV$ ist, wenn $UV$ zu $AB$ normal steht, und umgekehrt; daß die Puncte der Kugel, welche in Bezug auf zwei Kreise derselben gleiche Potenzen haben, auf einem Hauptkreise liegen, u. s. w. Vergl. Planim. §. 14, 2 ff. Stereom. §. 5, 19. Gudermann nied. Sphärik 308 ff.




Um das gleichschenkelige Dreieck zu construiren, das mit dem sphärischen Dreieck $ABC$ den Winkel $A$ und die Fläche gemein hat, mache man $AD = AB$ auf $AC$, ziehe durch $C$ und $D$ einen beliebigen Kreis, an denselben die sphärische Tangente $AE$, und mache $AF = AG = AE$ auf $AB$ und $AC$. Dann hat man

$$\tang\tfrac{1}{2}AF \tang\tfrac{1}{2}AG = \tang^2\tfrac{1}{2}AE = \tang\tfrac{1}{2}AD \tang\tfrac{1}{2}AC$$
$$= \tang\tfrac{1}{2}AB \tang\tfrac{1}{2}AC$$

Also ist die Fläche $AFG = ABC$ (14, Anm.).

17. Wenn bei dem sphärischen Dreieck $ABC$ die Mitte der Seite $CA$ durch $F$ bezeichnet wird, so ist

$$\cos AB + \cos BC = 2\cos\tfrac{1}{2}CA \cos FB$$

Und wenn bei den Hauptkreisen $a$, $b$, $c$ der Winkel $ca$ durch den Hauptkreis $f$ halbirt wird, so ist

$$\cos ab + \cos bc = 2 \cos \tfrac{1}{2} ca \cos fb\text{*)}$$

Beweis. Zieht man den Hauptkreis $BN$ normal zu $CA$, so ist in den rechtwinkeligen Dreiecken $ABN$ und $BCN$

$$\cos AB = \cos BN \cos NA, \quad \cos BC = \cos CN \cos BN$$

$$\cos AB + \cos BC = \cos BN (\cos CN + \cos NA)$$

Nun ist $\cos CN + \cos NA = 2 \cos CF \cos FN$ (§. 4, 8), $\cos FN \cos BN = \cos FN$ (1), folglich

$$\cos AB + \cos BC = 2 \cos CF \cos FB$$

Um den zugeordneten Satz direct abzuleiten, ziehe man durch den gemeinschaftlichen Punct $B$ der Hauptkreise $c$ und $a$ den Hauptkreis $n$, der den Hauptkreis $b$ normal in $N$ schneidet. Unter der Voraussetzung $\sin bn = 1$ ist (4)

$$\cos ab = \cos BN \sin an, \quad \cos bc = \cos BN \sin cn$$

$$\cos ab + \cos bc = \cos BN (\sin an + \sin cn)$$

Nun ist $\sin an + \sin cn = 2 \sin fn \cos cf$, und $\cos BN \sin fn = \cos fb$, folglich u. s. w.

Anwendung. Wenn man in dem sphärischen Viereck $ABCD$ die Mitten der gegenüberliegenden Bogen $BC$ und $DA$, $CA$ und $DB$, $AB$ und $DC$ durch $E$ und $E_1$, $F$ und $F_1$, $G$ und $G_1$ bezeichnet, so ist

$$\cos AB + \cos BC = 2 \cos \tfrac{1}{2} CA \cos FB$$

$$\cos CD + \cos DA = 2 \cos \tfrac{1}{2} CA \cos FD$$

Nun ist $\cos FB + \cos FD = 2 \cos \frac{1}{2} DB \cos FF_1$, folglich**)

$$\cos AB + \cos BC + \cos CD + \cos DA = 4 \cos \tfrac{1}{2} CA \cos \tfrac{1}{2} DB \cos FF_1$$

Eben so ist in den Vierecken $BCAD$ und $CABD$

$$\cos BC + \cos CA + \cos AD + \cos DB = 4 \cos \tfrac{1}{2} AB \cos \tfrac{1}{2} DC \cos GG_1$$

$$\cos CA + \cos AB + \cos BD + \cos DC = 4 \cos \tfrac{1}{2} BC \cos \tfrac{1}{2} DA \cos EE_1$$

Und wenn bei den Hauptkreisen $a$, $b$, $c$, $d$ die Winkel $ca$ und $db$ durch die Hauptkreise $f$ und $f_1$ halbirt werden, so findet man auf gleiche Weise

$$\cos ab + \cos bc + \cos cd + \cos da = 4 \cos \tfrac{1}{2} ca \cos \tfrac{1}{2} db \cos ff_1$$

u. s. w.

18. Nach der Hypothese der gemeinen Geometrie fällt die Kugel mit einer sie berührenden Ebene, eine sphärische Figur mit ihrer Nor-

---

*) Gudermann nied. Sphärik 400. Vergl. Planim. §. 14, 18.

**) Steiner Crelle J. 2 p. 292. Gudermann a. a. O. Planim. §. 14, 20.

malprojection auf diese Ebene zusammen, wenn der Radius des Berührungspunctes unendlich groß wird. Denn die Radien, welche das unendlich ferne Centrum gemein haben, werden parallel und zwar normal zu der Ebene, mit welcher die Kugel zusammenfällt. Die Bogen von Hauptkreisen fallen mit ihren Sehnen und mit ihren Normalprojectionen auf die Ebene zusammen.

Wenn eine sphärische Figur auf einer Kugel in Betracht kommt, deren Radius $r$ Einheiten hat, und wenn die Bogen von Hauptkreisen der Figur $a, b, c, \ldots$ Einheiten haben, so werden die entsprechenden Centriwinkel (deren Arcus, Planim. §. 13, 8) durch die Quotienten $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}, \ldots$ ausgedrückt. Je größer nun $r$ wird, desto mehr verschwinden die Bogen $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}, \ldots$, desto genauer erreichen $\sin\frac{a}{r}$ und $\operatorname{tang}\frac{a}{r}$ den Werth $\frac{a}{r}$ (§. 3, 10); dagegen fällt $\cos\frac{a}{r}$ mit $1 - \frac{a^2}{2r^2}$ zusammen, weil (§. 4, 7)

$$\cos\frac{a}{r} = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2r}$$

und $\sin^2\frac{a}{2r}$ dem Werth $\frac{a^2}{4r^2}$ sich unendlich nähert.

Durch die angegebene Substitution kann aus jeder für die Elemente einer sphärischen Figur geltenden trigonometrischen Gleichung die Gleichung abgeleitet werden, welche für die entsprechenden Elemente der Planfigur gilt, mit der die sphärische Figur bei unendlich wachsendem Radius der Kugel zusammenfällt.*) Z. B. Wenn die Winkel eines sphärischen Dreiecks durch $\alpha, \beta, \gamma$ bezeichnet werden, und die gegenüberliegenden Seiten $a, b, c$ Längeneinheiten haben, während der Radius der Kugel $r$ Längeneinheiten beträgt, so ist (8)

$$\sin\frac{b}{c}\sin\frac{c}{r}\cos\alpha = \cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}$$

Bei wachsendem $r$ behält man von dieser Gleichung durch die obige Substitution

$$\frac{bc}{r^2}\cos\alpha = 1 - \frac{a^2}{2r^2} - \left(1 - \frac{b^2}{2r^2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2r^2}\right)$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2r^2} - \frac{b^2c^2}{4r^4}$$

$$2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 - \frac{b^2c^2}{2r^2}$$

*) Lagrange a. a. O. p. 291. Vergl. Euler Acta Petrop. 1178, II p. 39.

also für das plane Dreieck, wenn $r = \infty$, $2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$ in Uebereinstimmung mit §. 4, 10. Aus der sphärischen Gleichung (8)

$$\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma\cos\frac{a}{r} = 0$$

findet man durch dasselbe Verfahren für das plane Dreieck die Gleichung

$$\cos\alpha + \cos(\beta + \gamma) = 0$$

in Uebereinstimmung mit dem Satz, daß in dem planen Dreieck $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ ist. U. s. w.

**19.** Wenn die Seiten des sphärischen Dreiecks zu dem Radius der Kugel kleine Verhältnisse haben, so kann die Fläche des sphärischen Dreiecks (und sein Exceß, Stereom. §. 4, 5) aus gegebenen Elementen ebenso berechnet werden, wie die Fläche des durch dieselben Elemente bestimmten planen Dreiecks. Dagegen sind die Winkel des sphärischen Dreiecks je um den dritten Theil des Excesses größer als die Winkel des planen Dreiecks, welches mit dem sphärischen Dreieck der Reihe nach gleiche Seiten hat.*)

Beweis. Für kleine Werthe von $\frac{x}{r}$ kann

$$\cos\frac{x}{r} = 1 - \frac{x^2}{2r^2} + \frac{x^4}{24r^4}, \quad \sin\frac{x}{r} = \frac{x}{r} - \frac{x^3}{6r^3}$$

gesetzt werden (Allg. Arithm. §. 31, 8). Durch diese Substitution erhält man für

$$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}} \quad (18)$$

einen Bruch, dessen Zähler

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2r^2} - \frac{b^4 + c^4 - a^4 + 6b^2c^2}{24r^4}$$

und dessen Nenner $\frac{bc}{r^2}\left(1 - \frac{b^2 + c^2}{6r^2}\right)$ ist. Nun ist mit hinreichender Genauigkeit

---

*) Legendre Mém. de Paris 1787 p. 338 und Trigonom. Append. V. Vergl. Lagrange J. de l'Ecole polyt. Cah. 6 p. 293. Gauß disq. gener. circa superficies curvas (Comm. Götting. VI. 1827) und Crelle J. 22 p. 96.

$$\frac{1}{1-\frac{b^2+c^2}{6r^2}} = 1 + \frac{b^2+c^2}{6r^2}$$

folglich

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - \frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{24bcr^2}$$

Werden von dem planen Dreieck, dessen Seiten ebenfalls $a$, $b$, $c$, Längeneinheiten haben, die Winkel durch $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, die Fläche durch $\Delta$ bezeichnet, so ist (§. 2, 5)

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\alpha'$$

$$2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4 = 4b^2c^2\sin^2\alpha' = 16\Delta^2$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man

$$\cos\alpha = \cos\alpha' - \frac{bc\sin^2\alpha'}{6r^2} = \cos\alpha' - \frac{\Delta}{3r^2}\sin\alpha'$$

Die Zahl $\frac{\Delta}{3r^2}$ ist der Arcus des Centriwinkels $\frac{\Delta}{3r^2}\frac{180^0}{\pi}$, der so klein ist, daß sein Sinus von $\frac{\Delta}{3r^2}$ und sein Cosinus von 1 nicht beträchtlich abweicht. Also ist nach §. 4, 7

$$\cos\alpha = \cos\left(\alpha' + \frac{\Delta}{3r^2}\frac{180^0}{\pi}\right), \quad \alpha = \alpha' + \frac{\Delta}{3r^2}\frac{180^0}{\pi}$$

Durch dieselben Betrachtungen findet man

$$\beta = \beta' + \frac{\Delta}{3r^2}\frac{180^0}{\pi}, \quad \gamma = \gamma' + \frac{\Delta}{3r^2}\frac{180^0}{\pi}$$

folglich

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma' + \frac{\Delta}{r^2}\frac{180^0}{\pi} = 180^0 + \frac{\Delta}{r^2}\frac{180^0}{\pi}$$

d. h. der Exceß des sphärischen Dreiecks beträgt $\frac{\Delta}{r^2}\frac{180^0}{\pi}$. In der That hat ein zweirechtwinkeliges sphärisches Dreieck der gegebenen Kugel, dessen dritter Winkel $180^0$ beträgt, eine Fläche von $\pi r^2$ Quadrateinheiten (Stereom. §. 10, 5); folglich hat das gegebene sphärische Dreieck, dessen Exc $\frac{\Delta}{r^2}\frac{180^0}{\pi}$ beträgt, eine Fläche von $\Delta$ Quadrateinheiten.

Anmerkung. Wenn z. B. $b$, $c$, $\alpha$ gegeben sind, so berechnet man

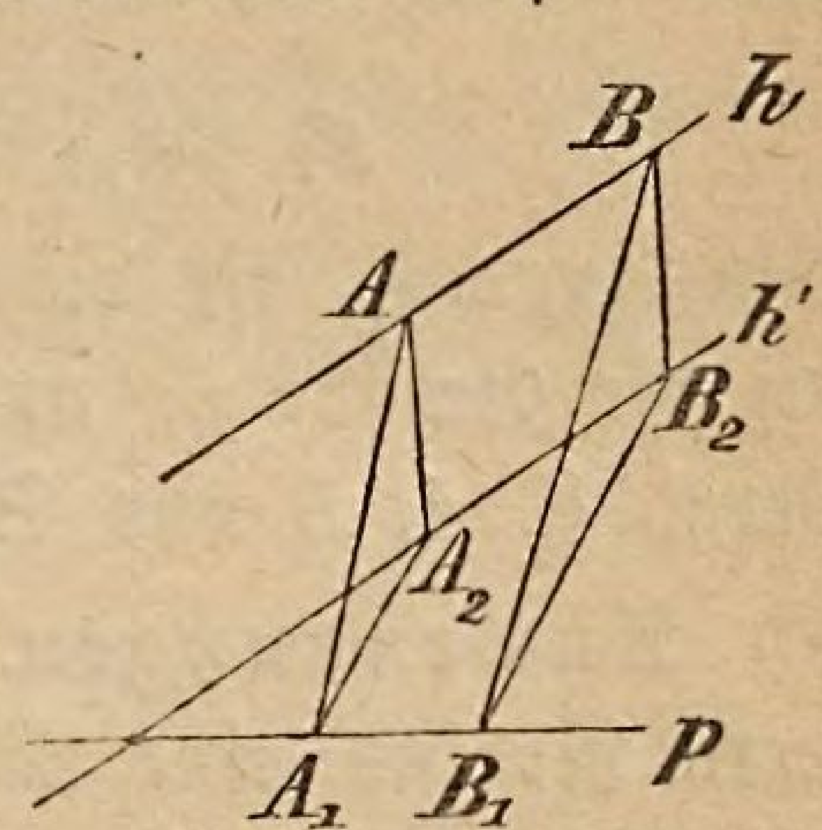
$$\Delta = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha, \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{r^2}\frac{180^0}{\pi}, \quad \alpha' = \alpha - \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

Aus den Elementen $b$, $c$, $\alpha'$ wird nach den Regeln der planen Trigonometrie $\beta'$, $\gamma'$, $a$ gefunden. Dann ist

$$\beta = \beta' + \tfrac{1}{3}\varepsilon,\ \gamma = \gamma' + \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

## §. 6. Polygonometrie und Polyedrometrie.

**1.** Wenn die Geraden $h$, $p$ nicht auf einer Ebene liegen, und die Strecke $AB$ der Geraden $h$ auf die Ebene, welche die Gerade $p$ enthält und mit der Geraden $h$ parallel ist, durch die Normalen dieser Ebene $A_2A$, $B_2B$ projicirt wird, so ist $AA_2B_2B$ ein Rectangel. Wenn die Strecke $A_2B_2$ der mit $h$ parallelen Geraden $h'$ auf die Gerade $p$ durch die Normalen $A_1A_2$, $B_1B_2$ projicirt wird, so sind die Ebenen $AA_1A_2$, $BB_1B_2$ und die Geraden $AA_1$, $BB_1$ normal zu $p$, und $A_1B_1$ ist die Normalprojection von $AB$ auf die Gerade $p$. Nun ist $A_2B_2 = AB$, $ph' = ph$, folglich (§. 4, 2)




$$A_1B_1 = A_2B_2 \cos ph' = AB \cos ph$$

Daher gelten die Gleichungen (§. 4, 5 und 6)

$$BC \cos pf + CA \cos pg + AB \cos ph = 0$$
$$\sin gh \cos pf + \sin hf \cos pg + \sin fg \cos ph = 0$$

auch dann, wenn die Gerade $p$ nicht auf der Ebene $ABC$ liegt. Wenn die Radien $OF$, $OG$, $OH$, $OP$ einer Kugel Längeneinheiten sind und die positiven Richtungen der Geraden $f$, $g$, $h$, $p$ haben, so ist*)

$$\sin GH \cos PF + \sin HF \cos PG + \sin FG \cos PH = 0$$

für 3 Puncte $F$, $G$, $H$ eines Hauptkreises und einen beliebigen Punct $P$ der Kugel. Durch Anwendung dieses Satzes auf das sphärische Dreieck $ABC$ mit den Quadranten $AM$, $AN$ auf $CA$, $AB$ findet man

$$\sin AN \cos BC + \sin NB \cos AC + \sin BA \cos NC = 0$$
$$\sin AM \cos NC + \sin MC \cos NA + \sin CA \cos NM = 0$$

also in diesem Falle

$$\cos BC - \cos CA \cos AB - \sin AB \cos NM = 0$$
$$\cos NC + \sin CA \cos NM = 0$$
$$\cos BC - \cos CA \cos AB + \sin CA \sin AB \cos NM = 0$$

---

*) Diese Relation, welcher in der Planimetrie Stewart's Satz (Planim. §. 14, 22) entspricht, ist von Carnot géom. de pos. 344 mit Hülfe des sphärischen Satzes §. 5, 6 gesucht, von Schulz Sphärik II, 49 gefunden, von Möbius auf seine wahre Quelle zurückgeführt und zur Grundlage der sphärischen Trigonometrie gemacht worden. (Vorlesung 1839. Vergl. Analyt. Sphärik 7.)

übereinstimmend mit $\cos a - \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos \alpha = 0$ (§. 5, 8).

2. Nachdem von den $n$ Geraden, die ein ebenes oder unebenes Polygon bilden, die positiven Richtungen nach Willkür bestimmt worden sind, haben die Seiten $AB$, $BC$, $CD$, . . des Polygons bestimmte Werthe $a_1$, $a_2$, . ., $a_n$. Wird nun durch $p$ eine beliebige Gerade bezeichnet, deren positive Richtung man willkürlich bestimmt hat, und durch $\cos_{pi}$ der Cosinus des Winkels, welchen mit der Geraden $p$ die Gerade bildet, auf der die $i$te Seite des Polygons vom Werth $a_i$ liegt, so ist*)

$$a_1 \cos_{p1} + a_2 \cos_{p2} + \ldots + a_n \cos_{pn} = 0$$

Denn $a_i \cos_{pi}$ ist die Normalprojection der $i$ten Seite des Polygons auf die Gerade $p$, und die Summe dieser Normalprojectionen ist null. Vergl. §. 4, 5 und Stereom. §. 11, 1.

Anwendungen. Zieht man durch das Centrum einer Kugel, deren Radius eine Längeneinheit ist, parallel mit $p$ und den Geraden, auf denen die Seiten des Polygons liegen, Gerade, deren positive Richtungen die Kugel in $P$, $A_1$, $A_2$, . . schneiden, so ist $\cos_{pi}$ dem Cosinus des Hauptkreisbogens $PA_i$ gleich, folglich**)

$$a_1 \cos PA_1 + a_2 \cos PA_2 + \ldots + a_n \cos PA_n = 0$$

Diese Gleichung, in der $P$ ein willkürlicher Punct der Kugel ist, giebt zu erkennen, daß der Schwerpunct der Puncte $a_1 . A_1$, $a_2 . A_2$, . ., $a_n . A_n$ in dem Centrum $O$ der Kugel liegt. Zieht man nämlich durch die Puncte $A_1$, $A_2$, . ., $A_n$ parallel mit $OP$ Gerade, die von der durch $O$ normal zu $OP$ gehenden Ebene in $B_1$, $B_2$, . ., $B_n$ geschnitten werden, so ist

$$\cos PA_1 = B_1 A_1, \quad \cos PA_2 = B_2 A_2, \ldots$$

folglich für jede Richtung der Parallelen, welche durch die das Centrum $O$ enthaltende Ebene normal geschnitten werden,

$$a_1 . B_1 A_1 + a_2 . B_2 A_2 + \ldots + a_n . B_n A_n = 0$$

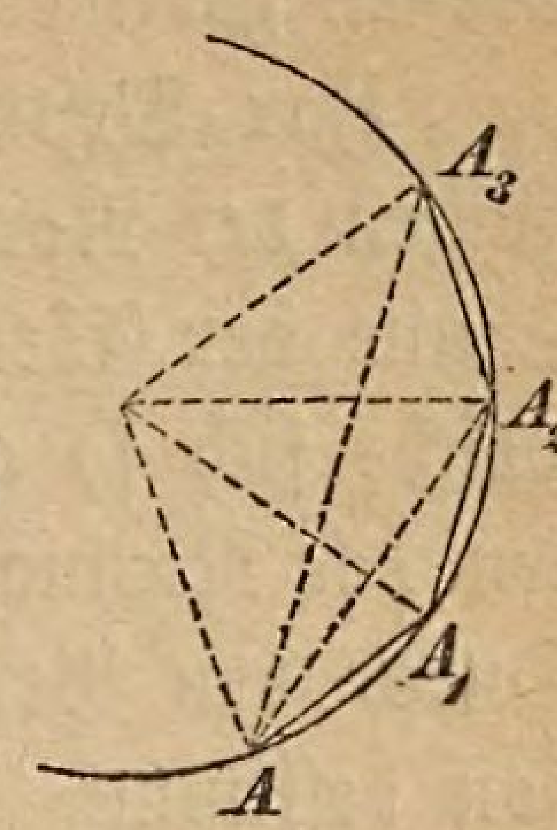
Also liegt der Schwerpunct des angegebenen Systems in $O$ (Stereom. §. 11, 2).

---

*) Diese Fundamentalgleichung der Polygonometrie ist von Lexell 1775 Nov. Comm. Petrop. 19 p. 187 aufgestellt worden. Vergl. L'Huilier polygonométrie 1789. Carnot géom. de pos. 254 ff.

**) Das Princip der analytischen Sphärik von Möbius 1846. Vergl. den von Steiner Crelle J. 2 p. 291 ausgesprochenen Lehrsatz.

Wenn in einem Kreise, dessen Radius eine Längeneinheit ist, die gleichen Sehnen $AA_1$, $A_1A_2$, . ., $A_{n-1}A_n$ gezogen werden, und die Strecken $AA_1$, $A_1A_2$ mit der beliebigen Geraden $p$ die Winkel $\alpha$, $\alpha + \beta$ bilden, so bilden die Strecken $A_2A_3$, . ., $A_{n-1}A_n$ mit $p$ die Winkel $\alpha + 2\beta$, . ., $\alpha + (n-1)\beta$; die Winkel $A_1AA_2$, $A_2AA_3$, . . haben den gemeinschaftlichen Werth $\frac{1}{2}\beta$, der Winkel $A_1AA_n$ hat den Werth $\frac{1}{2}(n-1)\beta$, $AA_n$ bildet mit $p$ den Winkel $\alpha + \frac{1}{2}(n-1)\beta$. Die Summe der Projectionen von $AA_1$, $A_1A_2$, . ., $A_{n-1}A_n$ auf die Gerade $p$ ist der Projection der Strecke $AA_n$ auf dieselbe Gerade gleich. Es haben aber diese Projectionen die Werthe




$$AA_1 \cos\alpha,\quad AA_1 \cos(\alpha + \beta),\ . .,\quad AA_1 \cos[\alpha + (n-1)\beta]$$
$$AA_n \cos[\alpha + \tfrac{1}{2}(n-1)\beta]$$

und es ist

$$AA_1 = 2\sin\tfrac{1}{2}\beta,\quad AA_n = 2\sin\tfrac{1}{2}n\beta$$

Demnach ergiebt sich die Summe*)

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + . . + \cos[\alpha + (n-1)\beta] = \frac{\sin\frac{1}{2}n\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}\cos[\alpha + \tfrac{1}{2}(n-1)\beta]$$

und durch Vertauschung von $\alpha$ mit $\alpha + 90^0$

$$\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + . . + \sin[\alpha + (n-1)\beta] = \frac{\sin\frac{1}{2}n\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}\sin[\alpha + \tfrac{1}{2}(n-1)\beta]$$

Diese Summen werden auch dadurch gefunden, daß man die ersten und letzten Glieder, die zweiten und vorletzten, u. s. f. nach §. 4, 8 vereinigt. Euler Introd. I, 258.

3. Die Normalprojection einer Planfigur auf eine Ebene ist das Product der Planfigur mit dem Cosinus des Winkels, welchen die Ebene der Planfigur mit der Projectionsebene bildet.**)

Beweis. Die Normalprojection der Planfigur kann als Normalschnitt eines Prisma betrachtet werden, welches die Planfigur zur Basis hat. Ihr Verhältniß zur Planfigur ist nach Stereom. §. 8, 6 das Verhältniß der Höhe des Prisma zu einer Längenkante. Nun ist die Höhe die Normalprojection der Längenkante auf eine Normale der Basis, und die Längenkante ist eine Normale der Projectionsebene. Also ist das Verhältniß der Normalprojection der Planfigur zu der Plan-

*) Der geometrische Ausdruck dieser Summation kommt bei Archimedes vor Sph. et Cyl. I, 22 und 23.

**) Euler Introd. II. App. 64.

figur selbst der Cosinus des Winkels, welchen die Normalen der Planfigur und der Projectionsebene bilden, d. i. der Cosinus des von diesen Ebenen gebildeten Flächenwinkels (Stereom. §. 2, 5).

Zur Bestimmung der Zeichen hat man zuerst die positiven Richtungen der Normalen der Ebenen willkürlich, darnach aber die positiven Sinne der Ebenen so festzusetzen, daß sie übereinstimmen für Betrachter, welche sich so auf die Ebenen stellen, daß ihnen die positiven Richtungen der Normalen aufwärts gehend erscheinen. Vergl. Stereom. §. 4, 7. Durch den Perimeter der Planfigur wird der Perimeter ihrer Projection bestimmt. Dann ist sowohl der Cosinus des Winkels der Ebenen oder ihrer Normalen, als auch das Zeichen jeder von beiden Flächen, der Planfigur und ihrer Projection, unzweideutig bestimmt. Wenn für die Normale einer Ebene die entgegengesetzte Richtung und damit für die Ebene der entgegengesetzte Sinn als positiv genommen wird, so wechselt eine Fläche und der Cosinus das Zeichen.

Anwendung. Eine gegebene sphärische Figur werde beliebig in unendlich kleine Theile getheilt, deren einer $\alpha$ seinen Schwerpunct in $A$ habe. Man projicire die sphärische Figur durch Normalen auf die Ebene eines Hauptkreises, und bezeichne durch $A_1$ und $\alpha_1$ die Projectionen von $A$ und $\alpha$, durch $f$ die Fläche der sphärischen Figur, durch $f_1$ die Fläche ihrer Projection, durch $O$ das Centrum der Kugel, endlich durch $h$ die Höhe des Schwerpuncts der sphärischen Fläche über der Ebene des Hauptkreises. Dann ist das Product $fh$ der Summe aller Producte $\alpha . A_1 A$ gleich (Stereom. §. 11, 11). Nun ist

$$A_1 A = OA . \cos OAA_1 = OA . \cos \alpha_1 \alpha$$
$$\alpha . A_1 A = OA . \alpha \cos \alpha_1 \alpha = OA . \alpha_1$$

und die Summe aller $\alpha . A_1 A$ dem Product von $OA$ mit der Summe aller $\alpha_1$ gleich. Daher hat man $fh = OA . f_1$, $h : OA = f_1 : f$.*)

4. Wenn die Perimeter der $n$ Flächen eines Polyeders dem Gesetz der Kanten genügen (Stereom. §. 8, 16), und wenn von den $n$ Ebenen, auf denen die Flächen des Polyeders liegen, die positiven Sinne willkürlich festgesetzt worden sind, so haben die Flächen des Polyeders unzweideutig bestimmte Werthe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Nimmt man eine beliebige Ebene hinzu, deren positiver Sinn ebenfalls willkürlich festgesetzt wird, und bezeichnet man durch $\cos_{pi}$ den Cosinus des Winkels, den mit der beliebigen Ebene die Ebene bildet, auf der die Fläche vom Werth $\alpha_i$ liegt, so ist

*) Giulio Liouv. J. 4 p. 386. Vergl. Besge Liouv. J. 7 p. 516. Crelle J. 50 p. 322.

$$\alpha_1 \cos_{p1} + \alpha_2 \cos_{p2} + \ldots + \alpha_n \cos_{pn} = 0$$

d. h. die Summe der Normalprojectionen der Flächen des Polyeders auf die beliebige Ebene verschwindet.*)

Beweis. Es sei z. B. $ABCD$ die erste Fläche des Polyeders, und die anliegenden Flächen haben die bestimmten Perimeter $BAE\ldots$, $CBF\ldots$, $DCG\ldots$, $ADH\ldots$ Bezeichnet man Normalprojectionen dieser Flächen durch $A_1B_1C_1D_1$, $B_1A_1E_1\ldots, \ldots$ und einen willkürlichen Punct der Projectionsebene durch $O$, so ist (Planim. §. 9, 10)

$$A_1B_1C_1D_1 = OA_1B_1 + OB_1C_1 + OC_1D_1 + OD_1A_1$$

u. s. w., folglich die Summe der Projectionen aller Flächen des Polyeders

$$\begin{aligned} A_1B_1C_1D_1 + B_1A_1E_1 \ldots + C_1B_1F_1, \ldots + \ldots \\ = OA_1B_1 + OB_1C_1 + OC_1D_1 + OD_1A_1 \\ + OB_1A_1 + OA_1E_1 + \ldots + OC_1B_1 + OB_1F_1 + \ldots \\ + \ldots \quad + \ldots \quad + \ldots \end{aligned}$$

Nach dem Gesetz der Kanten kommt in dieser Summe neben jedem Dreieck wie $OA_1B_1$ auch das entgegengesetzte Dreieck $OB_1A_1$ vor, also verschwindet die Summe. Nun ist $A_1B_1C_1D_1 = ABCD \cos_{p1}$, u. s. w. (3), folglich verschwindet die Summe $\alpha_1 \cos_{p1} + \alpha_2 \cos_{p2} + \ldots$

5. Die positiven Sinne der Ebenen, auf denen die Polyederflächen liegen, werden zugleich mit den positiven Richtungen ihrer Normalen bestimmt (3). Auf den Normalen construire man Strecken, deren Werthe $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in Bezug auf Größe und Zeichen der Reihe nach sich verhalten wie die Werthe der Polyederflächen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Jedes System solcher Strecken ist so beschaffen, daß durch parallele Verschiebung derselben ein geschlossenes Polygon sich zusammensetzen läßt. Denn aus der Gleichung (4)

$$\alpha_1 \cos_{p1} + \alpha_2 \cos_{p2} + \ldots + \alpha_n \cos_{pn} = 0$$

folgt nach der über $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gemachten Voraussetzung

$$a_1 \cos_{p1} + a_2 \cos_{p2} + \ldots + a_n \cos_{pn} = 0$$

d. h. die Summe der Normalprojectionen der Strecken, welche auf den Normalen der Polyederflächen liegen und die Werthe $a_1, a_2, \ldots, a_n$ haben, auf die Normale einer beliebigen Ebene verschwindet. Also ist jedes aus diesen Strecken durch parallele Verschiebung zusammengesetzte Polygon geschlossen (Stereom. §. 11, 1).

---

*) Vergl. die angeführten Stellen von L'Huilier und Carnot und des Verf. Schrift über die Determinanten §. 17.

Demnach kann jedem Polyeder von $n$ Flächen ein Polygon von $n$ Seiten zugeordnet werden; aus jeder Gleichung zwischen den Seiten und Winkeln dieses Polygons entspringt eine Gleichung zwischen den Flächen und Flächenwinkeln des Polyeders. Der Theil der Polyedrometrie, welcher von den Relationen der Flächen und Flächenwinkel der Polyeder handelt, ist in dem Theil der Polygonometrie enthalten, welcher die Relationen der Seiten und Winkel der Polygone umfaßt.*)

6. Aus der Gleichung (2)

$$a_1 \cos_{p1} + a_2 \cos_{p2} + \ldots + a_n \cos_{pn} = 0$$

ergiebt sich durch Vereinigung der beliebigen Geraden $p$ mit den Seiten des Polygons das System von Gleichungen

$$\begin{array}{llll} a_1 & + a_2 \cos_{12} & + \ldots + a_n \cos_{1n} & = 0 \\ a_1 \cos_{21} & + a_2 & + \ldots + a_n \cos_{1n} & = 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_1 \cos_{n1} & + a_2 \cos_{n2} & + \ldots + a_n & = 0 \end{array}$$

Wenn man die Gleichungen dieses Systems der Reihe nach mit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ multiplicirt und beachtet, daß $\cos_{ik} = \cos_{ki}$ ist, so findet man

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2a_1a_2 \cos_{12} + 2a_1a_3 \cos_{13} + \ldots$$
$$+ 2a_2a_3 \cos_{23} + \ldots + \ldots = 0$$
$$- a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2a_2a_3 \cos_{23} + 2a_2a_4 \cos_{24} + \ldots$$
$$+ 2a_3a_4 \cos_{34} + \ldots + \ldots = 0$$

u. s. w.**) Bei einem (ebenen oder unebenen) Viereck hat man

$$a_4^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2 \cos_{12} + 2a_2a_3 \cos_{23} + 2a_3a_1 \cos_{31}$$

und analog bei einem Tetraeder***)

$$\alpha_4^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \cos_{12} + 2\alpha_2\alpha_3 \cos_{23} + 2\alpha_3\alpha_1 \cos_{31}$$

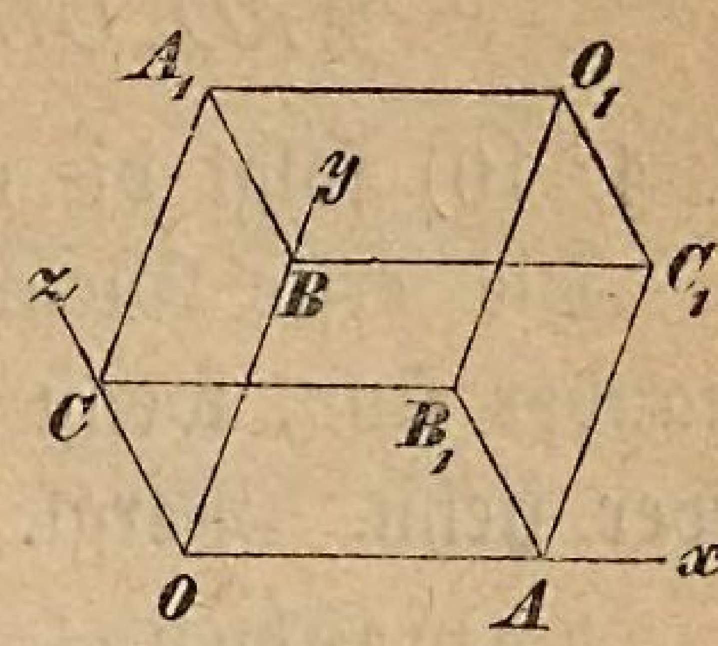
Unter der Voraussetzung, daß die Seiten und Flächen positive Theile der Geraden und Ebenen sind, auf denen sie liegen, ist in diesen Gleichungen $\cos_{12}$ dem Cosinus des Winkels entgegengesetzt gleich, welchen die beiden ersten Seiten oder Flächen einschließen, u. s. w. Vergl. §. 4, 5. Anm.

Anmerkung. Bezeichnet man bei dem Parallelepiped $OABC \ldots$ die Geraden, auf denen die Kanten $OA$, $OB$, $OC$ liegen, durch $x$, $y$, $z$,

---

*) Determ. §. 17, 2.
**) L'Huilier und Carnot a. a. O.
***) Lagrange Pyram. 12 (Mém. de Berlin 1773).

und setzt man die positiven Richtungen derselben willkürlich fest, so erhalten die Kanten $OA$, $OB$, $OC$ die Werthe $a$, $b$, $c$, und man hat in dem Viereck $OAB_1O_1$




$$OO_1{}^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
$$+ 2ab\cos xy + 2bc\cos yz + 2ca\cos zx$$

Hieraus entspringt $AA_1{}^2$ durch Vertauschung von $a$ mit $-a$, $BB_1{}^2$ durch Vertauschung von $b$ mit $-b$, $CC_1{}^2$ durch Vertauschung von $c$ mit $-c$, so daß*)

$$OO_1{}^2 + AA_1{}^2 + BB_1{}^2 + CC_1{}^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$$

Vergl. Planim. §. 14, 19.

Bezeichnet man die Ebenen $OBC$, $OCA$, $OAB$ durch $\varphi$, $\chi$, $\psi$, und nach willkürlicher Festsetzung der positiven Sinne dieser Ebenen die Werthe der Flächen $BOC$, $COA$, $AOB$ durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, so hat man in dem Tetraeder $OABC$**)

$$ABC^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta\cos\varphi\chi + 2\beta\gamma\cos\chi\psi + 2\gamma\alpha\cos\psi\varphi$$

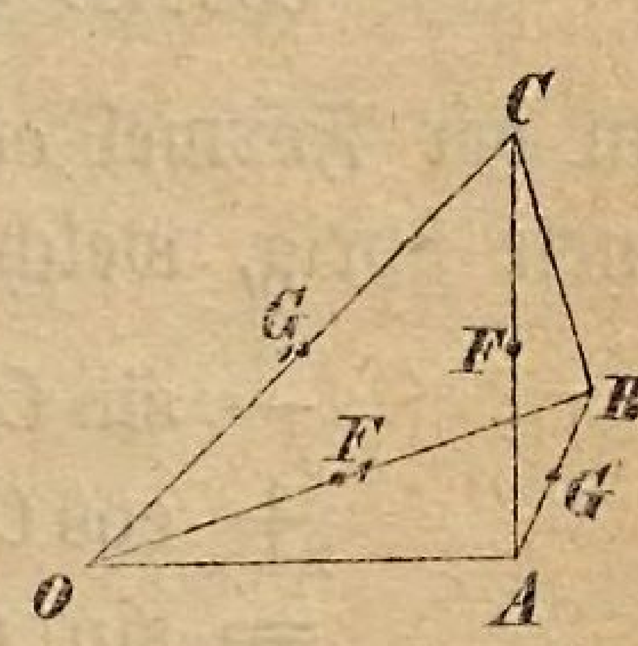
Daraus entspringt $B_1C_1O^2$ durch Vertauschung von $\alpha$ mit $-\alpha$, $C_1A_1O^2$ durch Vertauschung von $\beta$ mit $-\beta$, $A_1B_1O^2$ durch Vertauschung von $\gamma$ mit $-\gamma$, so daß

$$ABC^2 + B_1C_1O^2 + C_1A_1O^2 + A_1B_1O^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

7. Bezeichnet man bei einem (ebenen oder unebenen) Viereck $OABC$ die Geraden, auf welchen die Strecken $OA$, $OB$, $OC$, $BC$, $CA$, $AB$ liegen, durch $x$, $y$, $z$, $a$, $b$, $c$, so ist***)

$$OA\,.\,BC\cos xa + OB\,.\,CA\cos yb + OC\,.\,AB\cos zc = 0$$
$$2OA\,.\,BC\cos xa = OC^2 + AB^2 - OB^2 - CA^2$$

Beweis. Durch Projection der Perimeter $BCO$, $CAO$, $ABO$ auf die Geraden $x$, $y$, $z$ erhält man




$$BC\cos xa + CO\cos zx + OB\cos xy = 0$$
$$CA\cos yb + AO\cos xy + OC\cos yz = 0$$
$$AB\cos zc + BO\cos yz + OA\cos zx = 0$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $OA$, $OB$, $OC$, so erhält man durch Addition die erste der aufgestellten Gleichungen, weil $OA\,.\,CO\cos zx + OC\,.\,OA\cos zx = 0$, u. s. w. Aus den Gleichungen

---

*) Legendre Géom. Note V.
**) Lagrange a. a. O.
***) Carnot Mém. sur la relation qui existe . . 27.

$$2OA.BC\cos xa + 2CO.OA\cos zx + 2OA.OB\cos xy = 0$$
$$2CO.OA\cos zx + CO^2 + OA^2 - CA^2 = 0$$
$$2AO.OB\cos xy + AO^2 + OB^2 - AB^2 = 0$$

(§. 4, 10) folgt die andere der zu beweisenden Gleichungen.

Die erste Gleichung giebt zu erkennen, daß $z$ und $c$ normal zu einander sind, wenn sowohl $x$ und $a$, als auch $y$ und $b$ normal zu einander stehn. Vergl. Planim. §. 6, 9 und Stereom. §. 6, 10.

Anmerkung. Wenn $F$, $G$, $F_1$, $G_1$ die Mitten von $CA$, $AB$, $OB$, $OC$ sind, so sind die Geraden $FG$ und $F_1G_1$ parallel mit $a$, die Geraden $FG_1$ und $F_1G$ parallel mit $x$, die Strecke $F_1G_1 = -FG = \frac{1}{2}BC$, u. s. w. Demnach ist

$$2GF.FG_1\cos xa + GF^2 + FG_1{}^2 = GG_1{}^2$$
$$2FG_1.G_1F_1\cos xa + FG_1{}^2 + G_1F_1{}^2 = FF_1{}^2$$

folglich

$$OA.BC\cos xa = 4GF.FG_1\cos xa = GG_1{}^2 - FF_1{}^2, \text{ u. s. w.}$$

8. Bezeichnet man bei einem sphärischen Viereck $OABC$ die Hauptkreise, auf welchen die Bogen $OA$, $OB$, $OC$, $BC$, $CA$, $AB$ liegen, durch $x$, $y$, $z$, $a$, $b$, $c$, so ist*)

$$\sin OA\sin BC\cos xa = \cos OB\cos CA - \cos OC\cos AB$$
$$\sin OA\sin BC\cos xa + \sin OB\sin CA\cos yb + \sin OC\sin AB\cos zc = 0$$

Beweis. Wenn $E$ ein Durchschnitt der Hauptkreise $x$ und $a$ ist, so hat man (§. 5, 6)

$$\cos OB = \cos BE\cos EO - \sin BE\sin EO\cos xa$$
$$\cos CA = \cos CE\cos EA - \sin CE\sin EA\cos xa$$
$$\cos OC = \cos CE\cos EO - \sin CE\sin EO\cos xa$$
$$\cos AB = \cos BE\cos EA - \sin BE\sin EA\cos xa$$

In der Formel $\cos OB\cos CA - \cos OC\cos AB$ bleiben nur die Producte übrig, welche den Factor $\cos xa$ enthalten. Nun ist

$$-\sin CE\cos BE(\sin EA\cos EO - \cos EA\sin EO)$$
$$+\cos CE\sin BE(\sin EA\cos EO - \cos EA\sin EO)$$
$$= \sin(EA-EO)\sin(BE-CE) = \sin OA\sin BC$$

---

*) Die erste dieser Gleichungen rührt von Gauß her (Disq. gener. circa superf. 2, VI. Vergl. Staudt Crelle J. 24 p. 252 und des Verf. Determ. §. 16, 4), die andere hat Joachimsthal Crelle J. 40 p. 45 hinzugefügt. Ueber den Zusammenhang dieser sphärischen Gleichungen mit den vorigen polygonometrischen Gleichungen vergl. unten (15).

folglich u. s. w. Aus den Gleichungen

$$\sin OA \sin BC \cos xa = \cos OB \cos CA - \cos OC \cos AB$$
$$\sin OB \sin CA \cos yb = \cos OC \cos AB - \cos OA \cos BC$$
$$\sin OC \sin AB \cos zc = \cos OA \cos BC - \cos OB \cos CA$$

erhält man durch Addition die andere der aufgestellten Gleichungen.

9. Die Bedingung, unter der dem linearen System (5)

$$\begin{array}{l} a_1 + a_2 \cos_{12} + \ldots + a_n \cos_{1n} = 0 \\ a_1 \cos_{21} + a_2 + \ldots + a_n \cos_{2n} = 0 \\ \ldots \\ a_n \cos_{n1} + a_n \cos_{n2} + \ldots + a_n = 0 \end{array}$$

durch nicht verschwindende $a_1, a_2, \ldots$ genügt werden kann, ist die Gleichung zwischen den Cosinus der Winkel von $n$ Geraden (Ebenen), auf denen die Seiten (Flächen) eines Polygons (Polyeders) liegen. Man schreibt dieselbe am einfachsten in Form einer Determinante (Algebra §. 5, 7):

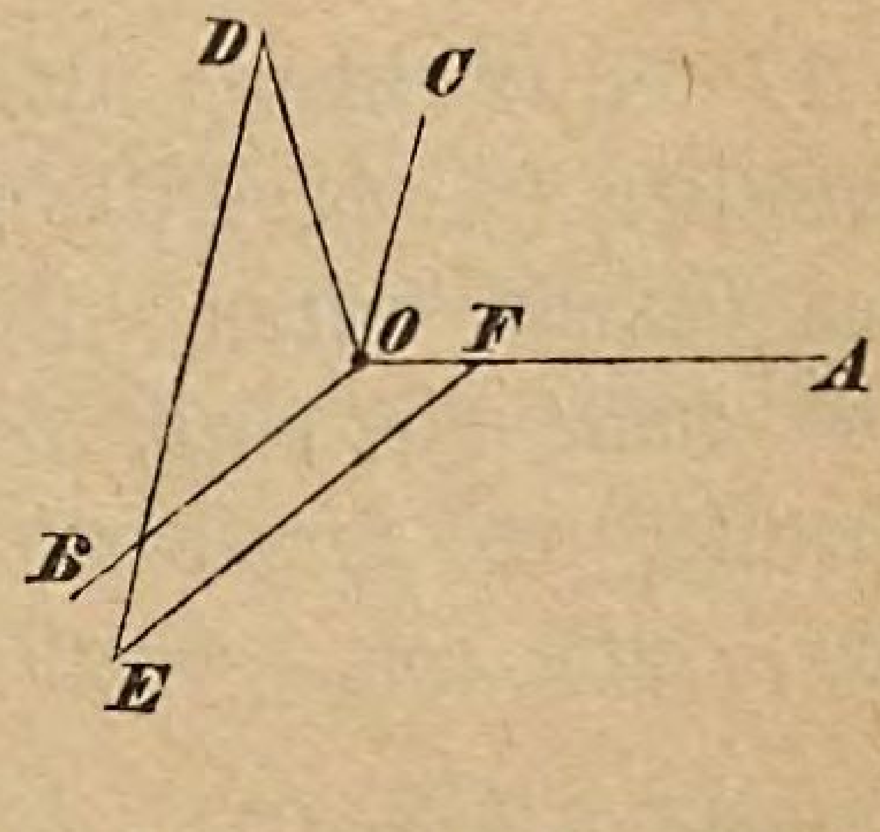
$$\begin{vmatrix} 1 & \cos_{12} & \ldots & \cos_{1n} \\ \cos_{21} & 1 & \ldots & \cos_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cos_{n1} & \cos_{n2} & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Drei Gerade, die mit einer Ebene parallel sind, sind mit den Seiten eines Dreiecks parallel. Also hat man für die Winkel von 3 Geraden, die mit einer Ebene parallel sind, die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos_{12} & \cos_{13} \\ \cos_{12} & 1 & \cos_{23} \\ \cos_{13} & \cos_{23} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

übereinstimmend mit der §. 4, 11 entwickelten Gleichung.

Vier Gerade, von denen nicht drei mit einer Ebene parallel sind, sind mit den Seiten eines unebenen Vierecks parallel, weil sie Normalen von vier Ebenen sind, die ein Tetraeder bilden können. Um ein solches Viereck zu construiren, ziehe man durch den willkürlichen Punct $O$ die Geraden $OA$, $OB$, $OC$, $OD$ parallel mit den gegebenen Geraden. Wird nun die Ebene $AOB$ von der Geraden, die parallel mit $OC$ durch $D$ geht, in $E$, und die Gerade $OA$ von der Geraden, die parallel mit $OB$ durch $E$ geht, in $F$ geschnitten, so ist $ODEF$ ein Viereck, mit dessen Seiten die gegebenen Geraden parallel sind. Daher hat man für die Winkel



von 4 Geraden, unter denen nicht drei mit einer Ebene parallel sind, die Gleichung*)

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos_{12} & \cos_{13} & \cos_{14} \\ \cos_{12} & 1 & \cos_{23} & \cos_{24} \\ \cos_{13} & \cos_{23} & 1 & \cos_{34} \\ \cos_{14} & \cos_{24} & \cos_{34} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dieselbe Gleichung besteht zwischen den Flächenwinkeln von 4 Ebenen, unter denen nicht drei mit einer Geraden parallel sind. Sie enthält demnach die Gleichung zwischen den Flächenwinkeln eines Tetraeders, zwischen den Seiten und Diagonalen eines sphärischen Vierecks.

Aus derselben Gleichung findet man die Gleichung zwischen dem Radius der einem Tetraeder umgeschriebenen Kugel, den Seiten einer Ecke desselben und den anliegenden Kanten, ferner die Gleichung zwischen demselben Radius und den 6 Kanten des Tetraeders, endlich die Gleichung zwischen den Strecken, welche 5 gegebene Puncte des Raumes verbinden. S. des Verf. Determ. §. 16.

**10.** Wenn man in dem System der besondern Gleichungen (6) eine derselben durch die allgemeine Gleichung (2) ersetzt, so erhält man für den Bestand des linearen Systems

$$\begin{array}{lllll} a_1 \cos_{p1} & + a_2 \cos_{p2} & + \,.\,.\, + & a_n \cos_{pn} & = 0 \\ a_1 \cos_{21} & + a_2 & + \,.\,.\, + & a_n \cos_{2n} & = 0 \\ . & . & . & . & \\ a_n \cos_{n1} & + a_n \cos_{n2} & + \,.\,.\, + & a_n & = 0 \end{array}$$

die Bedingung

$$\begin{vmatrix} \cos_{p1} & \cos_{p2} & .\,. & \cos_{pn} \\ \cos_{21} & 1 & .\,. & \cos_{2n} \\ . & . & .\,. & . \\ \cos_{n1} & \cos_{n2} & .\,. & 1 \end{vmatrix} = 0$$

d. i. die Gleichung zwischen den Cosinus der Winkel, welche die Polygonseiten (Polyederflächen) mit einander und mit einer beliebigen Geraden (Ebene) bilden. Insbesondere wird bei 4 Geraden, von denen drei und zwar die durch die Numern 1, 2, 3 bezeichneten mit einer Ebene parallel sind, der Werth von $\cos_{p1}$ aus den Werthen $\cos_{p2}$, $\cos_{p3}$, $\cos_{12}$, $\cos_{13}$ und $\cos_{23}$ durch die Gleichung gefunden:

---

*) Carnot géom. de pos. 350.

$$\begin{vmatrix} \cos_{p1} & \cos_{p2} & \cos_{p3} \\ \cos_{12} & 1 & \cos_{23} \\ \cos_{13} & \cos_{23} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Bei 5 Geraden (Ebenen) gilt die Gleichung*)

$$\begin{vmatrix} \cos_{p1} & \cos_{p2} & \cos_{p3} & \cos_{p4} \\ \cos_{12} & 1 & \cos_{25} & \cos_{24} \\ \cos_{13} & \cos_{23} & 1 & \cos_{34} \\ \cos_{14} & \cos_{24} & \cos_{34} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Daher verschwinden unbedingt alle (partialen) Determinanten 4ten und höhern Grades, welche zu dem obenstehenden System von $n^2$ Größen gehören, und die Proportion der Polygonseiten (Polyederflächen) ist goniometrisch nicht ausdrückbar.

Nur bei dem Dreieck und bei dem unebenen Viereck (Tetraeder) ergiebt sich aus dem linearen System (6) der goniometrische Ausdruck für die Proportion der Seiten (Flächen). Man findet (Algebra §. 5, 9. Determ. §. 17, 3)

$$a_1 : a_2 : a_3 = \sin_{23} : \sin_{31} : \sin_{12}$$

$$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = \sin_{234} : - \sin_{341} : \sin_{412} : - \sin_{123}$$

indem man abkürzend nach Analogie von $\sin^2{}_{12}$

$$\sin^2{}_{\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} 1 & \cos_{\alpha\beta} & \cos_{\alpha\gamma} \\ \cos_{\alpha\beta} & 1 & \cos_{\beta\gamma} \\ \cos_{\alpha\gamma} & \cos_{\beta\gamma} & 1 \end{vmatrix}$$

setzt. Wenn man für $a_1, a_2, \ldots$ die ihnen proportionalen Werthe in die Gleichung (1) setzt, so erhält man (wie §. 4, 6) allgemeine goniometrische Gleichungen. Vergl. unten 16.

**11.** Wenn das Polygon plan ist, so gilt nicht nur die Gleichung (2)

$$a_1 \cos_{p1} + a_2 \cos_{p2} + \ldots + a_n \cos_{pn} = 0$$

sondern es ist auch**)

$$a_1 \sin_{p_1} + a_2 \sin_{p2} + \ldots + a_n \sin_{pn} = 0$$

Diese Gleichung entspringt aus der vorigen, wenn für die Gerade $p$ eine andere angenommen wird, die mit $p$ einen Winkel von $90^0$ bildet. Dabei geht $\cos_{p1}$ in $-\sin_{p1}$ über (§. 4, 3).

---

*) Magnus anal. Geom. des Raumes §. 9 (7). Vergl. den Aufsatz des Verf. in Crelle J. 46 p. 145 und Determ. §. 17, 3.

**) Lexell und L'Huilier a. a. O.

Die gefundene allgemeine Gleichung enthält das System von Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccc} * & + a_2 \sin_{12} & + \ldots + & a_n \sin_{1n} & = 0 \\ a_1 \sin_{21} & * & + \ldots + & a_n \sin_{2n} & = 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \\ a_1 \sin_{n1} & + a_2 \sin_{n2} & + \ldots + & * & = 0 \end{array}$$

12. Die Fläche $f_n$ eines planen Polygons von $n$ Seiten ist durch $n-1$ Seiten und deren Winkel bestimmt, und zwar ist $f_n$ die halbe Summe der Werthe, welche aus der Formel

$$s_{ik} = a_i a_k \sin_{ik}$$

entspringen, wenn man für $i$, $k$ je zwei verschiedene aus der Reihe der Numern 1, 2, . ., $n-1$ setzt, so daß $k > i$.*)

Beweis. Das Polygon $A_1 A_2 \ldots A_n$ besteht aus dem Polygon $A_1 A_2 \ldots A_{n-1}$ und dem Dreieck $A_1 A_{n-1} A_n$ (Planim. §. 9, 10), folglich ist (§. 4, 12)

$$2f_n = 2f_{n-1} + 2A_1 A_{n-1} A_n = 2f_{n-1} + a_{n-1} a_n \sin_{n-1,n}$$

Nach (11) hat man

$$a_n \sin_{n-1,n} = a_1 \sin_{1,n-1} + a_2 \sin_{2,n-1} + \ldots + a_{n-2} \sin_{n-2,n-1}$$

folglich ist nach der obigen Bezeichnung

$$2f_n = 2f_{n-1} + s_{1,n-1} + s_{2,n-1} + \ldots + s_{n-2,n-1}$$

Wenn nun $2f_{n-1}$ die Summe der Werthe

$$\begin{array}{llll} s_{12} + s_{13} & + \ldots + & s_{1,n-2} \\ \quad\;\; + s_{23} & + \ldots + & s_{2,n-2} \\ & + \ldots & \cdot \\ & & + s_{n-3,n-2} \end{array}$$

ist, welche die Formel $s_{ik}$ enthält, wenn man für $ik$ die Binionen der Numern 1, 2, . ., $n-2$ setzt, so ist $2f_n$ die Summe der Werthe, welche dieselbe Formel darbietet, wenn für $ik$ die Binionen der Numern 1, 2, . ., $n-1$ gesetzt werden (Allg. Arithm. §. 25, 5). Nun ist $2f_3 = s_{12}$, folglich $2f_4 = s_{12} + s_{13} + s_{23}$, u. s. f.

13. Wenn die Ebenen der planen Polygone $AA_1 A_2 \ldots A_m$ und $BB_1 B_2 \ldots B_n$ nach willkürlicher Festsetzung ihrer positiven Sinne den Winkel $\varphi$ bilden und die Flächen derselben die Werthe $a$ und $b$ haben; wenn ferner $p$, $q$ Numern der Reihe 1, 2, . ., $m$ und $r$, $s$ Numern

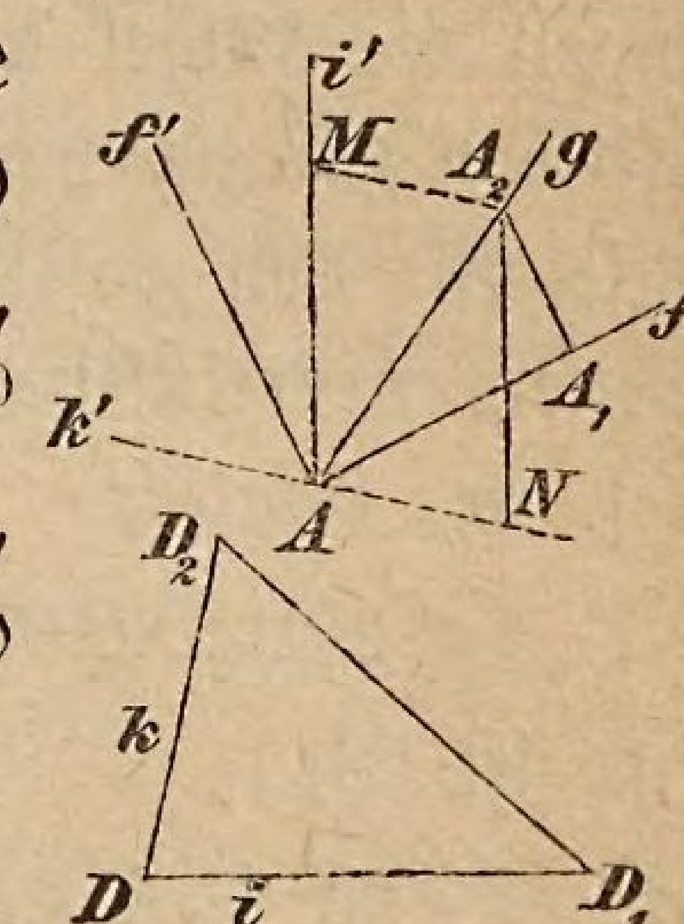
---

*) L'Huilier polygon. p. 8.

der Reihe 1, 2, . ., $n$ sind, wenn endlich die Geraden $AA_p$, $BB_r$ nach willkürlicher Festsetzung ihrer positiven Richtungen einen Winkel bilden, dessen Cosinus durch $\cos_{pr}$ bezeichnet wird, und demgemäß das Product $AA_p \,.\, BB_r \cos_{pr}$ den Werth $c_{pr}$ hat: so ist das Product $4ab\cos\varphi$ die Summe der $(m - 1)(n - 1)$ Werthe, welche aus der Formel

$$c_{pr}c_{qs} - c_{ps}c_{qr}$$

dadurch entspringen, daß man für $p$, $q$ je zwei folgende Numern der Reihe 1, 2, . ., $m$ und zugleich für $r$, $s$ je zwei folgende Numern der Reihe 1, 2, . ., $n$ setzt.*)




Beweis. Auf der Ebene $AA_1A_2$ liege das Dreieck $DD_1D_2$. Die Geraden, auf denen die Strecken $AA_1$, $AA_2$, $DD_1$, $DD_2$ liegen, werden durch $f$, $g$, $i$, $k$ bezeichnet und durch $A$ die Geraden $i'$, $k'$, $f'$ gezogen, welche mit $i$, $k$, $f$ Winkel von $90^0$ bilden. Vollendet man das Parallelogramm $AMA_2N$, dessen Seiten auf den Geraden $i'$ und $k'$ liegen, so hat man (§. 4, 12)

$$2\,AA_1M = MA \,.\, AA_1 \sin i'f = AA_1 \,.\, AM\cos fi$$
$$2DD_1D_2 = D_2D \,.\, DD_1 \sin ki = DD_1 \,.\, DD_2 \cos i'k$$

Weil $MA_2$ normal zu $k$ ist, so haben $AM$ und $AA_2$ auf $k$ gleiche Normalprojectionen, d. h.

$$AM\cos i'k = AA_2\cos gk$$

Folglich giebt die Multiplication

$$4\,AA_1M \,.\, DD_1D_2 = AA_1 \,.\, DD_1\cos fi \,.\, AA_2 \,.\, DD_2\cos gk$$

Hieraus erhält man durch gegenseitige Vertauschung von $D_1$ mit $D_2$, $i$ mit $k$, $i'$ mit $k'$, $M$ mit $N$

$$4\,AA_1N \,.\, DD_2D_1 = AA_1 \,.\, DD_2\cos fk \,.\, AA_2 \,.\, DD_1\cos gi$$

Nun ist $DD_2D_1 = - DD_1D_2$, $AA_1M + AA_1N = AA_1A_2$ (Planim. §. 9, 8), folglich

$$\begin{aligned} 4AA_1A_2 \,.\, DD_1D_2 = \; & AB_1 \,.\, DD_1\cos fi \,.\, AA_2 \,.\, DD_2\cos gk \\ & - AA_1 \,.\, DD_2\cos fk \,.\, AA_2 \,.\, DD_1\cos gi \end{aligned}$$

Es sei $DD_1D_2 = BB_1B_2\cos\varphi$ die Normalprojection von $BB_1B_2$ auf die Ebene $AA_1A_2$ (3). Dann werden die Strecken $BB_1$ und $DD_1$ durch dieselben Ebenen auf die Gerade $f$ projicirt, also ist nach den vorausgesetzten Bezeichnungen

$$BB_1\cos_{11} = DD_1\cos fi, \text{ u. s. w.}$$
$$4AA_1A_2 \,.\, BB_1B_2\cos\varphi = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$$

---

*) Staudt's Lehrsatz. Crelle J. 24 p. 252.

und überhaupt

$$4AA_pA_q \,.\, BB_rB_s \cos\varphi = c_{pr}c_{qs} - c_{ps}c_{qr}$$

Nun ist (Planim. §. 9, 10)

$$AA_1A_2 \,..\, A_m = AA_1A_2 + AA_2A_3 + \,..\, AA_{m-1}A_m$$
$$BB_1B_2 \,..\, B_n = BB_1B_2 + BB_2B_3 + \,..\, BB_{n-1}B_n$$

also $4ab\cos\varphi =$ u. s. w.

Anmerkung. Zieht man durch das Centrum einer Kugel, deren Radius eine Längeneinheit ist, parallel mit den Geraden, auf denen die Strecken $AA_1$, $AA_2$, $BB_1$, $BB_2$ liegen, Gerade, deren positive Richtungen die Kugel in $F_1$, $F_2$, $G_1$, $G_2$ schneiden, und nimmt man die positiven Sinne der durch $F_1$ und $F_2$, $G_1$ und $G_2$ gehenden Hauptkreise mit den positiven Sinnen der mit diesen Hauptkreisen parallelen Ebenen übereinstimmend an, so ist $2AA_1A_2 = AA_1 \,.\, AA_2 \sin F_1F_2$, u. s. w., folglich

$$4\,AA_1A_2 \,.\, BB_1B_2 = AA_1 \,.\, AA_2 \,.\, BB_1 \,.\, BB_2 \sin F_1F_2 \sin G_1G_2$$

Nun ist (8)

$$\sin F_1F_2 \sin G_1G_2 \cos\varphi = \cos F_1G_1 \cos F_2G_2 - \cos F_1G_2 \cos F_2G_1$$

folglich hat man nach der angenommenen Bezeichnung

$$4\,AA_1A_2 \,.\, BB_1B_2 \cos\varphi = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$$

u. s. w. Umgekehrt kann der sphärische Lehrsatz (8) aus diesem polygonometrischen Lehrsatz abgeleitet werden.

Wenn $n = m$ ist und die Puncte $B, B_1, .., B_m$ mit den Puncten $A, A_1, .., A_m$ der Reihe nach zusammenfallen, so wird $\cos\varphi = 1$, $c_{pr} = c_{rp}$, $c_{pp} = AA_p{}^2$, und die Formel $c_{pr}c_{qs} - c_{ps}c_{qr}$ behält ihren Werth, wenn $p$ mit $r$ und zugleich $q$ mit $s$ vertauscht wird. Daher findet man

$$\begin{aligned} 4a^2 = c_{11}c_{22} - c_{12}{}^2 + c_{22}c_{33} - c_{23}{}^2 + c_{33}c_{44} - c_{34}{}^2 + \,.. \\ + 2(c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}) + 2(c_{13}c_{24} - c_{14}c_{23}) + \,.. \\ + 2(c_{23}c_{34} - c_{24}c_{33}) + \,.. \\ + \,.. \end{aligned}$$

Diese Formel ist von der für $2a$ in (12) aufgestellten Formel wesentlich verschieden, weil sie nur die Strecken enthält, welche von einer Spitze des Polygons ausgehn.

Die für $4ab\cos\varphi$ und insbesondere für $4a^2$ gefundene Formel ist besonders deshalb bemerkenswerth, weil die darin vorkommenden Größen $c_{pr}$ durch die Quadrate von solchen Strecken sich ausdrücken lassen, welche die Spitzen des einen Polygons mit den Spitzen des andern Polygons verbinden. Denn es ist (7)

$$2AA_p . BB_r \cos_{pr} = AB_r{}^2 - AB^2 - (A_pB_r{}^2 - A_pB^2)$$

Demnach ist $16ab \cos\varphi$ eine ganze Function der Quadrate von den Strecken, welche die Spitzen des einen Polygons mit den Spitzen des andern Polygons verbinden. Insbesondere ist $16a^2$ eine ganze Function der Strecken, welche die Spitzen eines Polygons unter einander verbinden. Die Flächen des Dreiecks und des einem Kreise eingeschriebenen Vierecks sind in dieser Beziehung Planim. §. 14, 23 und 29 betrachtet worden. Vergl. Determ. §. 16, 13.

**14.** Die positiven Richtungen der Geraden, auf denen die Kanten $AB$, $AC$, $AD$ des Tetraeders $ABCD$ liegen, schneiden eine mit der Ecke $A$ concentrische Kugel, deren Radius eine Längeneinheit ist, in $L$, $M$, $N$. Die Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks $MNL$ werden durch $l$, $m$, $n$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ und die Summe $l + m + n$ durch $2s$ bezeichnet. Nennt man den Werth der gleichen Producte (§. 5, 11)

$$\sin l \sin m \sin \nu = \sin m \sin n \sin \lambda = \sin n \sin l \sin \mu$$

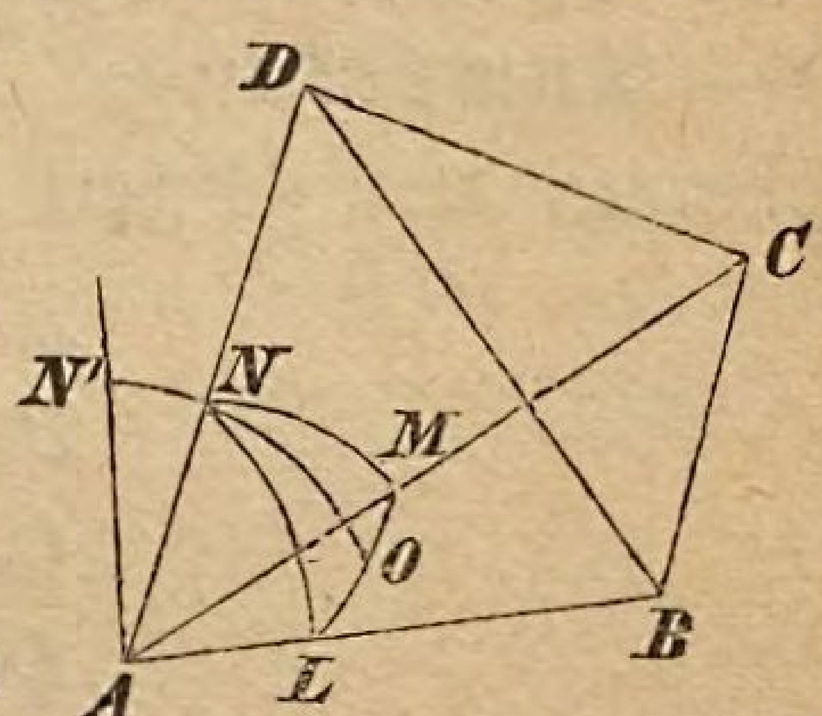
den Sinus der Ecke $A$ (vergl. 10), dergestalt daß

$$\sin^2(A) = 1 - \cos^2 l - \cos^2 m - \cos^2 n + 2 \cos l \cos m \cos n$$
$$= 4 \sin s \sin(s - l) \sin(s - m) \sin(s - n)$$

dann ist auch dem Zeichen nach das Volum*)

$$ABCD = \tfrac{1}{6} AB . AC . AD \sin(A)$$

Beweis. Die Basis $ABC$ des Tetraeders $ABCD$ hat (nach 13, Anm.) den Werth $\frac{1}{2} AB . AC \sin LM$. Die Höhe des Tetraeders ist die Normalprojection der Kante $AD$ auf eine Normale der Ebene $ABC$. Wenn nun die positive Richtung der durch $A$ gehenden Normale der Ebene $ABC$ die Kugel in $N'$ schneidet, so hat die Höhe den Werth $AD \cos NN'$, also das Volum des Tetraeders den Werth




$$\tfrac{1}{6} AB . AC . AD \sin LM \cos NN'$$

Diese Formel behält ihren Werth, wenn von einer der Geraden, welche die Kanten $AB$, $AC$, $AD$ enthalten, als die positive Richtung die entgegengesetzte angenommen wird. Denn dabei wechseln zugleich $AB$ und $\sin LM$, oder $AC$ und $\sin LM$, oder $AD$ und $\cos NN'$ das Zeichen. Wenn dagegen als die positive Richtung der Normale der Ebene $ABC$ die entgegengesetzte angenommen wird, so wechselt $\cos NN'$ und damit die Formel das Zeichen.

---

*) Euler Nov. Comm. Petrop. 4 p. 158. Vergl. Möbius baryc. Calcul 19. Statik 63. Den treffenden Ausdruck „Sinus einer Ecke" hat zuerst Staudt (Crelle J. 24 p. 252) gebraucht.

Bei den Normalen einer Ebene wird diejenige Richtung als die positive angenommen, welche aufwärts geht für den Betrachter, der auf der Ebene stehend den positiven Sinn derselben festsetzt (2). Beschreibt man positive Winkel und Flächen durch linksum gehende Drehungen, so trifft die positive Richtung der Geraden, welche durch das Centrum $A$ normal zur Ebene des Hauptkreises $n$ geht, den linken Pol von $n$, der durch $N'$ bezeichnet ist.

Wenn die Basis $ABC$ des Tetraeders $ABCD$ einen positiven Werth hat, so giebt man dem Volum des Tetraeders das Zeichen der Höhe. Das Volum ist also positiv oder negativ, je nachdem die Spitze $D$ mit dem Pol $N'$ auf derselben Seite der Basis liegt oder nicht. Dabei erscheint sowohl die Bewegung von $A$ nach $B$ einem Betrachter, der von $C$ nach $D$ aufwärts gerichtet ist, als auch die Bewegung von $C$ nach $D$ einem Betrachter, der von $A$ nach $B$ aufwärts gerichtet ist, in dem ersten Falle linksum, in dem zweiten Falle rechtsum gehend. Vergl. Stereom. §. 6, 11.

Für den Hauptkreis $NN'$, der mit dem Hauptkreis $n$ den Punct $O$ gemein hat, werde der positive Sinn so bestimmt, daß jener Hauptkreis in $O$ mit $n$ einen Winkel von $90^0$ bildet. Dann ist der Bogen $ON' = 90^0$, $\cos NN' = \sin ON$,

$\sin LM \cos NN' = \sin n \sin ON = \sin n \sin l \sin \mu$ (§. 5, 11), u. s. w.

Das durch die Formel $ABCD$ bestimmte Volum und der gefundene Werth desselben $\frac{1}{6} AB . AC . AD \sin(A)$ wechseln zugleich das Zeichen, wenn man irgend zwei unter den Eckpuncten $B$, $C$, $D$, vertauscht, weil dabei $\sin(A)$ das Zeichen wechselt.

Anmerkung. Die Formeln $ABCD$, $BADC$, $CDAB$, $DCBA$ stimmen den Zeichen nach überein. Bildet man die analogen Werthe

$$\begin{aligned} ABCD &= \tfrac{1}{6} AB . AC . AD \sin(A) \\ BADC &= \tfrac{1}{6} BA . BD . BC \sin(B) \\ CDAB &= \tfrac{1}{6} CD . CA . CB \sin(C) \\ DCBA &= \tfrac{1}{6} DC . DB . DA \sin(D) \end{aligned}$$

und bezeichnet man die Werthe der Strecken $BC$, $CA$, $AB$, $DA$, $DB$, $DC$ durch $a$, $b$, $c$, $a_1$, $b_1$, $c_1$, den Werth des Volums durch $v$, so hat man*)

$$6v = a_1 bc \sin(A) = ab_1 c \sin(B) = abc_1 \sin(C) = a_1 b_1 c_1 \sin(D)$$

$$\frac{abc}{6v} = \frac{a : a_1}{\sin(A)} = \frac{b : b_1}{\sin(B)} = \frac{c : c_1}{\sin(C)} = \frac{abc : a_1 b_1 c_1}{\sin(D)}$$

Wenn man in der Gleichung $144 v^2 = 4 a_1{}^2 b^2 c^2 \sin^2(A)$ die Werthe

*) Bretschneider Geometrie 677.

$\cos l$, $\cos m$, $\cos n$ durch die Kanten ausdrückt, wie §. 4, 11. Anm., so erhält man zur Berechnung des Volums aus den Kanten des Tetraeders für $144 v^2$ dieselbe Formel, welche a. a. O. verschwindet.*)

15. Aus der für das Tetraeder $ABCD$ gefundenen Formel entspringt eine andere, welche zwei Flächen, den Winkel derselben und die gemeinschaftliche Kante enthält, wie folgt. Bezeichnet man durch $D\overline{AC}B$ den Winkel, welchen die Ebene $ACD$ um die Axe $AC$ linksum für einen Betrachter, der von $A$ nach $C$ aufwärts gerichtet ist, zurücklegen muß, bis sie so mit der Ebene $ABC$ zusammenfällt, daß die Dreiecke $ACD$ und $ACB$ einerlei Zeichen haben (Stereom. §. 2, 5); so ist $D\overline{AC}B = B\overline{CA}D$, u. s. w., folglich (14)

$$6\,ABCD = AB\,.\,AC\,.\,AD \sin BAC \sin CAD \sin D\overline{AC}B$$

$$2\,ABC = AB\,.\,AC \sin BAC,\ 2\,ACD = AC\,.\,AD \sin CAD$$

$$3\,ABCD = 2\,ABC\,.\,ACD \frac{\sin D\overline{AC}B}{AC} = 2\,ABC\,.\,ACD \frac{\sin D\overline{CA}B}{CA} \text{ **)}$$

Eben so hat man

$$3\,BADC = 2\,BAD\,.\,BDC \frac{\sin C\overline{DB}A}{DB}$$

daher

$$9\,ABCD^2 = 4\,ABC\,.\,ACD\,.\,CBD\,.\,BAD \frac{\sin D\overline{CA}B \sin C\overline{DB}A}{CA\,.\,DB}$$

Diesem Ausdruck stehn zwei andere Ausdrücke zur Seite, in denen je ein Paar gegenüberliegende Kanten mit den daran liegenden Flächenwinkeln vorkommen. Bezeichnet man das Volum des Tetraeders durch $v$, die den Ecken $A$, $B$, $C$, $D$ gegenüberliegenden Flächen $CBD$, $ACD$, $BAD$, $ABC$ durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, die gegenüberliegenden Kanten $BC$ und $DA$, $CA$ und $DB$, $AB$ und $DC$ durch $a$ und $a_1$, $b$ und $b_1$, $c$ und $c_1$, und die Flächenwinkel

$$C\overline{AB}D,\quad A\overline{BC}D,\quad B\overline{CA}D$$
$$B\overline{DC}A,\quad C\overline{DA}B,\quad A\overline{DB}C$$

wie die Kanten, an denen sie liegen, so ist

$$9v^2 = 4\alpha\beta\gamma\delta \frac{\sin b \sin b_1}{b b_1} = \text{u. s. w.}$$

$$\frac{4\alpha\beta\gamma\delta}{9v} = \frac{a a_1}{\sin a \sin a_1} = \frac{b b_1}{\sin b \sin b_1} = \frac{c c_1}{\sin c \sin c_1} \text{ ***)}$$

*) Jungius' (1610) Biographie von Guhrauer p. 297. Euler Nov. Comm. Petrop. 4 p. 158.

**) Gerg. Ann. 3 p 323.

***) Bretschneider a. a. O.

Wenn man in dieser Gleichung die Flächenwinkel der als positiv vorausgesetzten Flächen durch die Winkel ihrer positiven Normalen ersetzt, so erhält man Ausdrücke für die Producte der gegenüberliegenden Kanten, durch welche die erste Gleichung (6) in die zweite Gleichung (7) übergeht.

**16.** Aus der für das Tetraeder gefundenen Formel (14) folgt

$$36v^2 = AB \,.\, AC \sin n \,.\, AC \,.\, AD \sin l \,.\, AD \,.\, AB \sin m \frac{\sin^2(A)}{\sin l \sin m \sin n}$$

Nun ist $AB \,.\, AC \sin n = 2ABC$, u. s. w. Bezeichnet man durch $\sin(A')$ den Sinus der Ecke, welche der Ecke $A$ des Tetraeders polar so zugeordnet ist, daß die Kugelschnitte der beiden Ecken sphärische Polarfiguren sind, so hat man (§. 5, 11)

$$\sin(A') = \frac{\sin^2(A)}{\sin l \sin m \sin n}$$

folglich nach der angenommenen Bezeichnung

$$36v^2 = 8\beta\gamma\delta \sin(A') = \text{u. s. w.*)}$$

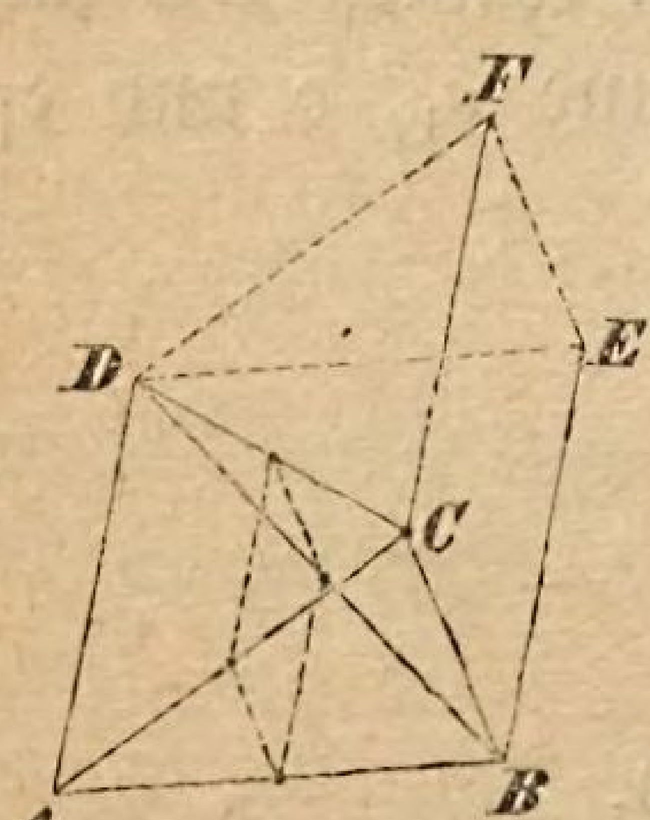
$$\frac{2\alpha\beta\gamma\delta}{9v^2} = \frac{\alpha}{\sin(A')} = \frac{\beta}{\sin(B')} = \frac{\gamma}{\sin(C')} = \frac{\delta}{\sin(D')}$$

Durch diese Werthe von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ erhält man aus der allgemeinen Gleichung (3) die goniometrische Gleichung

$$\sin(A') \cos_{p1} + \sin(B') \cos_{p2} + \sin(C') \cos_{p3} + \sin(D') \cos_{p4} = 0$$

u. s. w. Vergl. 10.

**17.** Andere Ausdrücke des Tetraeders findet man durch Vergleichung desselben mit einem Prisma, das mit ihm eine Ecke und die anliegenden Kanten gemein hat. Macht man z. B. $BE$ und $CF$ gleich und gleichgerichtet mit $AD$, so ist $ABCD$ der dritte Theil des Prisma, dessen Längenkanten $AD$, $BE$, $CF$ sind. Die Seiten $EF$, $FC$ des Parallelogramms $EFCB$ sind gleich und gleichgerichtet mit den gegenüberliegenden Kanten $BC$, $DA$ des Tetraeders, und mit den doppelten Seiten desjenigen seiner Mittelschnitte, welcher mit den Kanten $BC$, $DA$ parallel ist. Bezeichnet man die Kanten wie bisher, ihre Winkel durch $aa_1$, $bb_1$, $cc_1$, ihre Normalabstände durch $f_a$, $f_b$, $f_c$, die parallelen Mittelschnitte durch $\vartheta_a$, $\vartheta_b$, $\vartheta_c$, so hat man




*) Bretschneider a. a. O. Vergl. Lagrange sur les pyram. 17.

$$4\vartheta_a = aa_1 \sin aa_1, \quad 4\vartheta_b = bb_1 \sin bb_1, \quad 4\vartheta_c = cc_1 \sin cc_1$$
$$6v = f_a aa_1 \sin aa_1 = f_b bb_1 \sin bb_1 = f_c cc_1 \sin cc_1 \text{ *)}$$
$$3v = 2f_a\vartheta_a = 2f_b\vartheta_b = 2f_c\vartheta_c$$

Anmerkung. Die Flächen $FCBE$, $EBAD$, $DACF$ des Prisma verhalten sich zu einander, wie die Seiten des Dreiecks, in welchem das Prisma durch eine zu den Längenkanten normale Ebene geschnitten wird. Eben so verhalten sich zu einander die durch $2\vartheta_a$, $\gamma$, $\beta$ bezeichneten Flächen. Daher ist (§. 4, 10) nach der angenommenen Bezeichnung der Flächen und Flächenwinkel

$$4\vartheta_a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos a_1$$

und ebenso

$$4\vartheta_b^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha \cos b_1$$
$$4\vartheta_c^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos c_1$$

Nun ist (6)

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta \cos c_1 - 2\beta\gamma \cos a_1 - 2\gamma\alpha \cos b_1 = \delta^2$$

folglich hat man**)

$$4\vartheta_a^2 + 4\vartheta_b^2 + 4\vartheta_c^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$$

Bezeichnet man die Höhen des Tetraeders durch $h_\alpha$, $h_\beta$, $h_\gamma$, $h_\delta$, so ist $3v = \alpha h_\alpha$, u. s. w. Durch die Substitution

$$2\vartheta_a = \frac{3v}{f_a}, \ldots, \alpha = \frac{3v}{h_\alpha}, \ldots$$

erhält man sofort***)

$$\frac{1}{f_a^2} + \frac{1}{f_b^2} + \frac{1}{f_c^2} = \frac{1}{h_\alpha^2} + \frac{1}{h_\beta^2} + \frac{1}{h_\gamma^2} + \frac{1}{h_\delta^2}$$

Aus den Gleichungen

$$3va_1 = 2\beta\gamma \sin a_1 \quad (15)$$
$$\beta^2 + \gamma^2 - 4\vartheta_a^2 = 2\beta\gamma \cos a_1$$

folgt

$$(3va_1)^2 = 4\beta^2\gamma^2 - (\beta^2 + \gamma^2 - 4\vartheta_a^2)^2$$

d. h. nach Planim. §. 14, 23: das dreifache Product des Tetraeders mit einer Kante ist dem vierfachen Dreieck gleich, dessen Seiten die beiden Flächen sind, welche die Kante gemein haben, und der doppelte Mittelschnitt, welcher mit der Kante parallel ist.†)

---

*) Gerg. Ann. 18 p. 250. Steiner Crelle J. 23 p. 279. Vergl. Stereom. §. 8, 12.

**) Bretschneider a. a. O.

***) Joachimsthal Crelle J. 40 p. 45.

†) J. H. T. Müller Trigon. Anhang p. 291.

18. Das sechsfache Product des Tetraeders mit dem Radius der umgeschriebenen Kugel ist dem Dreieck gleich, dessen Seiten die Producte der gegenüberliegenden Kanten sind.*)

Beweis. Der Radius der Kugel $ABCD$ wird durch $r$ bezeichnet. Die Geraden $DA$, $DB$, $DC$ werden von einer Ebene, die mit der die Kugel in $D$ berührenden Ebene parallel ist und von dieser Ebene den Abstand $h_1$ hat, in $A_1$, $B_1$, $C_1$ so geschnitten, daß

$$DA.DA_1 = DB.DB_1 = DC.DC_1 = 2rh_1 = p$$

$$A_1B_1 = p\frac{AB}{DA.DB}, \quad B_1C_1 = p\frac{BC}{DB.DC}, \quad C_1A_1 = p\frac{CA}{DC.DA}$$

(Planim. §. 14, 13). Setzt man $DA.DB.DC = q$, so ist

$$A_1B_1 = \frac{p}{q}DC.AB, \quad B_1C_1 = \frac{p}{q}DA.BC, \quad C_1A_1 = \frac{p}{q}DB.CA$$

folglich das Dreieck $A_1B_1C_1$ dem Dreieck ähnlich, dessen Seiten die Werthe $DC.AB$, $DA.BC$, $DB.CA$ haben (Planim. §. 11, 2), und dessen nach Planim. §. 14, 23 zu berechnende Fläche den Werth $\varepsilon$ hat. Nun ist (14)

$$DABC : DA_1B_1C_1 = \frac{DA.DB.DC}{DA_1.DB_1.DC_1} = \frac{q^2}{p^3}$$

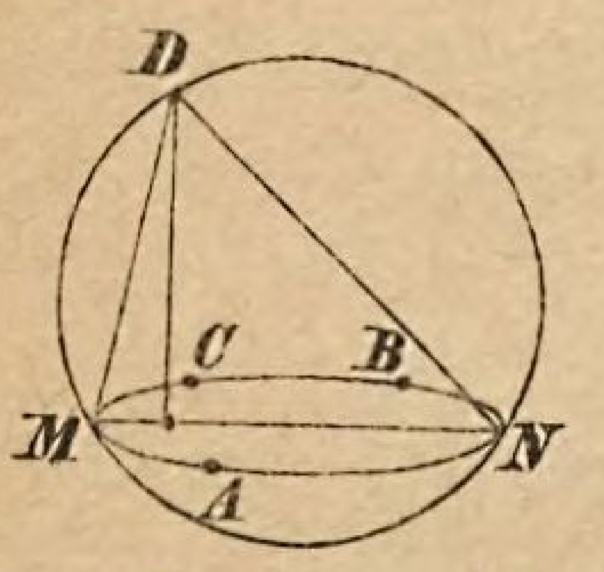
$$6DA_1B_1C_1 = 2A_1B_1C_1.h_1 = 2\varepsilon\frac{p^2}{q^2}\frac{p}{2r} = \frac{\varepsilon}{r}\frac{p^3}{q^2}$$

folglich

$$6DABC = \varepsilon : r$$

Anmerkung. Bezeichnet man den Abstand der Ebene $ABC$ von dem Punct $D$ durch $h$, so hat man

$$6DABC = 2h.ABC = \varepsilon : r, \quad 2rh.ABC = \varepsilon$$




Zieht man den Hauptkreis durch $D$, welcher den Kreis $ABC$ in $M$ und $N$ normal schneidet, so liegt die durch $h$ bezeichnete Normale der Ebene $ABC$ auf der Ebene $DMN$, und von den Strecken $DM$, $DN$ ist eine die kürzeste, die andere die längste unter den Strecken, welche von dem Punct $D$ bis an den Umfang des Kreises $ABC$ reichen (Stereom. §. 2, 7). Weil aber das Dreieck $DMN$ einem Hauptkreise eingeschrieben ist, so hat man nach Planim. §. 14, 24

*) Der Radius der Kugel ist aus den Elementen des eingeschriebenen Tetraeders von Jungius (s. dessen Biographie von Guhrauer 1850 p. 297), Lagrange Pyram. 21, Legendre Géom. Note V, Carnot Mém. sur la relation . . . 12 berechnet worden. In Carnot's Formel und in der davon nicht wesentlich verschiedenen Formel Crelle's (math. Aufsätze I p. 117) ist der obige Satz enthalten, welchen Staudt Crelle J. 57 p. 88 geometrisch in der hier mitgetheilten Art bewiesen hat.

$$DM.DN = 2rh$$

folglich $DM.DN.ABC = \varepsilon$, wie Planim. §. 14, 26.

**19.** Die Volume von zwei gegebenen Polyedern $AA_1A_2A_3$ .. und $BB_1B_2B_3$ .. werden durch $\alpha$ und $\beta$ bezeichnet, eine der Strecken $AA_1$, $AA_2$, .. durch $AA$ , eine der Strecken $BB_1$, $BB_2$, .. durch $BB_r$, und das Product $AA_p . BB_r \cos_{pr}$ durch $c_{pr}$ (13). Das Product $36\alpha\beta$ kann durch Producte von jedesmal 3 Größen wie $c_{pr}$ ausgedrückt werden, und das Product $288\alpha\beta$ ist eine ganze Function der Quadrate von den Strecken, welche die Spitzen des einen Polyeders mit den Spitzen des andern verbinden.*)

Beweis. Man construire durch $A$ die Normalen $t$, $u$, $v$ der Flächen $BB_2B_3$, $BB_3B_1$, $BB_1B_2$ des Tetraeders $BB_1B_2B_3$, und auf diesen Normalen die Kanten $AT$, $AU$, $AV$ des Parallelepipeds, dessen Diagonale $AA_3$ ist, so daß die Kugelschnitte der Ecke $A$ des Parallelepipeds und der Ecke $B$ des Tetraeders sphärische Polarfiguren sind. Bezeichnet man die Normale der Fläche $AA_1A_2$ durch $n$, und die Geraden, deren Strecken $AA_3$, $BB_3$ sind, durch $a$, $b$, so ist (14)

$$3AA_1A_2V = AA_1A_2 . AV \cos nv$$

$$3BB_1B_2B_3 = BB_1B_2 . BB_3 \cos bv$$

Die Diagonale $AA_3$ kann aus den Kanten $AT$, $AU$, $AV$ durch parallele Verschiebung derselben zusammengesetzt werden. Weil aber $AT$ und $AU$ normal zu den Ebenen $BB_2B_3$ und $BB_3B_1$ sind, so sind sie normal zu der Geraden $BB_3$, mithin haben $AA_3$ und $AV$ auf $b$ gleiche Normalprojectionen, d. h.

$$AA_3 \cos ab = AV \cos bv$$

Folglich erhält man

$$9AA_1A_2V . BB_1B_2B_3 = AA_1A_2 . BB_1B_2 \cos nv . AA_3 . BB_3 \cos ab$$

Nach der festgesetzten Bezeichnung ist aber (13)

$$4AA_1A_2 . BB_1B_2 \cos nv = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$$

folglich

$$36AA_1A_2V . BB_1B_2B_3 = (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})c_{33}$$

Hieraus erhält man durch Vertauschung von $B_1B_2B_3$ mit $B_2B_3B_1$, $t$, $u$, $v$ mit $u$, $v$, $t$, und die entsprechende Vertauschung der auf die Puncte $B$ sich beziehenden Numern der Größen $c$

$$36AA_1A_2T . BB_2B_3B_1 = (c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22})c_{31}$$

und eben so

---

*) Staudt Crelle J. 24 p. 255. Vergl. des Verf. Determ. §. 16, 13.

$$36 AA_1A_2U . BB_3B_1B_2 = (c_{13}c_{21} - c_{11}c_{23})c_{32}$$

Nun ist $BB_1B_2B_3 = BB_2B_3B_1 = BB_3B_1B_2$, und

$$AA_1A_2T + AA_1A_2U + AA_1A_2V = AA_1A_2A_3$$

nach Stereom. §. 8, 14, folglich

$$36 AA_1A_2A_3 . BB_1B_2B_3$$

$$= (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})c_{33} + (c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22})c_{31} + (c_{13}c_{21} - c_{11}c_{23})c_{32}$$

Indem man auf gleiche Weise jedes Tetraeder des ersten Polyeders mit jedem Tetraeder des zweiten Polyeders verbindet, erhält man den ersten Theil des ausgesprochenen Lehrsatzes. Der zweite Theil desselben ergiebt sich, wenn man die Größen $2c_{pr}$ durch Quadrate von Strecken ausdrückt wie 13, Anm.

Eine ähnliche Darstellung von $(36\alpha\beta)^2$ durch Producte von Flächenpaaren mit dem Cosinus ihrer Winkel findet man in des Verf. Determinanten §. 16, 16.

Wenn die Puncte $B$, $B_1$, $B_2$, .. mit den Puncten $A$, $A_1$, $A_2$, .. der Reihe nach zusammenfallen, so wird $288\alpha^2$ eine ganze Function der Quadrate von den Strecken, welche die Spitzen des Polyeders verbinden. Für das Tetraeder ist $144\alpha^2$ durch die Quadrate der Kanten von Jungius und Euler ausgedrückt worden (14).

## §. 7. Die projectivischen Formeln.

1. Wenn die Puncte $A$, $B$, $C$ auf einer Geraden liegen, so heißt in dem Folgenden die Formel $AC : BC$ das Verhältniß, nach welchem die Strecke $AB$ in $C$ getheilt ist (Planim. §. 8, 2). Dieses Verhältniß hat einen positiven oder einen negativen Werth, je nachdem die Strecken $AC$ und $BC$ einerlei Zeichen (Richtung) haben oder nicht (Planim. §. 14, 1), je nachdem also der Punct $C$ von der Strecke $AB$ ausgeschlossen oder eingeschlossen ist. Durch das Verhältniß wird in Bezug auf zwei Puncte der dritte eindeutig bestimmt. Wenn das Verhältniß $AC : BC$ den Werth 1 hat, so ist $C$ unendlich fern, weil

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AB + BC}{BC} = \frac{AB}{BC} + 1$$

den Werth 1 erreicht, während $AB : BC$ verschwindet. Wenn $AC : BC$ den Werth $-1$ hat, so ist $C$ die Mitte von $AB$.

Wenn die Gerade $AB$ durch die Gerade der Strecke $PQ$ in $C$ geschnitten wird, so ist das Verhältniß der Flächen

$$APQ : BPQ = AC : BC$$

Denn die Dreiecke $APQ$ und $BPQ$ haben die Basis $PQ$ gemein, und das Verhältniß ihrer Höhen ist $= AC : BC$ (Planim. §. 10, 2).

Wenn die Gerade $AB$ durch die Ebene des Dreiecks $PQR$ in $C$ geschnitten wird, so ist das Verhältniß der Volume

$$APQR : BPQR = AC : BC$$

Denn die Tetraeder $APQR$ und $BPQR$ haben die Basis $PQR$ gemein, und das Verhältniß ihren Höhen ist $= AC : BC$ (Stereom. §. 8, 11). Dabei haben die Dreiecke $APQ$ und $BPQ$, wie die Tetraeder $APQR$ und $BPQR$ dieselben oder entgegengesetzte Zeichen, je nachdem die Strecke $AB$ durch die Gerade $PQ$ und die Ebene $PQR$ außen oder innen getheilt wird.

Wenn ein beliebiger Punct durch $S$, und die Geraden, welche denselben mit den Puncten $A$, $B$, $C$ einer Geraden verbinden, durch $a$, $b$, $c$ bezeichnet werden, so ist

$$AC : BC = SAC : SBC = (\sin ac : \sin bc)(SA : SB)$$

Denn nach beliebiger Wahl der positiven Richtungen von $a$, $b$, $c$ hat man $2SAC = SA . SC \sin ac$ (§. 4, 12) u. s. w.

Wenn überhaupt die Geraden $a$, $b$, $c$ auf einer Ebene liegen oder mit einer Ebene parallel sind, so heißt die Formel $\sin ac : \sin bc$ das Verhältniß der Sinus, nach welchem der Winkel $ab$ durch $c$ oder eine mit $c$ parallele Gerade getheilt ist. Dieses Verhältniß hat den Werth $-1$ oder $1$, wenn $c$ den Winkel $ab$ oder seinen Nebenwinkel halbirt. Durch das Verhältniß $\sin ac : \sin bc$ wird in Bezug auf die Geraden $a$, $b$ die ihren gemeinschaftlichen Punct enthaltende Gerade $c$ eindeutig bestimmt, wie der Punct $C$ der Geraden $AB$ durch das Verhältniß $AC : BC$. In der That ist (§. 4, 9)

$$\frac{\sin ac}{\sin bc} = \frac{\sin(ab + bc)}{\sin bc} = \sin ab\,(\cot bc + \cot ab)$$

Wenn nun $\sin ac' : \sin bc' = \sin ac : \sin bc$ ist, so ist $\cot bc' = \cot bc$, folglich $c'$ mit $c$ parallel.

Das Verhältniß, nach welchem $AB$ in $C$ durch die Gerade $PQ$ oder die Ebene $PQR$ getheilt ist, wird im Folgenden durch die Formeln

$$(A,\ B,\ C),\quad (A,\ B,\ PQ),\quad (A,\ B,\ PQR)$$

bezeichnet*), ebenso die Formel $\sin ac : \sin bc$ durch $(a, b, c)$. Die Werthe $(A, B, C)$ und $(B, A, C)$, $(a, b, c)$ und $(b, a, c)$ sind reciprok.

---

*) Vergl. Möbius baryc. Calc. 180 ff.

2. Wenn $O$ einen beliebigen Punct der Geraden $AB$ bedeutet, so haben die Verhältnisse, nach denen $OA$ in $B$ und und $OB$ in $A$ getheilt wird, die Summe 1.

$$(O, A, B) + (O, B, A) = 1$$

Wenn $O$ einen beliebigen Punct der Ebene $ABC$ bedeutet, so haben die Verhältnisse, nach denen $OA$, $OB$, $OC$ der Reihe nach durch die Geraden $BC$, $CA$, $AB$ getheilt werden, die Summe 1.

$$(O, A, BC) + (O, B, CA) + (O, C, AB) = 1$$

Wenn $O$ einen beliebigen Punct des Raumes und $ABCD$ ein gegebenes Tetraeder bedeutet, so haben die Verhältnisse, nach denen $OA$, $OB$, $OC$, $OD$ der Reihe nach durch die Ebenen $BDC$, $CDA$, $ADB$, $ABC$ getheilt werden, die Summe 1.*)

$$(O, A, BDC) + (O, B, CDA) + (O, C, ADB) + (O, D, ABC) = 1$$

Beweis. Wenn $O$ auf der Geraden $AB$ liegt, so ist $AO + OB = AB$ (Planim. §. 14, 1), folglich

$$\frac{AO}{AB} + \frac{OB}{AB} = 1 = \frac{OB}{AB} + \frac{OA}{BA}$$

Wenn $O$ auf der Ebene $ABC$ liegt und die Geraden $OA$, $OB$, $OC$ von den Geraden $BC$, $CA$, $AB$ in $A'$, $B'$, $C'$ geschnitten werden, so hat man (1)

$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{OBC}{ABC'}\quad \frac{OB'}{BB'} = \frac{OCA}{BCA'}\quad \frac{OC'}{CC'} = \frac{OAB}{CAB}$$

Nun ist $OBC + OCA + OAB = ABC = BCA = CAB$ (Planim. §. 9, 9), folglich

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1$$

Wenn die Geraden $OA$, $OB$, $OC$, $OD$ von den Ebenen $BDC$, $CDA$, $ADB$, $ABC$ in $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ geschnitten werden, so hat man (1)

$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{OBDC}{ABDC}, \text{ u. s. w.}$$

Nun ist $OBDC + OCDA + OADB + OABC = DABC = ABDC = ..$ (Stereom. §. 8, 15), folglich

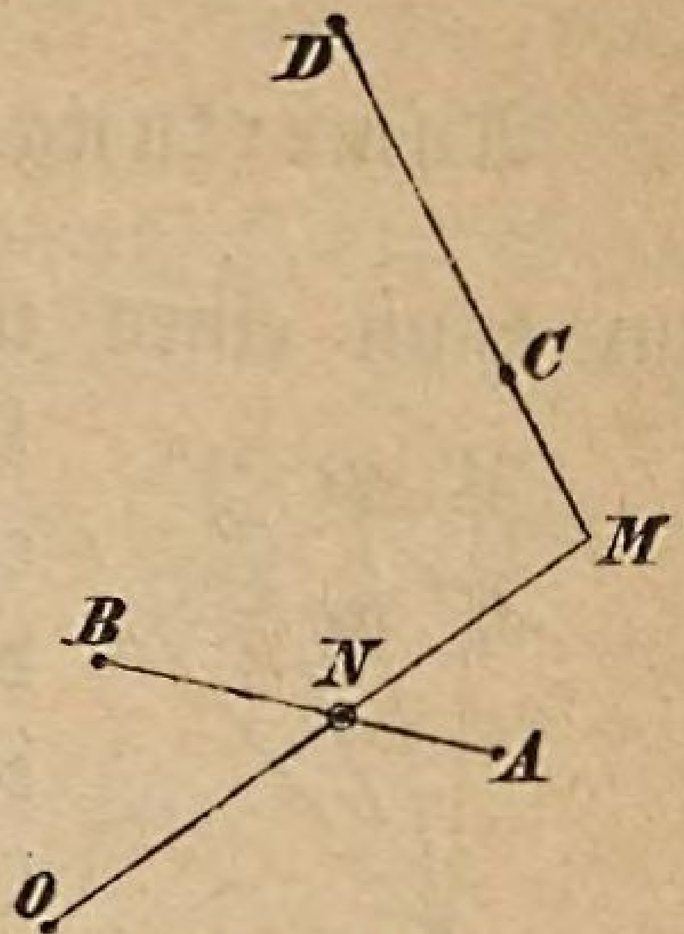
$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = 1$$

---

*) Der zweite Satz ist von Euler 1780 gegeben worden (Mém. de Petersb. Tom. V. 1812 p. 96). Der dritte Satz kommt in Gerg. Ann. 9 p. 116 und 277 vor. Vergl. Möbius baryc. Calc. 160 und Chasles Aperçu hist. p. 302 d. Uebers.

Es mag nicht unbemerkt bleiben, daß der dritte Satz aus den beiden ersten abgeleitet werden kann. Die Gerade $CD$ hat mit der Ebene $OAB$ den Punct $M$ gemein, so daß

$$(O,\ A,\ BM) + (O,\ B,\ MA) + (O,\ M,\ AB) = 1$$




Zugleich hat die Gerade $OM$ mit der Geraden $AB$ den Punct $N$ gemein, so daß

$$(O,\ C,\ DN) + (O,\ D,\ NC) + (O,\ N,\ CD) = 1$$

Nun ist $(O,\ M,\ AB) = (O,\ M,\ N)$, $(O,\ N,\ CD) = (O,\ N,\ M)$, und $(O,\ M,\ N) + (O,\ N,\ M) = 1$ folglich

$$(O,\ A,\ BDC) + (O,\ B,\ CDA) + (O,\ C,\ ADB) + (O,\ D,\ ABC) = 1$$

Anmerkung. Weil $(O,\ BC,\ A) = 1 - (O,\ A,\ BC)$, u. s. w., so ist in der angegebenen Weise

$$(O,\ BC,\ A) + (O,\ CA,\ B) + (O,\ AB,\ C) = 2$$

$$(O,\ BDC,\ A) + (O,\ CDA,\ B) + (O,\ ADB,\ C) + (O,\ ABC,\ D) = 3$$

3. Wenn auf einer Kugel, deren Radius eine Längeneinheit ist, $O$ einen beliebigen Punct des Hauptkreises $AB$ bedeutet, so ist $AO + OB = AB$, folglich (§. 4, 9)

$$\frac{\sin OB}{\sin AB} \cos OA + \frac{\sin OA}{\sin BA} \cos OB = 1$$

Wenn $O$ einen beliebigen Punct der Kugel bedeutet, und die Seiten $BC$, $CA$, $AB$ eines sphärischen Dreiecks von den Hauptkreisen $OA$, $OB$, $OC$ in $A'$, $B'$, $C'$ geschnitten werden, wenn man ferner durch $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$ die Centralprojectionen von $A$, $B$, $C$, $A'$, $B'$, $C'$ auf die Ebene bezeichnet, welche die Kugel in $O$ berührt, so ist (2)

$$\frac{Oa'}{aa'} + \frac{Ob'}{bb'} + \frac{Oc'}{cc'} = 1\,, \quad \frac{Oa}{a'a} + \frac{Ob}{b'b} + \frac{Oc}{c'c} = 2$$

Nun ist $Oa = \operatorname{tang} Oa$ (§. 3, 10), $aa' = aO + Oa'$ u. s. w., folglich

$$\frac{\operatorname{tang} OA'}{\operatorname{tang} AO + \operatorname{tang} OA'} + \frac{\operatorname{tang} OB'}{\operatorname{tang} BO + \operatorname{tang} OB'} + \frac{\operatorname{tang} OC'}{\operatorname{tang} CO + \operatorname{tang} OC'} = 1$$

$$\frac{\operatorname{tang} OA}{\operatorname{tang} A'O + \operatorname{tang} OA} + \frac{\operatorname{tang} OB}{\operatorname{tang} B'O + \operatorname{tang} OB} + \frac{\operatorname{tang} OC}{\operatorname{tang} C'O + \operatorname{tang} OC} = 2$$

Diese Gleichungen können nach §. 4, 9 umgeformt werden und lauten dann:

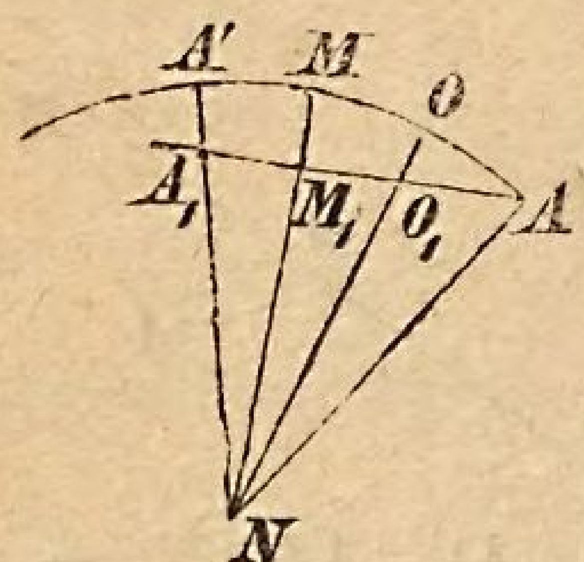
$$\frac{\sin OA'}{\sin AA'} \cos OA + \frac{\sin OB'}{\sin BB'} \cos OB + \frac{\sin OC'}{\sin CC'} \cos OC = 1$$

$$\frac{\sin OA}{\sin A'A} \cos OA' + \frac{\sin OB}{\sin B'B} \cos OB' + \frac{\sin OC}{\sin C'C} \cos OC = 2$$

Als Differenz dieser Gleichungen ergiebt sich*)

$$\frac{\sin(AO + A'O)}{\sin AA'} + \frac{\sin(BO + B'O)}{\sin BB'} + \frac{\sin(CO + C'O)}{\sin CC'} = 1$$

Anmerkung. Die Summe $\frac{\sin OA'}{\sin AA'} + \frac{\sin OB'}{\sin BB'} + \frac{\sin OC'}{\sin CC'}$ behält nur dann einen unveränderlichen Werth, wenn der Punct $O$ auf der Kugel einen Kreis beschreibt, der mit dem Kreise $ABC$ concentrisch (parallel) ist.**) Man bezeichne durch $M$ das sphärische Centrum des Kreises $ABC$, durch $N$ das Centrum der Kugel, durch $O_1$, $A_1$, $B_1$, $C_1$ die Centralprojectionen von $O$, $A'$, $B'$, $C'$ auf die Ebene $ABC$. Dann ist (2)




$$\frac{O_1A_1}{AA_1} + \frac{O_1B_1}{BB_1} + \frac{O_1C_1}{CC_1} = 1$$

Nach (1) hat man $O_1A_1 : AA_1 = (\sin OA' : \sin AA')(NO_1 : NA)$, u. s. w., folglich

$$\frac{\sin OA'}{\sin AA'} + \frac{\sin OB'}{\sin BB'} + \frac{\sin OC'}{\sin CC'} = \frac{NA}{NO_1}$$

Also hat die Summe $\frac{\sin OA'}{\sin AA'} + ..$ einen unveränderlichen Werth, wenn $O_1$ einen unveränderlichen Abstand von $N$ behält, d. h. wenn $NO_1$ einen Rotationskegel beschreibt, dessen Axe $NM$ ist, und wenn $O$ einen Kreis beschreibt, dessen sphärisches Centrum $M$ ist. Dabei ist

$$NM_1 = NA \cos AM = NO_1 \cos OM$$

$$\frac{\sin OA'}{\sin AA'} + \frac{\sin OB'}{\sin BB'} + \frac{\sin OC'}{\sin CC'} = \frac{\cos OM}{\cos AM}$$

**4.** Eine gegebene Figur $ABCD$ .. werde aus einem beliebigen Centrum $S$ sowohl auf eine beliebige Ebene, als auch auf die Kugel projicirt, deren Centrum $S$ und deren Radius eine Längeneinheit ist. Die sphärische Projection der gegebenen Figur wird durch $A'B'C'D'$ .., die plane Projection durch $A''B''C''D''$ .. bezeichnet. Wenn der Punct $M$ der gegebenen Figur auf der Geraden $AB$ liegt, so liegt seine sphärische Projection $M'$ auf dem Hauptkreis $A'B'$ und seine plane Projection $M''$ auf der Geraden $A''B''$ dergestalt, daß (1)

$$\frac{AM}{BM} = \frac{\sin A'M'}{\sin B'M'} \frac{SA}{SB}, \quad \frac{A''M''}{B''M''} = \frac{\sin A'M'}{\sin B'M'} \frac{SA''}{SB''}$$

---

*) Euler a. a. O. Gudermann nied. Sphärik 394.
**) Steiner Crelle J. 2 p. 190. Gudermann nied. Sphärik 393.

Aus den Verhältnissen, nach denen Strecken der gegebenen Figur getheilt sind, können nun Formeln gebildet werden, deren Werth von den Abständen $SA$, $SB$, . . unabhängig ist. Solche Formeln heißen projectivisch*), in Betracht daß sie ihren Werth behalten, wenn man die Figur, auf welche sie sich beziehn, durch eine plane Centralprojection der Figur, oder jede Strecke der Formel durch den Sinus ihrer sphärischen Centralprojection ersetzt. Z. B. Wenn die Puncte $M$ und $N$ auf der Geraden $AB$ liegen, so ist die Formel $\frac{AM}{BM}\frac{BN}{AN}$ projectivisch, weil

$$\frac{AM}{BM}\frac{BN}{AN}=\frac{\sin A'M'}{\sin B'M'}\frac{\sin B'N'}{\sin A'N'}=\frac{A''M''}{B''M''}\frac{B''N''}{A''N''}$$

Wenn auf den Seiten $AB$, $BC$, $CD$, . ., $FA$ eines Polygons der Reihe nach die Puncte $M$, $N$, $O$, . ., $R$ liegen, so ist

$$\frac{AM}{BM}\frac{BN}{CN}\cdot\cdot\frac{FR}{AR}=\frac{\sin A'M'}{\sin B'M'}\frac{\sin B'N'}{\sin C'N'}\cdot\cdot\frac{\sin F'R'}{\sin A'R'}=\frac{A''M''}{B''M''}\frac{B''N''}{C''N''}\cdot\cdot\frac{F''R''}{A''R''}$$

eine projectivische Formel.**) Der Werth einer projectivischen Formel kann aus einer besondern Projection der Figur abgeleitet werden, von welcher gewisse Puncte in unendliche Ferne fallen.

Wenn $OP$ das harmonische Mittel (Algebra §. 1, 9) der $n$ Strecken $OA$, $OB$, $OC$, . . einer Geraden ist, so hat man

$$n=\frac{OP}{OA}+\frac{OP}{OB}+\frac{OP}{OC}+\cdot\cdot$$

oder nach Subtraction der einzelnen Quotienten von $1=\frac{OA}{OA}=$ . .

$$\frac{PA}{OA}+\frac{PB}{OB}+\frac{PC}{OC}+\cdot\cdot=0$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\frac{\sin P'A'}{\sin O'A'}+\frac{\sin P'B'}{\sin O'B'}+\frac{\sin P'C'}{\sin O'C'}+\cdot\cdot=0$$

$$\frac{P''A''}{O''A''}+\frac{P''B''}{O''B''}+\frac{P''C''}{O''C''}+\cdot\cdot=0$$

d. h. die gegebene Gleichung ist projectivisch, $O''P''$ ist das harmonische Mittel von $O''A''$, $O''B''$, $O''C''$, . . .***)

---

*) Poncelet propr. proj. 5 und Crelle J. 3 p. 213.
**) Ein Vielecksschnittsverhältniß nach Möbius baryc. Calc. 215.
***) Poncelet Crelle J. 3 p. 235. Allgemeiner Graßmann Crelle J. 24 p. 273.

5. Das Product der Verhältnisse (der Sinus-Verhältnisse), nach denen die Seiten $AB$, $BC$, $CA$ eines geradlinigen (sphärischen) Dreiecks durch die Geraden (Hauptkreise) getheilt werden, welche einen beliebigen Punct $O$ der Ebene (Kugel) $ABC$ mit den Puncten $C$, $A$, $B$ verbinden, hat den Werth — 1.*)

Beweis. Bei dem planen Viereck $ABCO$ ist (1)

$$(A,\ B,\ CO)(B,\ C,\ AO)(C,\ A,\ BO) = \frac{ACO}{BCO}\frac{BAO}{CAO}\frac{CBO}{ABO} = -1$$

weil $ACO = -CAO$, u. s. w.

Bezeichnet man die Theilpuncte von $BC$, $CA$, $AB$ durch $P$, $Q$, $R$, und eine sphärische Centralprojection der Puncte $A$, $B$, . . (4) durch $A'$, $B'$, . . so ist

$$\frac{BP}{CP}\frac{CQ}{AQ}\frac{AR}{BR} = \frac{\sin B'P'}{\sin C'P'}\frac{\sin C'Q'}{\sin A'Q'}\frac{\sin A'R'}{\sin B'R'}$$

eine projectivische Formel. Um den Werth derselben zu finden, projicire man die Figur aus einem beliebigen Punct $S$ auf eine Ebene, die mit $QRS$ parallel ist. In der Projection $A''B''$ . . ist $C''\ A''$ mit $B''\ O''$ und $A''B''$ mit $O''C''$ parallel, weil die Puncte $Q''$ und $R''$ unendlich fern sind. Daher ist das Viereck $C''A''B''O''$ ein Parallelogramm und

$$\frac{BP}{CP}\frac{CQ}{AQ}\frac{AR}{BR} = \frac{B''P''}{C''P''} = -1$$

Umgekehrt schließt man: Wenn die plane Formel

$$\frac{BP}{CP}\frac{CQ}{AQ}\frac{AR}{BR}$$

oder die sphärische Formel

$$\frac{\sin BP}{\sin CP}\frac{\sin C\,Q}{\sin A\,Q}\frac{\sin AR}{\sin BR}$$

den Werth — 1 hat, so bilden die Geraden (Hauptkreise) $AP$, $BQ$, $CR$ einen Büschel d. h. sie gehn durch einen Punct. Wird $AP$ von $BQ$ in $O$, $AB$ von $CO$ in $R'$ geschnitten, so ist

$$\frac{BP}{CP}\frac{CQ}{AQ}\frac{AR'}{BR'} = -1$$

folglich $\frac{BP}{CP}\frac{CQ}{AQ}\frac{AR}{BR}$ von — 1 verschieden, gegen die Voraussetzung. U. s. w.

*) Giov. Ceva de lineis se invicem secantibus, Mediol. 1678. Vergl. Chasles Ap. hist. p. 299 d. Uebers. Die Auffassung des Products von Theilungs-Verhältnissen und die Bestimmung der Zeichen rührt von Möbius her. Baryc. Calc. 198.

Anwendungen. Wenn die Seiten $BC$, $CA$, $AB$ eines geradlinigen (sphärischen) Dreiecks einen Kreis in $P$, $Q$, $R$ berühren, so bilden die Geraden (Hauptkreise) $AP$, $BQ$, $CR$ einen Büschel.*) Denn unter den Strecken $BC$, $CA$, $AB$ werden drei oder eine durch die Berührungspuncte $P$, $Q$, $R$ innen getheilt. Nun ist $AR = AQ$ u. s. w. Derselbe Satz gilt für Centralprojectionen der Planfigur auf eine Ebene, sowie für stereographische Projectionen der sphärischen Figur (Stereom. §. 5, 20).

Wenn $AP$, $BQ$, $CR$ den Perimeter des geradlinigen oder sphärischen Dreiecks $ABC$ halbiren, so sind $P$, $Q$, $R$ die Berührungspuncte des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises; folglich bilden $AP$, $BQ$, $CR$ einen Büschel.

In dem sphärischen wie im geradlinigen Dreieck $ABC$ bilden $AP$, $BQ$, $CR$ einen Büschel, wenn $P$, $Q$, $R$ die Mitten der Seiten sind**), oder wenn $AP$, $BQ$, $CR$ die Fläche halbiren.***) Denn man hat in dem ersten Falle $\sin BP : \sin CP = -1$, u. s. w. In dem zweiten Falle ist zufolge der Gleichung $ARC = CRB$ (§. 5, 13)

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AR}{\sin\frac{1}{2}RB} = \frac{\cos\frac{1}{2}CA}{\cos\frac{1}{2}BC}$$

u. s. w., folglich

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AR}{\sin\frac{1}{2}RB}\,\frac{\sin\frac{1}{2}BP}{\sin\frac{1}{2}PC}\,\frac{\sin\frac{1}{2}CQ}{\sin\frac{1}{2}QA} = 1$$

Zugleich folgt aus der Gleichung der Flächen $CAR$ und $QAB$ (§. 5, 14)

$$\cot\tfrac{1}{2}CA\,\cot\tfrac{1}{2}AR = \cot\tfrac{1}{2}QA\,\cot\tfrac{1}{2}AB, \text{ u. s. w.}$$

$$\frac{\cot\frac{1}{2}AR}{\cot\frac{1}{2}RB}\,\frac{\cot\frac{1}{2}BP}{\cot\frac{1}{2}PC}\,\frac{\cot\frac{1}{2}CQ}{\cot\frac{1}{2}QA} = 1$$

Indem man das Quadrat der ersten Gleichung mit der zweiten Gleichung multiplicirt, findet man

$$\frac{\sin AR}{\sin RB}\,\frac{\sin BP}{\sin PC}\,\frac{\sin CQ}{\sin QA} = 1, \quad \frac{\sin AR}{\sin BR}\,\frac{\sin BP}{\sin CP}\,\frac{\sin CQ}{\sin AQ} = -1$$

**6.** Das Product der Verhältnisse, nach denen die Seiten eines Polygons durch eine Gerade oder eine Ebene getheilt werden, ist 1. Denselben Werth hat das Product der Sinus-Verhältnisse nach denen

---

*) Ceva.

**) Schulz Sphärik II, 52.

***) Steiner Crelle J. 2 p. 52. Gudermann Crelle J. 8 p. 368 und nied. Sph. 192.

die Seiten eines sphärischen Polygons durch einen Hauptkreis getheilt werden.*)

Beweis. Wenn $ABC$ ein geradliniges Dreieck und $MN$ eine Gerade seiner Ebene ist, so hat man (1)

$$(A,\ B,\ MN)(B,\ C,\ MN)(C,\ A,\ MN) = \frac{AMN}{BMN}\frac{BMN}{CMN}\frac{CMN}{AMN} = 1$$

u. s. w. Wenn $ABCD$ ein unebenes Viereck und $MNO$ eine beliebige Ebene ist, so findet man

$$(A,\ B,\ MNO)(B,\ C,\ MNO)(C,\ D,\ MNO)(D,\ A,\ MNO) = 1$$

indem man $(A,\ B,\ MNO), \ldots$ durch Tetraederverhältnisse ausdrückt (1), u. s. w.

Bezeichnet man die Theilpuncte von $AB,\ BC, \ldots$ durch $P,\ Q, \ldots$, und eine sphärische Centralprojection der Puncte $A,\ B, \ldots$ durch $A',\ B', \ldots$ (4), so ist

$$\frac{AP}{BP}\frac{BQ}{CQ}\ldots = \frac{\sin A'P'}{\sin B'P'}\frac{\sin B'Q'}{\sin C'Q'}\ldots$$

eine projectivische Formel. Um den Werth derselben zu finden, projicire man die Figur aus einem beliebigen Punct der Ebene $MNO$ auf eine Ebene, die mit $MNO$ parallel ist. In der Projection $A''B'' \ldots$ sind die Puncte $P'',\ Q'', \ldots$ unendlich fern, also hat die projectivische Formel den Werth 1.

Umgekehrt schließt man: Wenn das Product der Verhältnisse (der Sinus-Verhältnisse), nach denen die Seiten eines ebenen oder unebenen (sphärischen) $n$Ecks getheilt sind, den Werth 1 hat, und wenn $n - 1$ Theilpuncte auf einer Geraden oder einer Ebene (einem Hauptkreise) liegen, so liegt auch der letzte Theilpunct auf derselben Geraden oder Ebene (Hauptkreis). Vergl. 5.

Anwendungen. Wenn auf $BC,\ CA,\ AB$ die Puncte $P,\ Q,\ R$ liegen, wenn man die Geraden, auf welchen $BC,\ CA,\ AB,\ AP,\ BQ,\ CR$ liegen, durch $f,\ g,\ h,\ p,\ q,\ r$ bezeichnet, und wenn man

$$m = \frac{BP}{CP}\frac{CQ}{AQ}\frac{AR}{BR},\quad \mu = \frac{\sin gp}{\sin hp}\frac{\sin hq}{\sin fq}\frac{\sin fr}{\sin gr}$$

setzt, so ist $m\mu = -1$, weil (1)

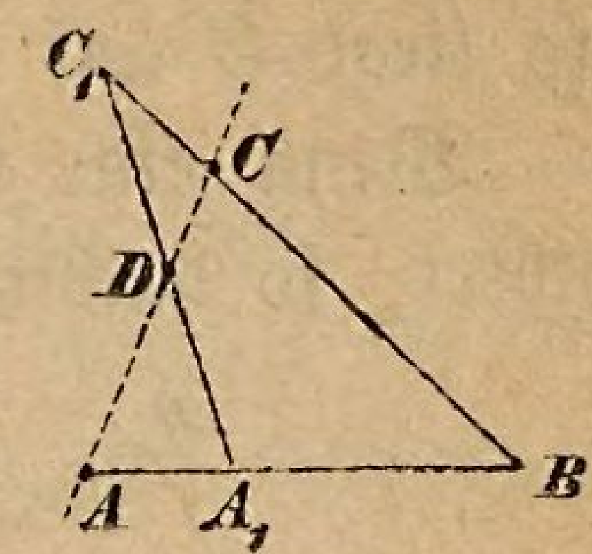
$$BP : CP = (\sin hp : \sin gp)(AB : AC),\ \text{u. s. w.}$$

In dem Falle, daß die Geraden $AP,\ BQ,\ CR$ durch einen Punct gehn,

---

*) Menelaus Sphaerica III, 1. Dieser Satz bildete, wie man aus dem Almagest I, 9 erkennt, das Fundament der alten sphärischen Trigonometrie. Vergl. Schubert Nov. Act. Petrop. (1796) 12 p. 165. Der ganze Umfang des Satzes ist durch Carnot Transvers. 3 und Möbius baryc. Calc. 198 bestimmt worden.

hat man $m = -1$ (5), folglich $\mu = 1$. In dem Falle, daß die Puncte $P$, $Q$, $R$ auf einer Geraden liegen, hat man $m = 1$, folglich $\mu = -1$.

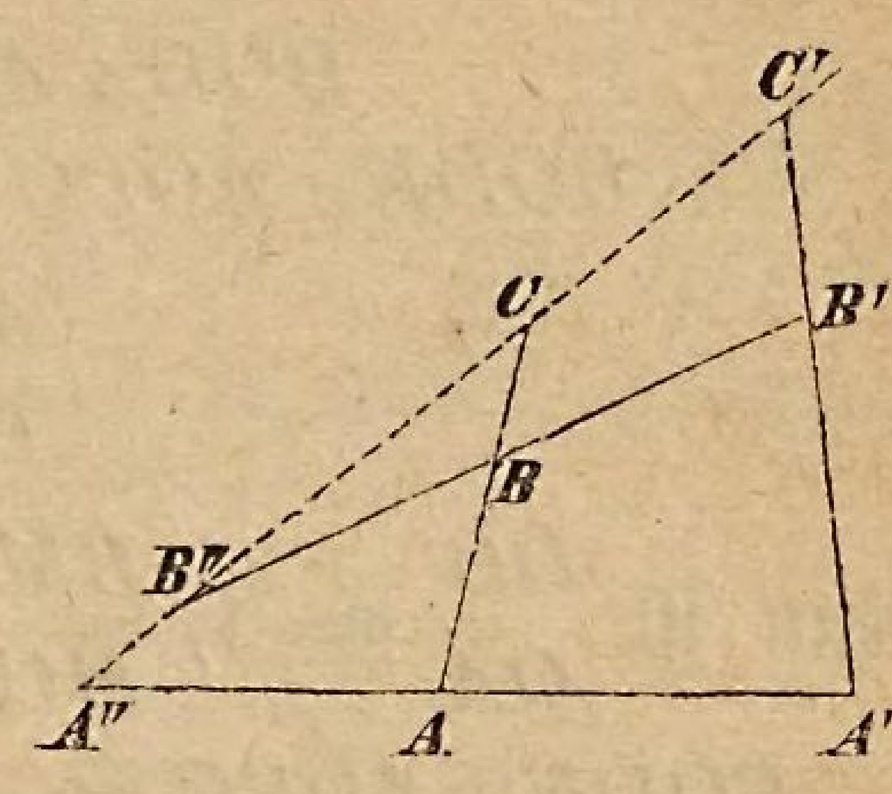



Wenn in einem Dreieck ein Winkel und die Summe (Differenz) der anliegenden Seiten unverändert bleibt, so liegt die Mitte der dritten Seite auf einer bestimmten Geraden.*) Die Seiten $A_1B$, $BC_1$, $C_1A_1$ werden von einer Geraden in $A$, $C$, $D$ so geschnitten, daß

$$\frac{C_1D}{A_1D}\,\frac{A_1A}{BA}\,\frac{BC}{C_1C} = 1$$

Ist nun das Verhältniß $A_1A : C_1C$ gegeben, so ist auch das Verhältniß $C_1D : A_1D$ gegeben, und der Theilpunct $D$ der Seite $C_1A_1$ liegt auf der Geraden $AC$.

Wenn die Verhältnisse gleich sind, nach denen die Strecken $AB$ und $A'B'$ in $C$ und $C'$ durch eine Gerade oder Ebene getheilt werden, so sind auch die Verhältnisse gleich, nach denen die Strecken $AA'$ und $BB'$ in $A''$ und $BB''$ durch dieselbe Gerade oder Ebene getheilt werden.**) Denn man hat

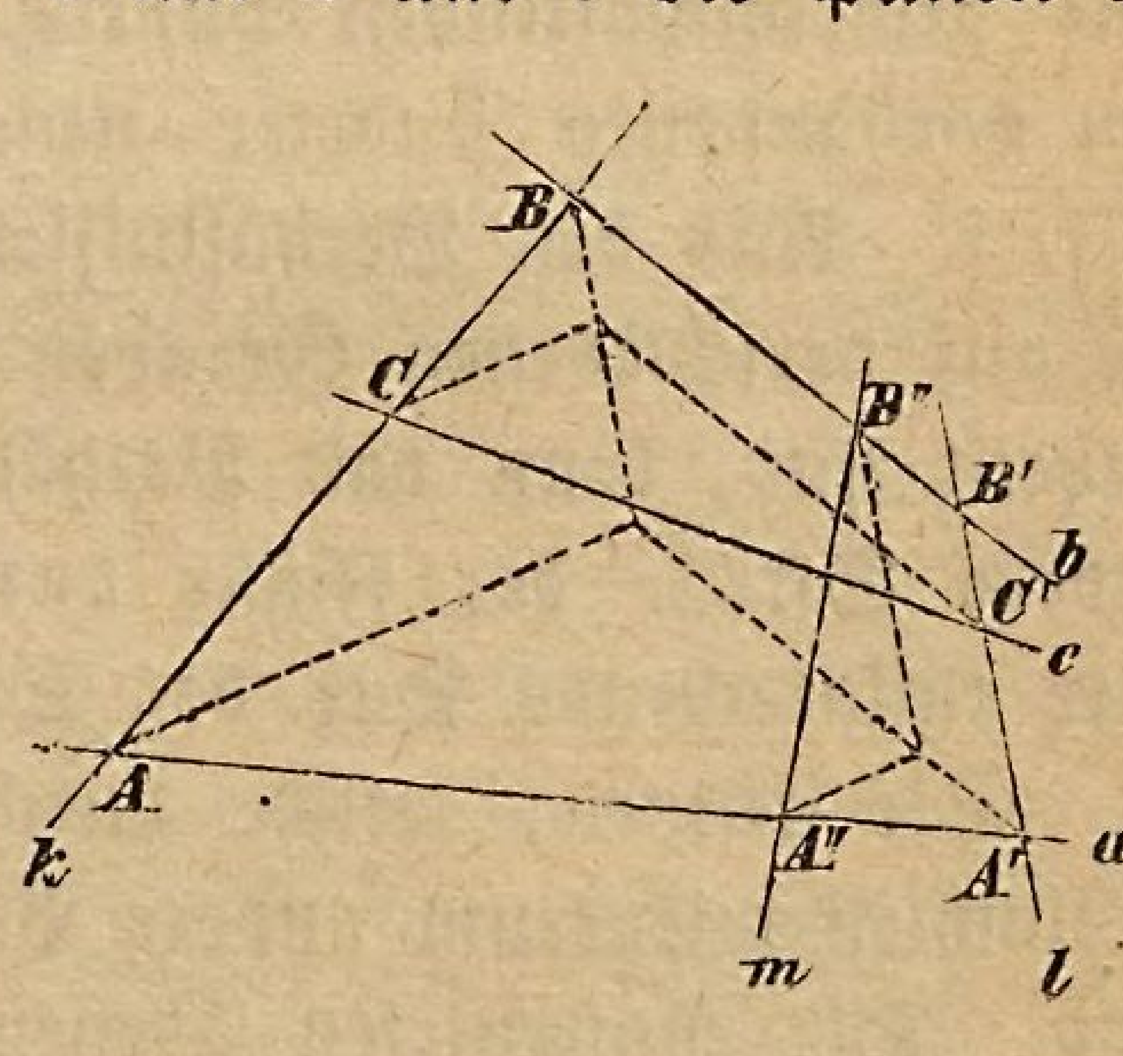



$$\frac{AA''}{A'A''}\,\frac{A'C'}{B'C'}\,\frac{B'B''}{BB''}\,\frac{BC}{AC} = 1$$

Wenn nun $\dfrac{A'C'}{B'C'}\,\dfrac{BC}{AC} = 1$ ist, so ist auch

$$\frac{AA''}{A'A''}\,\frac{B'B''}{BB''} = 1$$

Wenn die Geraden $a$, $b$, $c$ und die Geraden $k$, $l$, $m$ mit je einer Ebene parallel sind, dergestalt daß $a$, $b$, $c$ mit $k$ und $l$ die Puncte $A$, $B$, $C$ und $A'$, $B'$, $C'$, $a$ und $b$ mit $m$ die Puncte $A''$ und $B''$ gemein haben, so hat auch $c$ mit $m$ einen Punct gemein.***) Denn man hat (Stereom. §. 1, 7)




$$\frac{AA''}{A''A'} = \frac{BB''}{B''B'} \text{ und } \frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$$

folglich

---

*) Leibniz Acta Erud. 1685 p. 501. Demonstratio geom. etc. Steiner Crelle J. 24 p. 191. Vergl. Planim. §. 12, 4.

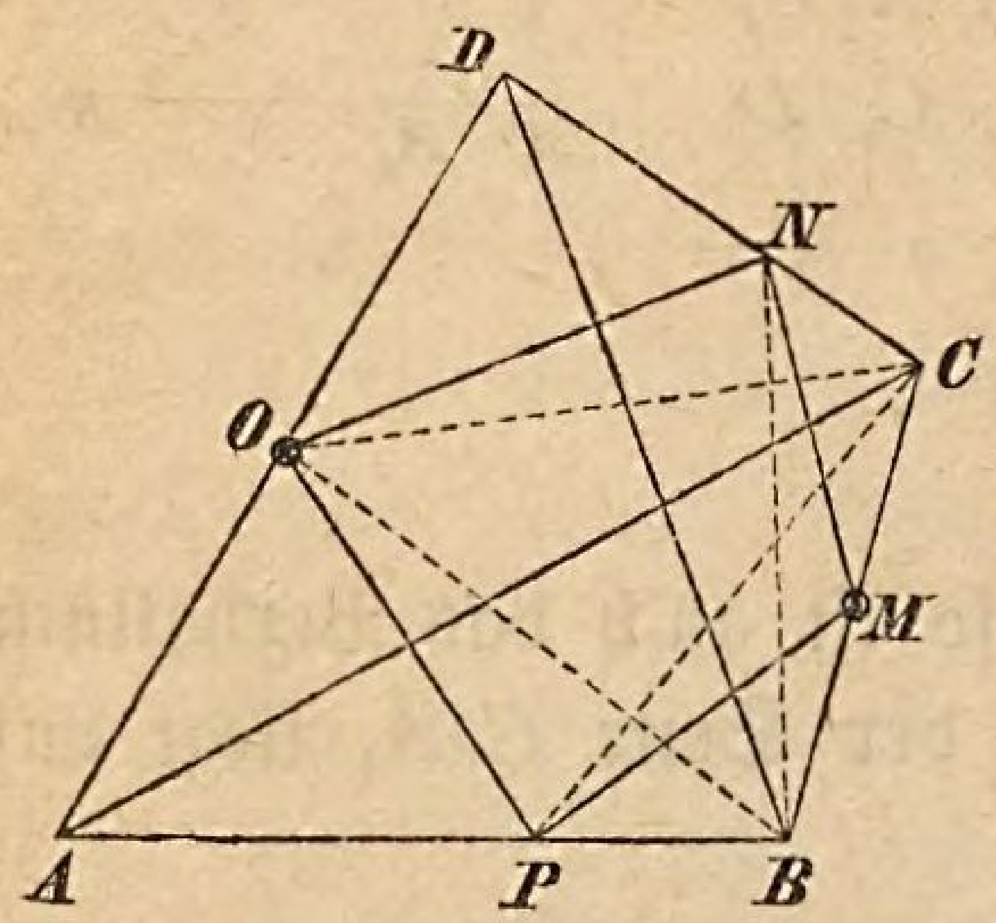
**) Vergl. Planim. §. 12, 4.

***) Auf diesem Satze beruht die zweifache Beschreibung eines geradlinigen Paraboloids. Stereom. §. 1, 8. Vergl. Meier Hirsch geom. Aufgaben II, 182.

$$\frac{AA''}{A'A''}\,\frac{A'C'}{B'C'}\,\frac{B'B''}{BB''}\,\frac{BC}{AC} = 1$$

also liegt $C$ auf der Ebene $A''C'B''$.

Wenn eine Ebene zwei gegenüberliegende Kanten eines Tetraeders halbirt, so halbirt sie auch das Volum desselben.*) Die Ebene, welche




die Kanten $BC$ und $AD$ in $M$ und $O$ halbirt und die Kanten $CD$ und $AB$ in $N$ und $P$ schneidet, theilt das Tetraeder $ABCD$ in zwei Körper, von denen einer aus den Pyramiden besteht, deren gemeinschaftliche Spitze $B$ ist und deren Basen $MNOP$ und $OND$ sind, während der andere die Pyramiden umfaßt, deren gemeinschaftliche Spitze $C$ ist und deren Basen $MPON$ und $AOP$ sind. Die vierseitigen Pyramiden haben gleiche Volume, weil sie dieselbe Basis und zufolge der Gleichung $BM = MC$ gleiche Höhen haben. Ferner hat man

$$BOD : AOP = (DO : OA)(AB : AP)$$

$$BODN : AOPC = (DO : OA)(AB : AP)(ND : CD)$$

$$\frac{AP}{PB}\,\frac{BM}{MC}\,\frac{CN}{ND}\,\frac{DO}{OA} = 1$$

Nun ist $\frac{DO}{OA} = 1$, $\frac{BM}{MC} = 1$, folglich $\frac{PB}{AP} = \frac{CN}{ND}$ und $\frac{AB}{AP} = \frac{CD}{ND}$, also $BODN : AOPC = 1$.

Die Geraden, welche 4 Puncte einer Ebene verbinden, bestimmen drei neue Puncte, die durch eben so viel Gerade verbunden werden können. Die gemeinschaftlichen Puncte der construirten Geraden bestimmen mit den vorhandenen Puncten neue Gerade, diese wiederum neue Puncte, u. s. f. Aus den Verhältnissen, nach welchen zwei Strecken der Figur, die auf verschiedenen Geraden liegen, durch je eine Gerade der Figur getheilt sind, kann das Verhältniß berechnet werden, nach welchem eine andere Strecke der Figur durch eine Gerade derselben getheilt wird. Der entsprechende Satz der Sphärik ist fast gleichlautend.

Die Ebenen, welche durch 5 Puncte des Raumes bestimmt sind, bestimmen wiederum andere Puncte, durch welche neue Ebenen bestimmt sind. Die construirten Ebenen bestimmen neue Puncte, diese wiederum neue Ebenen, u. s. f. Aus den Verhältnissen, nach welchen drei Strecken der Figur, die auf verschiedenen Geraden und nicht sämmtlich auf einer

*) Bobillier nach Lafrémoire's Sammlung VI, 1. Gergonne's Ann. 1 p. 362.

Ebene liegen, durch je eine Ebene der Figur getheilt sind, kann das Verhältniß berechnet werden, nach welchem eine andere Strecke der Figur durch eine Ebene derselben getheilt wird.*)

7. Das Product der Verhältnisse, nach denen die Seiten eines Polygons durch einen Kreis oder eine Kugel geschnitten werden, ist 1.**) Bezeichnet man die Potenz des Punctes $A$ in Bezug auf den Kreis oder die Kugel durch $(A)$, so hat man in der That

$$\frac{(A)}{(B)}\frac{(B)}{(C)}\frac{(C)}{(A)} = 1$$

auch dann, wenn einzelne Paare von Durchschnittspuncten imaginär sind.

Das angegebene Product, welches den unveränderlichen Werth 1 hat, ist projectivisch (4). Daher gilt nicht nur der entsprechende Satz der Sphärik, sondern es kann auch für den Kreis eine plane Central-projection desselben (eine Linie zweiten Grades) und für die Kugel ein Relief derselben (Stereom. §. 5, 11 — eine elliptische Fläche zweiten Grades) gesetzt werden.

8. Wenn die Strecke $AB$ sowohl in $C$ als auch in $D$ getheilt ist, so heißt der Quotient der beiden Verhältnisse $(AC : BC) : (AD : BD)$ das Doppelverhältniß der Puncte $A, B, C, D$ (in dieser Ordnung), und wird durch $(A, B, C, D)$ bezeichnet, so daß***)

$$(A, B, C, D) = \frac{AC}{AC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}\frac{BD}{AD}$$

Wenn der Winkel der Geraden $a$ und $b$ durch die Geraden $c$ und $d$ getheilt ist, so heißt der Quotient der Sinus-Verhältnisse

$$(\sin ac : \sin bc) : (\sin ad : \sin bd)$$

das Doppelverhältniß der Geraden $a, b, c, d$, die einen planen Büschel bilden oder wenigstens mit einer Ebene parallel sind, und wird durch $(a, b, c, d)$ bezeichnet.

---

*) Vergl. Möbius baryc. Calc. 155 ff. 198 ff.

**) Carnot Transvers. 9 und 10. Vergl. Poncelet propr. proj. 34.

***) Die Doppelverhältnisse sind zuerst von Möbius 1827 unter dem Namen Doppelschnittsverhältnisse untersucht und auf die angegebene Weise bezeichnet worden. Baryc. Calc. 182 ff. Weitere geometrische Anwendungen derselben verdankt man Steiner 1832 Systematische Entwickelung u. s. w. Chasles Ap. hist. 1837 p. 32 d. Uebers. und note 9, Géometrie supérieure 1852, Sections coniques 1865. Die von Chasles gewählte Benennung rapport anharmonique nimmt Bezug darauf, daß 4 Elemente, deren Doppelverhältniß —1 ist, harmonisch heißen. Unabhängig von Größenbegriffen ist das Doppelverhältniß von 4 Raumelementen von Staudt (Geometrie der Lage 1847 ff.) definirt worden.

Wenn der Flächenwinkel der Ebenen $\alpha$ und $\beta$ durch die Ebenen $\gamma$ und $\delta$ getheilt ist, so heißt der Quotient der Sinus-Verhältnisse

$$(\sin\alpha\gamma : \sin\beta\gamma) : (\sin\alpha\delta : \sin\beta\delta)$$

das Doppelverhältniß der Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, die einen Büschel bilden oder doch mit einer Geraden parallel sind, und wird durch $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ bezeichnet.

In der Sphärik versteht man unter dem Doppelverhältniß der Puncte eines Hauptkreises $A$, $B$, $C$, $D$ die Formel

$$(A, B, C, D) = \frac{\sin AC}{\sin BC} : \frac{\sin AD}{\sin BD}$$

und unter dem Doppelverhältniß der Hauptkreise eines Büschels $a$, $b$, $c$, $d$ die Formel

$$(a, b, c, d) = \frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd}$$

Das Doppelverhältniß von Puncten einer Geraden $(A, B, C, D)$ hat einen positiven Werth, wenn die Puncte $C$ und $D$ von der Strecke $AB$ beide eingeschlossen oder beide ausgeschlossen sind, einen negativen Werth dagegen, wenn der eine eingeschlossen, der andere ausgeschlossen ist. Es hat den Werth 1, wenn $D$ mit $C$ in endlicher oder unendlicher Ferne zusammenfällt (1). Es hat den Werth $-1$, wenn $C$ und $D$ die Strecke $AB$ der eine innen, der andere außen nach demselben Verhältniß theilen. In dem letzten Falle heißen die Puncte $C$ und $D$ den Puncten $A$ und $B$ harmonisch zugeordnet. Planim. §. 8, 6.

Das Doppelverhältniß von Geraden eines planen Büschels $(a, b, c, d)$ hat einen positiven Werth, wenn die Geraden $c$ und $d$ den Winkel $ab$ (und den Scheitelwinkel) beide innen oder beide außen theilen, einen negativen Werth, wenn die eine den Winkel innen, die andere außen theilt. Es hat den Werth 1, wenn $d$ mit $c$ zusammenfällt. Es hat den Werth $-1$, wenn $c$ und $d$ den Winkel $ab$ die eine innen, die andere außen nach demselben Sinus-Verhältniß theilen. In dem letzten Falle heißt der Büschel harmonisch. Planim. §. 8, 7. Eben so wird das Doppelverhältniß von Ebenen eines Büschels, von Puncten eines Hauptkreises, von Hauptkreisen eines Büschels beurtheilt.

Wenn das erste Element mit dem dritten und das zweite mit dem vierten vertauscht wird, so bleibt der Werth des Doppelverhältnisses unverändert.

$$(C, D, A, B) = (A, B, C, D)$$

$$\frac{CA}{DA} : \frac{CB}{DB} = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

Wenn das erste Element mit dem zweiten, oder das dritte mit dem

vierten vertauscht wird, so erhält das Doppelverhältniß den reciproken Werth.

$$(A, B, D, C)(A, B, C, D) = 1$$

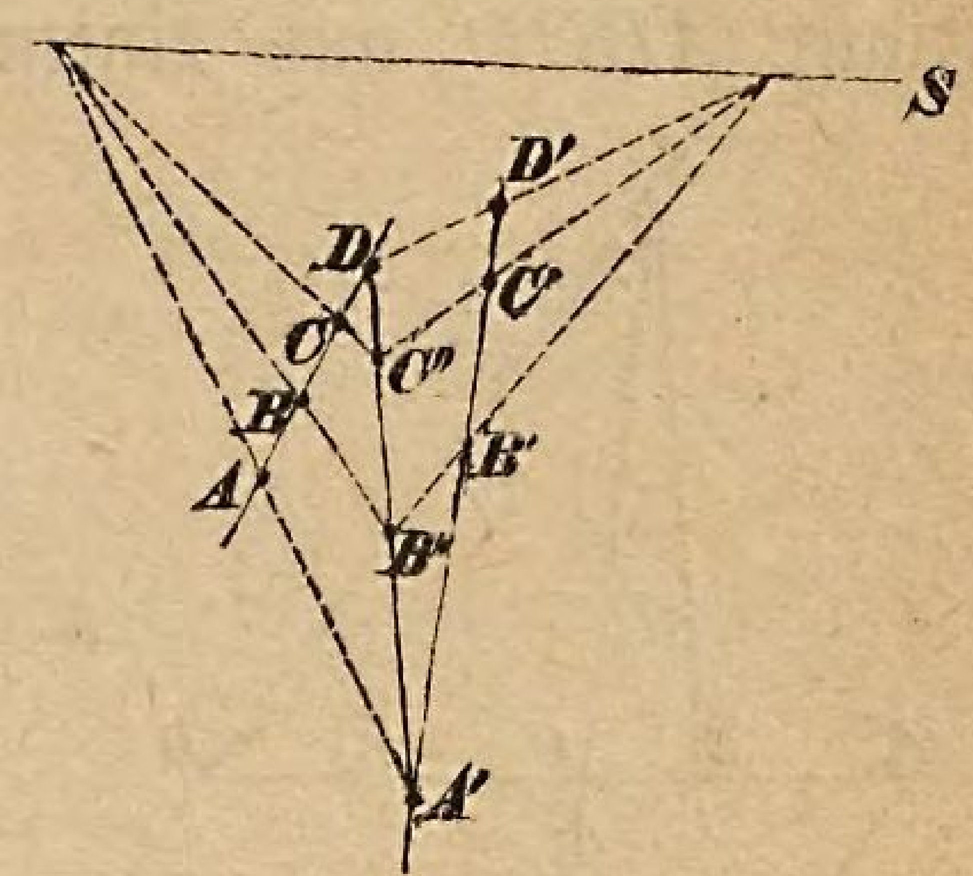
weil $\left(\frac{AD}{BD} : \frac{AC}{BC}\right)\left(\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}\right) = 1$. Eben so findet man überhaupt*)

$$(A, B, C, D)(A, B, D, E) = (A, B, C, E)$$

9. Das Doppelverhältniß von Puncten einer Geraden ist projectivisch (4). Wenn man die Puncte $A$, $B$, $C$, $D$ einer Geraden aus einem beliebigen Punct $S$ durch die Geraden $a$, $b$, $c$, $d$ auf eine beliebige Gerade der Ebene $SAB$ projicirt, und die Projectionen durch $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ bezeichnet, so hat man (1)

$$(A, B, C, D) = (a, b, c, d) = (A', B', C', D')^{**})$$

Das Doppelverhältniß von Puncten einer Geraden behält auch dann noch seinen Werth, wenn man die Puncte durch einen Büschel von Ebenen auf eine Gerade projicirt.***)




Die Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, welche die Gerade $s$ gemein haben, gehn durch die Puncte $A$, $B$, $C$, $D$ einer Geraden, und schneiden eine beliebige zweite Gerade in $A'$, $B'$, $C'$, $D'$. Die Gerade $A'D$ wird von den Ebenen $\beta$, $\gamma$ in $B''$, $C''$ geschnitten, so daß die Geraden $AA'$, $BB''$, $CC''$ und $B''B'$, $C''C'$, $DD'$ je einen planen Büschel bilden. Daher ist nach dem obigen Satze

$$(A, B, C, D) = (A', B'', C'', D) = (A', B', C', D')$$

Wenn der plane Büschel von Geraden $a''$, $b''$, $c''$, $d''$ ein Normalschnitt des Büschels der Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ ist, so hat man identisch

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (a'', b'', c'', d'')$$

Werden die Geraden $a''$, $b''$, $c''$, $d''$ von einer beliebigen Geraden ihrer Ebene in $A''$, $B''$, $C''$, $D''$ geschnitten, so ist nach dem Obigen

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (a'', b'', c'', d'') = (A'', B'', C'', D'') = (A, B, C, D)$$

Projicirt man also die Puncte einer Geraden $A$, $B$, $C$, $D$ durch die Geraden $a$, $b$, $c$, $d$ und durch die Geraden $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, durch die

---

*) Möbius baryc. Calc. 184.

**) Dieser Fundamentalsatz steht bereits unter den Lemmen zu Euclid's Porismen in Pappus Sammlung VII, 129 ff. Vergl. Chasles a. a. O., Géom. supér. Préf. p. XXI, les porismes d'Euclide 1860.

***) Dieser Zusatz ist für harmonische Elemente von Carnot Transvers. 19, allgemein von Möbius baryc. Calc. 196 bewiesen worden.

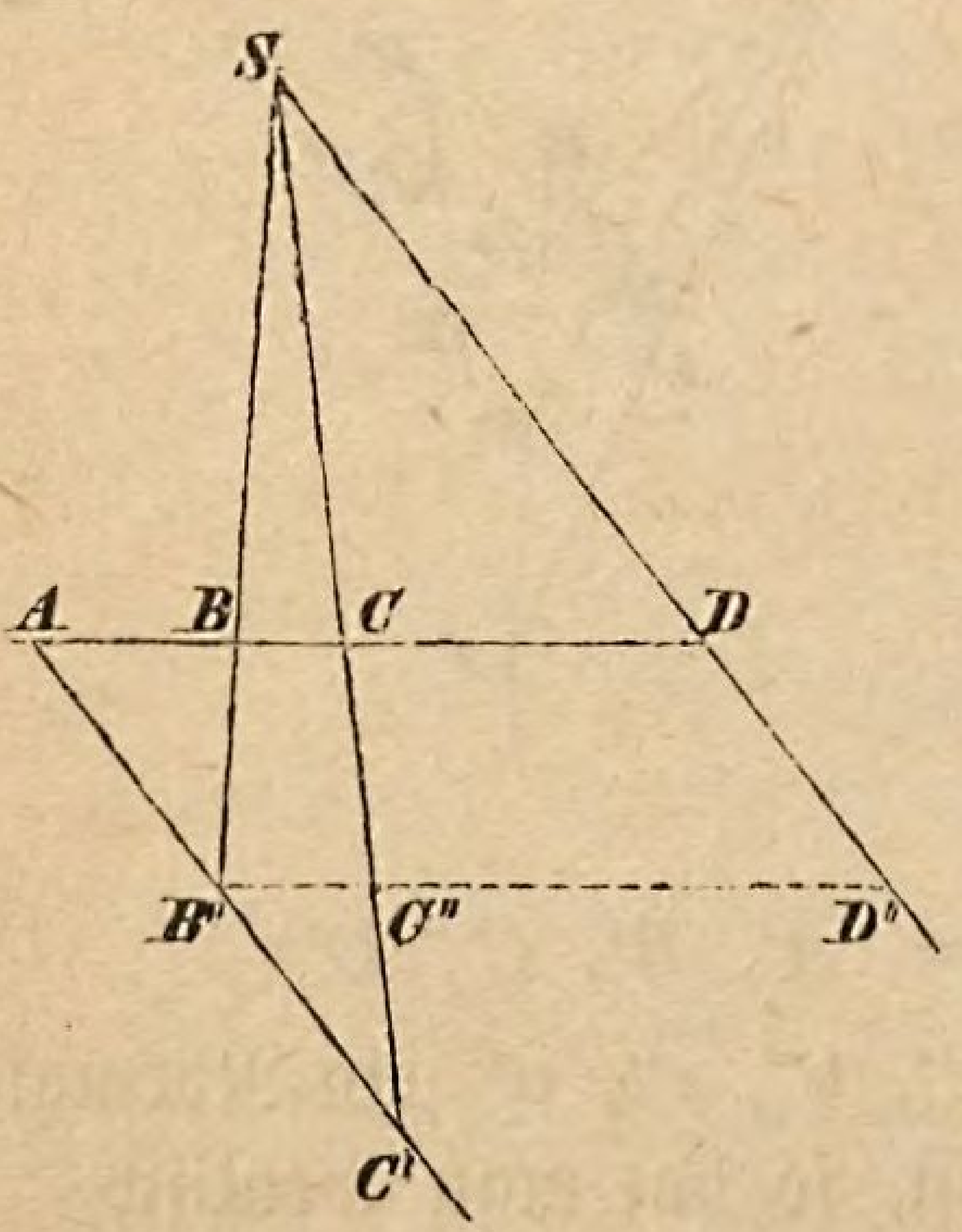
Ebenen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ und durch die Ebenen $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$, die je einen Büschel bilden, so hat man

$$(a, b, c, d) = (A, B, C, D) = (a', b', c', d')$$
$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (A, B, C, D) = (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$$
$$(a, b, c, d) = (a', b', c', d') = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$$

Und wenn ein Büschel von Hauptkreisen $a$, $b$, $c$, $d$ einer Kugel von einem Hauptkreis in den Puncten $A$, $B$, $C$, $D$, von einem andern Hauptkreis in den Puncten $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ geschnitten wird, wenn ferner durch die Puncte eines Hauptkreises $A$, $B$, $C$, $D$ sowohl die Hauptkreise $a$, $b$, $c$, $d$, als auch die Hauptkreise $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ gehn, die je einen Büschel bilden, so ist*)

$$(A, B, C, D) = (a, b, c, d) = (A', B', C', D')$$
$$(a, b, c, d) = (A, B, C, D) = (a', b', c', d')$$

Anmerkung. Um den Werth des Doppelverhältnisses von Puncten einer Geraden $(A, B, C, D)$ zu finden, projicire man die Figur $ABCD$ aus einem beliebigen Punct $S$ auf die Gerade, welche durch $A$ parallel mit $DS$ geht. In der Projection $AB'$ .. liegt $D'$ unendlich fern, folglich ist




$$(A, B, C, D) = (A, B', C') = AC' : B'C'$$

Zieht man noch parallel mit $AD$ die Gerade durch $B'$, welche $CS$ in $C''$, $DS$ in $D''$ schneidet, so findet man unmittelbar

$$BC : BD = B'C'' : B'D'', \; AC' : B'C'' = AC' : B'C', \; AD = B'D''$$

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{B'C''} : \frac{AD}{B'D''} = AC' : B'C'$$

Das Doppelverhältniß von Geraden oder Ebenen eines Büschels, $(a, b, c, d)$ oder $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, wird am einfachsten durch $(A', B', C')$ ausgedrückt, wenn eine mit $d$ oder $\delta$ parallele Gerade die Büschel in $A'$, $B'$, $C'$ und in unendlicher Ferne schneidet.

**10.** Wenn das Doppelverhältniß von Puncten einer Geraden $(A, B, C, D)$ oder von Geraden einer Ebene $(a, b, c, d)$ den Werth $n$ hat, so ist**)

---

*) Steiner syst. Entw. 29. 34. Gudermann nied. Sph. 177 ff.
**) Vergl. Möbius dioptr. Bilder (Leipz. Berichte 1855 p. 8).

$$\frac{n-1}{AB} = \frac{n}{AC} - \frac{1}{AD}$$

$$\frac{n-1}{\operatorname{tang} ab} = \frac{n}{\operatorname{tang} ac} - \frac{1}{\operatorname{tang} ad}$$

Setzt man nämlich in der Gleichung

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = n \text{ oder } n.AD.BC - AC.BD = 0$$

$BC = AC - AB$, $BD = AD - AB$, so erhält man

$$n.AC.AD - n.AD.AB - AC.AD + AC.AB = 0$$

und durch Division die erste der aufgestellten Gleichungen.

Die andere Gleichung kann aus der ersten abgeleitet werden. Wenn die Geraden $a$, $b$, $c$, $d$ eines planen Büschels von einer zu $a$ normalen Geraden in $A$, $B$, $C$, $D$ geschnitten werden, so ist

$$(A, B, C, D) = (a, b, c, d) = n \quad (9)$$

$$AB : AC : AD = \operatorname{tang} ab : \operatorname{tang} ac : \operatorname{tang} ad \quad (3)$$

folglich u. s. w. Man hat aber auch (9)

$$\frac{\sin bd}{\sin ad} - n\frac{\sin bc}{\sin ac} = 0 \text{ oder } \frac{\sin(ad - ab)}{\sin ad \sin ab} - n\frac{\sin(ac - ab)}{\sin ac \sin ab} = 0$$

folglich $(\cot ad - \cot ab) - n(\cot ac - \cot ab) = 0$, u. s. w.

Wenn insbesondere die gegebenen Elemente harmonisch sind, so ist $n = -1$, also

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

$$\frac{2}{\operatorname{tang} ab} = \frac{1}{\operatorname{tang} ac} + \frac{1}{\operatorname{tang} ad}$$

In diesem Falle hat die Mitte $M$ von $AB$ und die Gerade $m$, welche den Winkel $ab$ halbirt, die besondern Eigenschaften, daß*)

$$MB^2 = MC.MD, \quad \frac{AC^2}{AD^2} = \frac{MC}{MD}$$

$$\operatorname{tang}^2 mb = \operatorname{tang} mc \operatorname{tang} md, \quad \frac{\sin^2 ac}{\sin^2 ad} = \frac{\sin 2mc}{\sin 2md}$$

Denn man hat $AD.BC + AC.BD = 0$, d. i.

$$(AM + MD)(BM + MC) + (AM + MC)(BM + MD) = 0$$

Nun ist $AM = MB = -BM$, folglich u. s. w. Ferner

*) Apollonius con. I, 37. Lahire sect. con. 1685 p. 1 ff. Poncelet propr. proj. 31. Gudermann nied. Sph. 196.

$$\frac{AC^2}{AD^2} = \frac{AC \cdot CB}{AD \cdot BD} = \frac{(AM + MC)(MB - MC)}{(AM + MD)(MD - MB)}$$
$$= \frac{MB^2 - MC^2}{MD^2 - MB^2} = \frac{MC}{MD}$$

Wenn die Geraden $a$, $b$, $c$, $d$, $m$ den Punct $S$ gemein haben und von einer zu $m$ normalen Geraden in $A$, $B$, $C$, $D$, $M$ geschnitten werden, so ist $(A, B, C, D) = (a, b, c, d) = -1$ und $M$ die Mitte von $AB$. Nun ist

$$MB : MC : MD = \operatorname{tang} mb : \operatorname{tang} mc : \operatorname{tang} md$$
$$\frac{AC}{AD} = \frac{\sin ac}{\sin ad} \frac{SC}{SD} \text{ (1)}, \; SC \cos mc = SD \cos md$$

$\operatorname{tang} mc \cos^2 mc = \frac{1}{2} \sin 2mc$, u. s. w.

Anwendungen. Eine den Schwerpunct $S$ des Dreiecks $ABC$ enthaltende Gerade schneidet die Seiten in $A'$, $B'$, $C'$ und die durch die Spitze $C$ gezogene Parallele der Basis $AB$ in $T$ so, daß die Geraden $CS$, $CT$, $CA$, $CB$ und die Puncte $S$, $T$, $A'$, $B'$ harmonisch sind. Daher ist

$$\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'} = \frac{2}{ST} = \frac{1}{C'S}$$
$$\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'} + \frac{1}{SC'} = 0 \text{*)}$$

Eine den Schwerpunct $S$ des Tetraeders $ABCD$ enthaltende Gerade schneidet die Flächen in $A'$ $B'$, $C'$, $D'$ und die parallelen Ebenen, deren eine die Kante $AB$, die andre die Kante $CD$ enthält, in $U$, $V$ so, daß sowohl die Ebenen $CDS$, $CDV$, $CDA$, $CDB$ und die Puncte $S$, $V$, $A'$, $B'$, als auch die Ebenen $ABS$, $ABU$, $ABC$, $ABD$ und die Puncte $S$, $U$, $C'$, $D'$ harmonisch sind, d. h.

$$\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'} = \frac{2}{SV}, \; \frac{1}{SC'} + \frac{1}{SD'} = \frac{2}{SU}$$

Nun ist $S$ die Mitte von $UV$ (Stereom. §. 6, 4), folglich

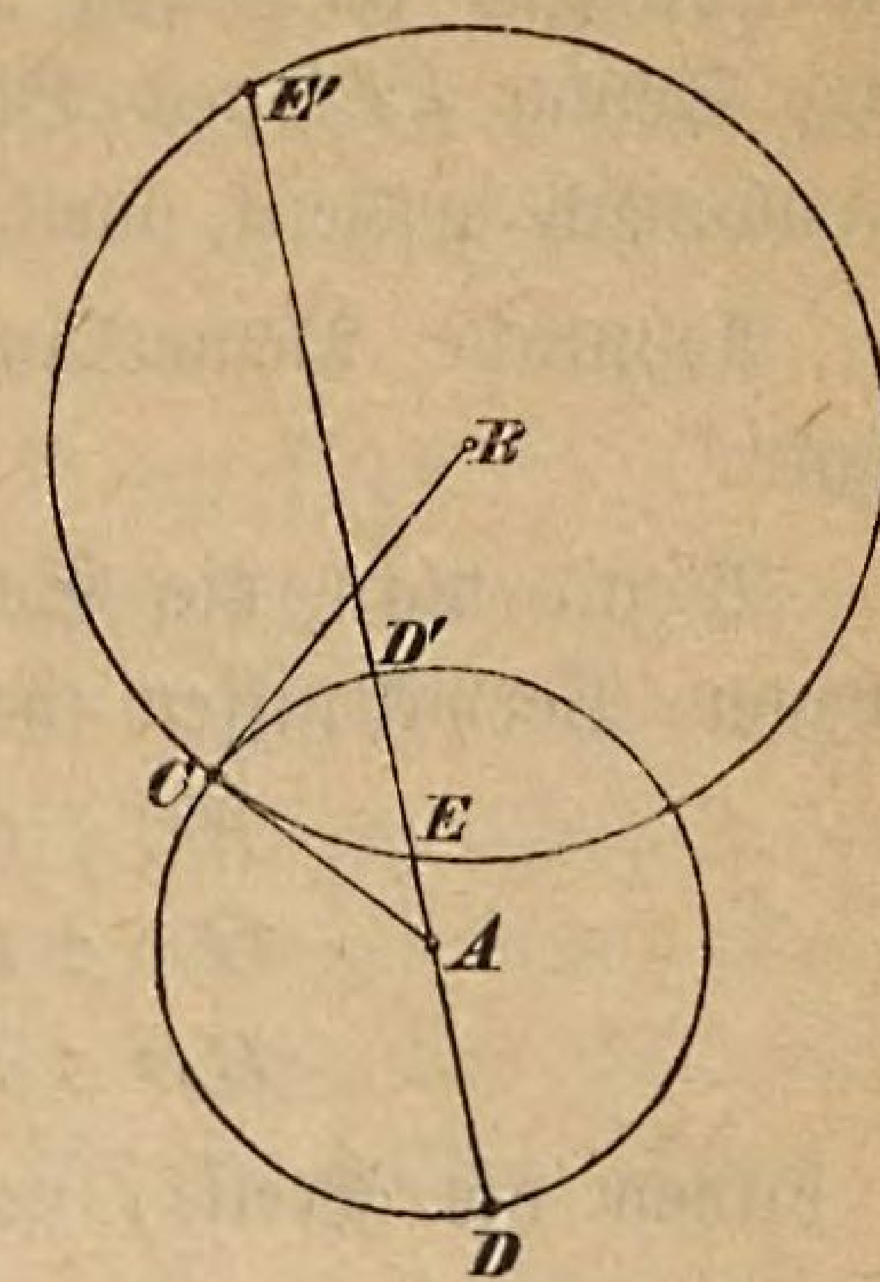
$$\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'} + \frac{1}{SC'} + \frac{1}{SD'} = 0$$

Wenn zwei Kreise $(A)$ und $(B)$ einander normal schneiden, so schneidet jeder von ihnen die Diameter des andern harmonisch.**) Ist $C$ ein gemeinschaftlicher Punct der Kreise, so ist $AC$ eine Tangente

---

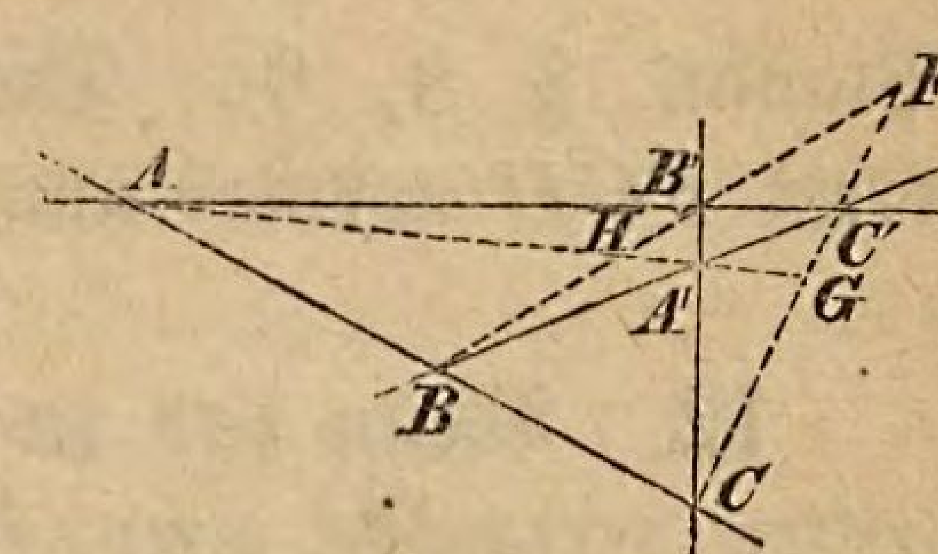
*) Maclaurin Tract. de lin. geom. propr. (Anhang der Algebra) 1748 §. 98.
**) Poncelet propr. proj. 79.

des Kreises $(B)$. Wird der Diameter $DD'$ des Kreises $(A)$ von dem Kreis $(B)$ in $E$ und $E'$ geschnitten, so ist $AE.AE' = AC^2 = AD'^2$ und $(D, D', E, E') = -1$. Dasselbe gilt von zwei sich normal schneidenden Kugeln. Den entsprechenden Satz über zwei sich normal schneidende Kreise einer Kugel hat Gudermann nied. Sph. 307 gegeben.




**11.** Die Diagonalen der durch 4 Gerade einer Ebene bestimmten Vierecke theilen einander harmonisch.*)

Beweis. Die Geraden $AB$, $BA'$, $A'B'$, $B'A$ bilden 3 Vierecke mit den Diagonalen $AA'$, $BB'$, $CC'$, so daß $AA'$ von $BB'$ und $CC'$ harmonisch getheilt wird, u. s. w. Das Doppelverhältniß der Puncte $A$, $A'$, und der beiden Puncte, welche die Gerade $AA'$ mit $BB'$ und $CC'$ gemein hat, wird nach (1) durch $(A, A', BB', CC')$ bezeichnet. Um seinen Werth zu finden, projicire man die Figur aus einem beliebigen Punct $S$ des Raumes auf eine Ebene, die mit der Ebene $CC'S$ parallel ist. Die Projection des Vierecks $ABA'B'$ ist ein Parallelogramm (5), die Projectionen von $AA'$ und $BB'$ halbiren einander, die Projection von $CC'$ ist unendlich fern. Daher ist $(A, A', BB', CC') = -1$. Ebenso findet man $(B, B', CC', AA') = -1$ und $(C, C', AA', BB') = -1$.




Derselbe Satz gilt von den Diagonalen der durch 4 Hauptkreise einer Kugel bestimmten sphärischen Vierecke.

Anmerkung. Bezeichnet man die gemeinschaftlichen Puncte der Diagonalen durch $F$, $G$, $H$, die Mitten der Diagonalen durch $A''$, $B''$, $C''$, so hat man (10)

$$A''A^2 = A''G.A''H, \quad B''B^2 = B''H.B''F, \quad C''C^2 = C''F.C''G$$

Hieraus schließt man, daß die von $A''$ bis an den Kreis $FGH$ reichende Tangente desselben so lang ist als $A''A$, u. s. w., daß also die Kreise, von denen $A$ und $A'$, $B$ und $B'$, $C$ und $C'$ Gegenpuncte sind, den Kreis $FGH$ normal schneiden. Diese Kreise bilden einen Büschel (Planim.

*) Bei Pappus VII, 131 findet sich eine Umkehrung dieses alten Satzes, der von Desargues Brouillon projet 1639 (éd. Poudra, Paris 1864, I p. 186), neuerlich von Carnot géom. de pos. 225 reproducirt worden ist. Vergl. Poncelet propr. proj. 155.

§. 14, 11), also liegt das Centrum ihres Orthogonalkreises $FGH$ mit den gemeinschaftlichen Puncten $P$, $P'$ des Büschels auf der Linie gleicher Potenzen in Bezug auf die Kreise des Büschels. Die gemeinschaftliche Sehne $PP'$ des Büschels wird durch den Orthogonalkreis $FGH$ harmonisch getheilt, weil sie durch sein Centrum geht (10, Anm.).

Aehnliche Bemerkungen gelten von der entsprechenden sphärischen Figur.*)

Wenn man die Seiten eines Dreiecks $FGH$ harmonisch nach gegebenen Verhältnissen theilt, deren Product 1 ist (vergl. 5 und 6),

$$FC : GC = FC' : C'G = p : q$$
$$GA : HA = GA' : A'H = q : r$$
$$HB : FB = HB' : B'F = r : p$$

bilden die Kreise, von welchen $A$ und $A'$, $B$ und $B'$, $C$ und $C'$ Gegenpuncte sind, einen Büschel. Die gemeinschaftlichen Puncte $P$, $P'$ dieser Kreise haben eine solche Lage zu den Puncten $F$, $G$, $H$, daß

$$FP : GP : HP = FP' : GP' : HP' = p : q : r$$

(Planim. §. 8, 6). Die gemeinschaftliche Sehne $PP'$ wird von dem Kreis $FGH$ normal und harmonisch getheilt.

**12.** Wenn das zweite Element eines Doppelverhältnisses mit dem dritten vertauscht wird, so erhält das Doppelverhältniß den Werth, der das gegebene Doppelverhältniß zu 1 ergänzt.**)

$$\text{I.} \quad (A, B, C, D) + (A, C, B, D) = 1$$

Macht man nach 9, Anm.

$$(A, B, C, D) = (A, B', C')$$

so wird auch

$$(A, C, B, D) = (A, C', B')$$

Nun ist $(A, B', C') + (A, C', B') = 1$ (2), folglich u. s. w.

Für 4 Puncte $A$, $B$, $C$, $D$ einer Ebene und die Gerade $EF$ derselben hat man

$$\text{II.} \quad (A, B, CD, EF) + (A, C, DB, EF) + (A, D, BC, EF) = 1$$

und für 5 Puncte $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ des Raumes und die Ebene $FGH$

$$\text{III.} \quad (A, B, CED, FGH) + (A, C, DEB, FGH) + (A, D, BEC, FGH) + (A, E, BCD, FGH) = 1$$

---

*) Gudermann analyt. Sph. p. 138. Vergl. Chasles géom. supér. 345. Möbius Leipz. Berichte 1854 p. 87.

**) Möbius baryc. Calc. 184.

wenn wiederum in einem Doppelverhältniß neben den Puncten $A$, $B$ durch die Gerade $CD$ oder die Ebene $CDE$ ihr Durchschnitt mit der Geraden $AB$ bezeichnet wird, u. s. w. Projicirt man nämlich aus einem beliebigen Punct $S$ die Ebene $ABCD$ auf die Ebene, welche durch $A$ parallel mit der Ebene $EFS$ geht, und bezeichnet man die Projection durch $AB'$.., so ist (9)

$$(A, B, CD, EF) = (A, B', C'D'), \text{ u. s. w.}$$

Hiernach fließt die Gleichung (II) aus der zweiten der oben (2) bewiesenen Gleichungen. Die Gleichung (III) wird aus (II) eben so abgeleitet, wie die dritte der bewiesenen Gleichungen (2) aus der zweiten, oder auch direct durch Betrachtung einer Figur, die mit der gegebenen Raumfigur perspectivisch und collinear ist (Stereom. §. 5, 11), und in welcher den Puncten der Ebene $FGH$ unendlich ferne Puncte entsprechen.

**13.** Aus der Gleichung (12, I) folgt ohne Weiteres für 4 Puncte $A$, $B$, $C$, $D$ einer Geraden

$$AB.CD + BC.AD + CA.BD = 0$$

Vergl. Planim. §. 14, 15.

Bei 5 Puncten $A$, .., $E$ einer Ebene haben die Doppelverhältnisse von Puncten einer Geraden $(A, CE, B, DE)$ und $(A, C, BE, DE)$ denselben Werth, als das Doppelverhältniß von Geraden $(AE, CE, BE, DE.)$. Bei 6 Puncten $A$, .., $F$ des Raumes haben $(A, CEF, B, DEF)$ und $(A, C, BEF, DEF)$ denselben Werth (9). Folglich ist in diesen Fällen auch

$$(A, B, CE, DE) + (A, C, BE, DE) = 1$$
$$(A, B, CEF, DEF) + (A, C, BEF, DEF) = 1$$

Indem man die Verhältnisse, nach denen $AB$ und $AC$ geschnitten werden, durch Verhältnisse von Dreiecksflächen oder Tetraedervolumen ausdrückt (1), erhält man*)

für 5 Puncte einer Ebene

$$ABE.CDE + BCE.ADE + CAE.BDE = 0$$

für 6 Puncte des Raumes

$$ABEF.CDEF + BCEF.ADEF + CAEF.BDEF = 0$$

Aus der Gleichung (12, II) folgt eben so

für 6 Puncte einer Ebene

$$ABC.DEF + ACD.BEF + ADB.CEF = BCD.AEF$$

für 7 Puncte des Raumes

$$ABCG.DEFG + ACDG.BEFG + ADBG.CEFG = BCDG.AEFG$$

---

*) Monge und Möbius. Vergl. des Verf. Determ. §. 3, 11.

Aus der Gleichung (12, III) folgt für 8 Puncte des Raumes

$$BCDE.AFGH + ACED.BFGH + ADEB.CFGH$$
$$+ ABEC.DFGH + ABCD.EFGH = 0$$

Anmerkung. Die Gleichung (12, I) besteht auch dann, wenn an die Stelle der Puncte einer Geraden Gerade gesetzt werden, die mit einer Ebene parallel sind. Demnach ist

$$(a, b, c, d) + (a, c, b, d) = 1^{*)}$$
$$\sin ab \sin cd + \sin bc \sin ad + \sin ca \sin bd = 0$$

Vergl. §. 4, 6. Wenn die Geraden $a$, $b$, $c$, $d$ einen Punct eines Kreises gemein haben, und den Kreis außerdem in $A$, $B$, $C$, $D$ schneiden, so verhalten sich die Sehnen $AB$, $BC$, .. wie die Sinus der sie einschließenden Peripheriewinkel, und man hat

$$AB.CD + BC.AD + CA.BD = 0$$

wie a. a. O. bewiesen worden ist.

Wenn das Dreieck $ABC$ aus dem beliebigen Punct $S$ durch die Geraden $a$, $b$, $c$ projicirt wird, so hat man §. 6, 14

$$SABC = \tfrac{1}{6} SA.SB.SC \sin abc$$

Hiernach fließen aus den gefundenen Gleichungen für Dreiecke einer Ebene die goniometrischen Relationen für 5 und 6 Gerade des Raumes**)

$$\sin abc \sin cde + \sin bce \sin ade + \sin cae \sin bde = 0$$
$$\sin abc \sin def + \sin acd \sin bef + \sin adb \sin cef = \sin bcd \sin aef$$

**14.** I. Wenn die Doppelverhältnisse ($A$, $B$, $C$, $D$) und ($A'$, $B'$ $C'$, $D'$) von Puncten, die je auf einer Geraden liegen, gleiche Werthe haben, und die Geraden $AA'$, $BB'$, $CC'$ einen Punct $S$ gemein haben, so bilden $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$ einen planen Büschel. Es sind die Doppelverhältnisse (9)

$$(AS, BS, CS, DS) = (A, B, C, D), \; (A'S, B'S, C'S, D'S) = (A', B', C', D')$$

mithin $(AS, BS, CS, DS) = (A'S, B'S, C'S, D'S)$. Nun fällt $AS$ mit $A'S$, $BS$ mit $B'S$, $CS$ mit $C'S$ zusammen, also auch $DS$ mit $D'S$ (1).

Wenn insbesondere $(A, B, C, D) = (A', B', C', D)$ ist, so bilden die Geraden $AA'$, $BB'$, $CC'$ einen planen Büschel.***) Bezeichnet man durch $S$ den gemeinschaftlichen Punct der Geraden $AA'$ und $BB'$, so ist

$$(AS, BS, CS, DS) = (A'S, B'S, C'S, DS)$$

---

*) Möbius Crelle J. 24 p. 90.

**) Die Möglichkeit derartiger Relationen hat Poncelet angedeutet: propr. proj. 45 und Crelle J. 3 p. 265.

***) Pappus VII, 136 und 142. Steiner syst. Entw. 14 und 31. Chasles géom. sup. 38.

Nun fällt $AS$ mit $A'S$, $BS$ mit $B'S$ zusammen, also fällt auch $CS$ mit $C'S$ zusammen.

II. Wenn ferner die Doppelverhältnisse $(a, b, c, d)$ und $(a', b', c', d')$ von Geraden planer Büschel gleich sind, und die Durchschnittspuncte $aa'$, $bb'$, $cc'$ auf einer Geraden $r$ liegen, so schneiden sich $d$ und $d'$ auf derselben Geraden. Denn zufolge der Voraussetzung sind die Doppelverhältnisse von Puncten $(ar, br, cr, dr)$ und $(a'r, b'r, c'r, d'r)$ einander gleich. Nun fällt $ar$ mit $a'r$, $br$ mit $b'r$, $cr$ mit $c'r$ zusammen, also auch $dr$ mit $d'r$.

Wenn insbesondere $(a, b, c, d) = (a', b', c', d)$ ist, so liegen die Puncte $aa'$, $bb'$, $cc'$ auf einer Geraden. Denn die Gerade, welche die Puncte $aa'$ und $bb'$ enthält, wird von den Geraden der beiden Büschel so geschnitten, daß $(aa', bb', c, d) = (aa', bb', c', d)$, u. s. w.

III. Wenn die Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ je einen Büschel bilden, und unter den Geraden $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ irgend zwei einen Punct gemein haben, so haben alle denselben gemein. Denn der gemeinschaftliche Punct der Geraden $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ liegt auf den Ebenen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, folglich auf der gemeinschaftlichen Geraden sowohl der Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, als auch der Ebenen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$, mithin auf den Ebenen $\gamma, \delta, \gamma', \delta'$, d. h. auf den Geraden $\gamma\gamma'$ und $\delta\delta'$.

Wenn die Doppelverhältnisse $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ und $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ von Ebenen, die je einen Büschel bilden, gleich sind, und die Geraden $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ auf einer Ebene $\varepsilon$ liegen, so bilden die Geraden $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ einen planen Büschel. Denn diese Geraden haben einen Punct gemein, und die Doppelverhältnisse von Geraden $(\alpha\varepsilon, \beta\varepsilon, \gamma\varepsilon, \delta\varepsilon)$, $(\alpha'\varepsilon, \beta'\varepsilon, \gamma'\varepsilon, \delta'\varepsilon)$ sind gleich, also fällt $\delta\varepsilon$ mit $\delta'\varepsilon$ zusammen, d. h. $\delta\delta'$ liegt auf $\varepsilon$.

Wenn insbesondere $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\alpha', \beta', \gamma', \delta)$ ist, so bilden die Geraden $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, einen planen Büschel. Denn die Geraden $\beta\gamma$ und $\beta'\gamma'$ liegen auf der Ebene $\delta$ und haben deshalb einen Punct gemein, der auf den Ebenen $\beta, \gamma, \beta', \gamma'$, also auch auf den Geraden $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ liegt. Bezeichnet man die Ebene der Geraden $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ durch $\varepsilon$, so sind die Doppelverhältnisse von Geraden $(\alpha\varepsilon, \beta\varepsilon, \gamma\varepsilon, \delta\varepsilon)$, $(\alpha'\varepsilon, \beta'\varepsilon, \gamma'\varepsilon, \delta'\varepsilon)$ gleich, also fällt $\alpha\varepsilon$ mit $\alpha'\varepsilon$ zusammen, d. h. $\alpha\alpha'$ liegt auf $\varepsilon$.

Anwendung. Wenn die planen (sphärischen) Dreiecke $ABC$ und $A'B'C'$ perspectivisch liegen (Stereom. §. 5, 7), so liegen die gemeinschaftlichen Puncte der entsprechenden Geraden (Hauptkreise) $AB$ und $A'B'$, $BC$ und $B'C'$, $CA$ und $C'A'$ auf einer Geraden (Hauptkreis), und umgekehrt.*) Bezeichnet man durch $F$ den Punct, welchen $AB$ und

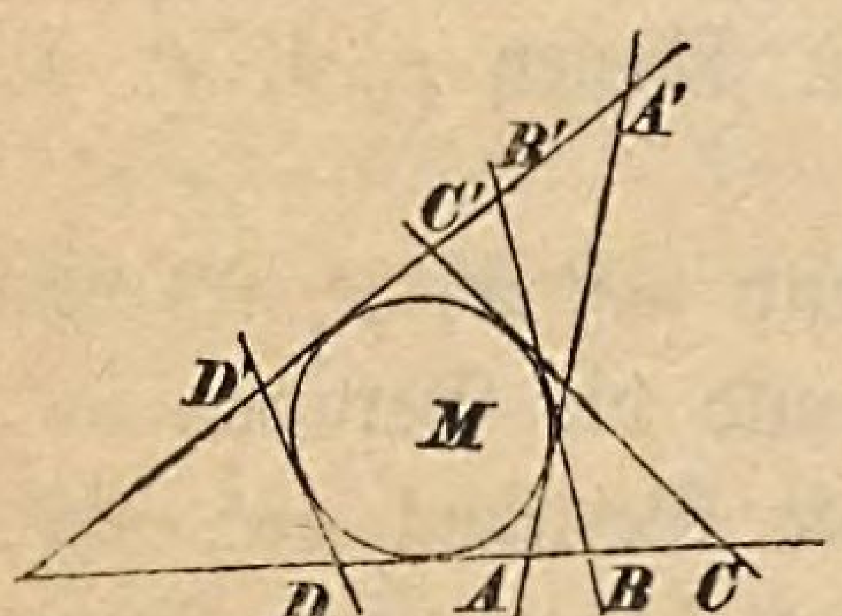
---

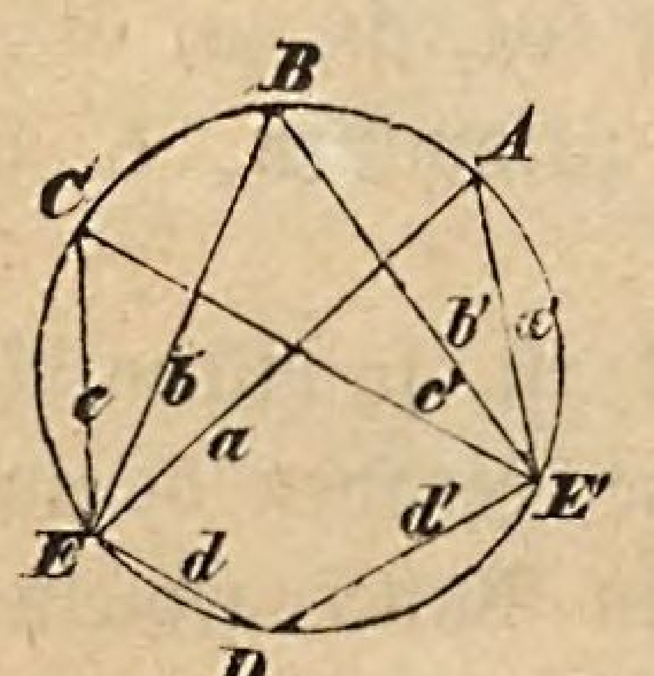
*) Gudermann nied. Sphärik 211. Chasles géom. sup. 365.

$A'B'$ gemein haben, so sind zufolge der perspectivischen Lage die Doppelverhältnisse von Puncten ($A$, $B$, $CC'$, $F$) und ($A'$, $B'$, $CC'$, $F$) einander gleich. Also sind auch die Doppelverhältnisse von Geraden ($AC$, $BC$, $CC'$, $FC$) und ($A'C'$, $B'C'$, $CC'$, $FC'$) einander gleich. Folglich liegen die gemeinschaftlichen Puncte der Geraden $AC$ und $A'C'$, $BC$ und $B'C'$ mit $F$ auf einer Geraden. U. s. w.

15. Wenn zwei Tangenten eines Kreises oder einer planen Centralprojection des Kreises (einer Linie zweiten Grades) von 4 Tangenten derselben Curve die eine in $A$, $B$, $C$, $D$, die andere in $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ geschnitten werden, so sind die Doppelverhältnisse der entsprechenden Puncte gleich.*)

Wenn zwei Puncte eines Kreises oder einer planen Centralprojection des Kreises mit 4 Puncten derselben Curve der eine durch die Geraden $a$, $b$, $c$, $d$, der andere durch die Geraden $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ verbunden werden, so sind die Doppelverhältnisse der entsprechenden Geraden gleich.




Beweis. Bezeichnet man das Centrum des Kreises durch $M$, so sind die Winkel $2AMA'$, $2BMB'$, $2CMC'$, $2DMD'$ von derselben Größe (Planim. §. 6, 13). Wird die Figur $MABCD$ in ihrer Ebene um den Punct $M$ gedreht, bis $A$ auf die Gerade $MA'$ fällt, so fallen $B$, $C$, $D$ auf die Geraden $MB'$, $MC'$, $MD'$. Daher ist ($A$, $B$, $C$, $D$) $=$ ($A'$, $B'$, $C'$, $D'$) in allen planen Schnitten eines die gegebene Figur projicirenden Kegels (9).

Andrerseits sind die Winkel $2aa'$, $2bb'$, $2cc'$, $2dd'$ von derselben Größe, wenn ihre Scheitel auf einem Kreise liegen (Planim. §. 4, 2). Dreht man die Figur $abcd$ in ihrer Ebene um den Punct $ab$, bis die Gerade $a$ mit $a'$ parallel wird, so werden $b$, $c$, $d$ mit $b'$, $c'$, $d'$ parallel. Daher ist ($a$, $b$, $c$, $d$) $=$ ($a'$, $b'$, $c'$, $d'$) in allen planen Schnitten eines die gegebene Figur projicirenden Kegels.

Umgekehrt schließt man:

Wenn die Puncte $A$, $B$, $C$, $D$ und $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ auf je einer Geraden derselben Ebene so gegeben sind, daß ($A$, $B$, $C$, $D$) $=$ ($A'$, $B'$, $C'$, $D'$),

*) Die Sätze dieses Artikels, welche nebst den daraus abgeleiteten Sätzen auch für sphärische Projectionen des Kreises gelten, verdankt man Steiner syst. Entw. 37 ff.

so berühren die Geraden $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$ eine bestimmte von $AB$ und $A'B'$ berührte Linie zweiten Grades.

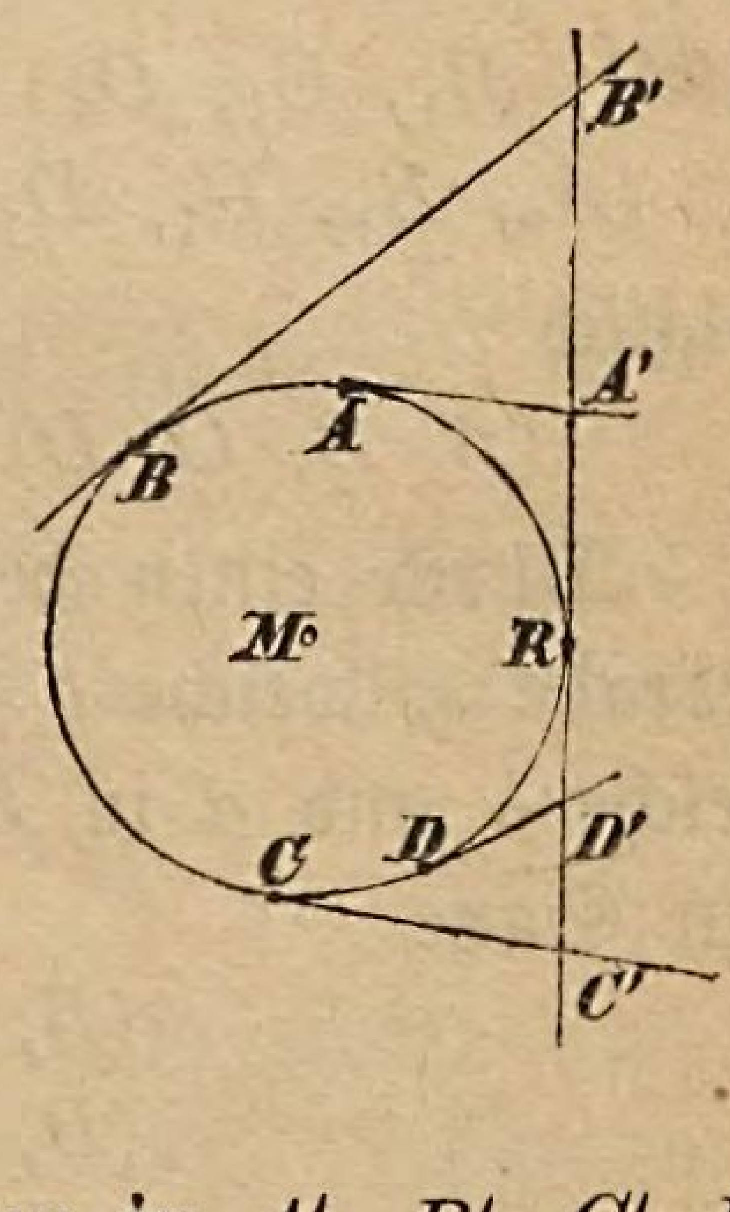
Wenn auf einer Ebene die Gerade $a$, $b$, $c$, $d$ und $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ je einen Büschel bilden, so daß $(a, b, c, d) = (a', b', c', d')$, so liegen die Puncte $aa'$, $bb'$, $cc'$, $dd'$ auf einer bestimmten durch die Puncte $ab$ und $a'b'$ gehenden Linie zweiten Grades.

Beweis. Werden zwei Tangenten einer Curve der angegebenen Art von 3 Tangenten derselben Curve in $A$, $B$, $C$ und $A'$, $B'$, $C'$, von einer andern Geraden in $D$ und $D'$ so geschnitten, daß $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$ ist, so ist $DD'$ eine Tangente derselben Curve. Würde die Curve nicht von $DD'$, sondern von $DE'$ berührt, so wäre $(A, B, C, D) = (A', B', C', E',)$ verschieden von $(A', B', C', D')$. U. s. w.

Anmerkung. Der bewiesene Doppelsatz kann mit Vortheil auch ausgedrückt werden wie folgt:

Durch dieselben 4 Tangenten einer Linie zweiten Grades werden auf allen andern Tangenten derselben Linie gleiche Doppelverhältnisse von Puncten bestimmt, z. B. $(A, B, C, D) = (A', B', C', D') = \ldots$ Unter dem Doppelverhältniß von 4 Tangenten einer Linie zweiten Grades wird das Doppelverhältniß von Puncten verstanden, die durch die gegebenen Tangenten auf einer beliebigen andern Tangente bestimmt werden.

Durch dieselben 4 Puncte einer Linie zweiten Grades werden mit allen andern Puncten derselben Linie gleiche Doppelverhältnisse von Geraden bestimmt, z. B. $(AE, BE, CE, DE) = (AE,' BE', CE', DE') = \ldots$ Unter dem Doppelverhältniß von 4 Puncten einer Linie zweiten Grades wird das Doppelverhältniß von Geraden verstanden, welche die gegebenen Puncte mit einem beliebigen Punct der Curve verbinden.




Vier Tangenten einer Linie zweiten Grades oder vier Puncte derselben sind demnach harmonisch, wenn ihr Doppelverhältniß den Werth $-1$ hat.

Das Doppelverhältniß von 4 Tangenten einer Line zweiten Grades hat denselben Werth als das Doppelverhältniß ihrer Berührungspuncte.*) Wenn $A$, $B$, $C$, $D$, $R$ Puncte eines Kreises sind, und die durch $R$ gehende Tangente von den durch $A$, $B$, $C$, $D$ gehenden Tangenten in $A'$, $B'$, $C'$, $D$,

*) Steiner syst. Entw. 43. Chasles géom. supér. 663. Vergl. unten (23).

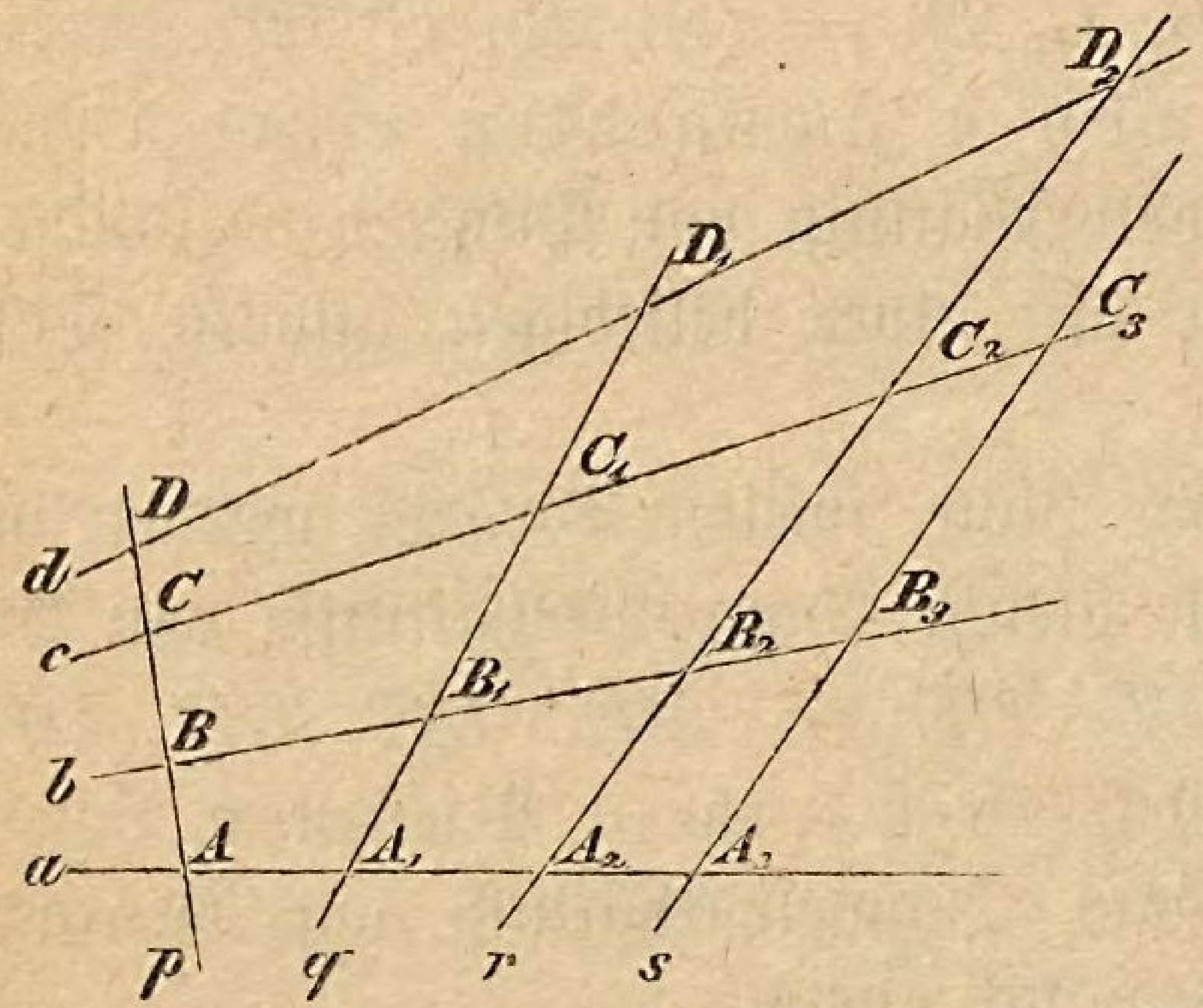
geschnitten wird, so sind die Geraden $RA$, $RB$, $RC$, $RD$ normal zu den Geraden, welche die Puncte $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ mit dem Centrum $M$ verbinden. Dreht man die Figur $RABCD$ in ihrer Ebene um den Punct $R$, bis $RA$ mit $MA'$ parallel wird, so werden $RB$, $RC$, $RD$ mit $MB'$, $MC'$, $MD'$ parallel. Daher ist

$$(RA, RB, RC, RD) = (MA', MB', MC', MD') = (A', B', C', D')$$

**16.** Wenn mit 3 Geraden $p$, $q$, $r$, von denen nicht zwei auf einer Ebene liegen, 4 Gerade $a$, $b$, $c$, $d$ je einen Punct gemein haben, so sind die Doppelverhältnisse von Puncten

$$(pa, pb, pc, pd), (qa, qb, qc, qd), (ra, rb, rc, rd)$$

von derselben Größe. Eine Gerade $s$, die mit 3 unter den Geraden $a$, $b$, $c$, $d$ je einen Punct gemein hat, hat auch mit der vierten einen Punct gemein, und liegt demnach auf dem sowohl durch die Geraden $p$, $q$, $r$ als auch durch die Geraden $a$, $b$, $c$ bestimmten geradlinigen Hyperboloid. Stereom. §. 1, 8.*)




Beweis. Auf der Geraden $q$ werden 4 Puncte $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ beliebig angenommen. Die Ebenen $pA_1$, $pB_1$, $pC_1$, $pD_1$ schneiden die Gerade $r$ in $A_2$, $B_2$, $C_2$, $D_2$ so, daß die Geraden $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$, $D_1D_2$, welche durch $a$, $b$, $c$, $d$ bezeichnet werden, mit der Geraden $p$ die Puncte $A$, $B$, $C$, $D$ gemein haben. Nun ist (9)

$$(A_1, B_1, C_1, D_1) = (pA_1, pB_1, pC_1, pD_1) = (A_2, B_2, C_2, D_2)$$
$$(A_1, B_1, C_1, D_1) = (rA_1, rB_1, rC_1, rD_1) = (A, B, C, D)$$

folglich

$$(A, B, C, D) = (A_1, B_1, C_1, D_1) = (A_2, B_2, C_2, D_2)$$

Durch einen beliebigen Punct $A_3$ der Geraden $a$ ziehe man die Gerade $s$, welche $b$ und $c$ in $B_3$ und $C_3$ schneidet, und die Gerade $t$, welche $b$ und $d$ in $B_4$ und $D_4$ schneidet. Dann ist nach dem bewiesenen Satze

$$(B, B_1, B_2, B_3) = (A, A_1, A_2, A_3)$$
$$(B, B_1, B_2, B_4) = (A, A_1, A_2, A_3)$$

---

*) Steiner syst. Entw. 51, III. Chasles Ap. hist. Note 9. Die zwei Serien von Geraden des hyperbolischen Hyperboloids sind in einem besondern Falle von Wren 1669, allgemein von Monge 1795 entdeckt worden. Vergl. Chasles Ap. hist. p. 238 d. Uebers.

folglich

$$(B, B_1, B_2, B_4) = (B, B_1, B_2, B_3)$$

Daher fällt $B_4$ und $B_3$, $t$ mit $s$ zusammen, und $s$ schneidet die Gerade $d$.

Umgekehrt schließt man:

Wenn zwei Gerade nicht auf einer Ebene liegen und auf der einen die Puncte $A$, $B$, $C$, $D$, auf der andern die Puncte $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ so gegeben sind, daß $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$, so liegen die Geraden $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$ auf einem bestimmten geradlinigen Hyperboloid, welches die Geraden $AB$ und $A'B'$ enthält. Und wenn die Doppelverhältnisse von Ebenen, die je einen Büschel bilden, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ und $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ einander gleich sind, so liegen die Geraden $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ auf einem bestimmten geradlinigen Hyperboloid, welches die Geraden $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$ enthält. Denn eine Gerade $r$, welche die Geraden $AA'$, $BB'$, $CC'$ schneidet, hat auch mit $DD'$ einen Punct gemein, weil die Doppelverhältnisse von Ebenen

$$(rA, rB, rC, rD) \text{ und } (rA', rB', rC', rD')$$

gleiche Werthe haben, also die Ebenen $rD$ und $rD'$ zusammenfallen. Und die Gerade $r$, welche die Geraden $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ schneidet, hat auch mit $\delta\delta'$ einen Punct gemein, weil die Doppelverhältnisse von Puncten

$$(r\alpha, r\beta, r\gamma, r\delta) \text{ und } (r\alpha', r\beta', r\gamma', r\delta')$$

gleiche Werthe haben, also die Puncte $r\delta$ und $r\delta'$ zusammenfallen.

Anmerkung. Durch dieselben 4 Geraden $a$, $b$, $c$, $d$ eines geradlinigen Hyperboloids, die zu einem System gehören, so daß nicht zwei auf einer Ebene liegen, werden auf allen Geraden des andern Systems $p$, $q$, .. gleiche Doppelverhältnisse von Puncten bestimmt. Unter dem Doppelverhältniß von 4 Geraden eines Hyperboloids wird das Doppelverhältniß von Puncten verstanden, welche die gegebenen Geraden (der einen Serie) auf einer beliebigen Geraden (der andern Serie) bestimmen.

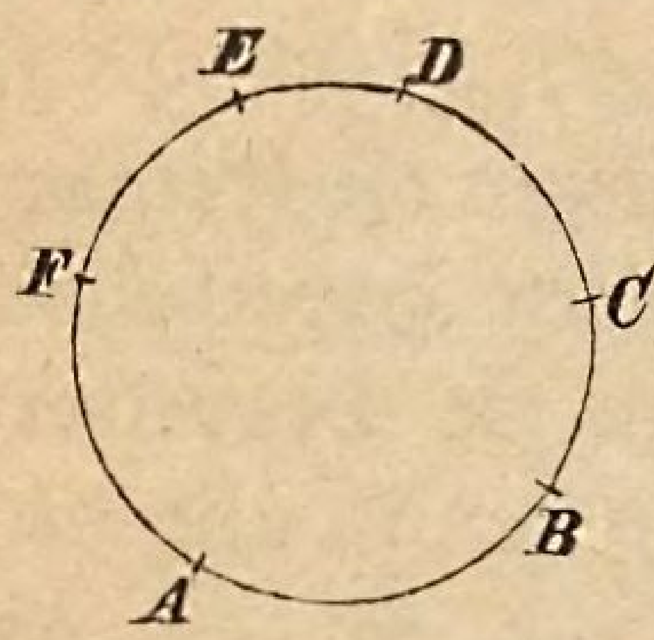
In einem hyperboloidischen (oder paraboloidischen) Sechseck wie $ABB_2C_2C_1A_1$ gehen die Diagonalen $AC$, $B_2C_1$, $B_2A_1$ durch einen Punct. Stereom. §. 5, 7 Anm.*)

17. Wenn das Sechseck $ABCDEF$ einem Kreise (einer planen oder sphärischen Linie zweiten Grades) eingeschrieben ist, so liegen die

*) Dandelin Gerg. Ann. 15. p. 393 und 16 p. 229. Hesse Crelle J. 24 p. 40.

Durchschnitte der gegenüberliegenden Seiten *AB* und *DE*, *BC* und *EF*, *CD* und *FA* auf einer (Pascal'schen) Geraden.*)

Wenn das Sechseck *abcdef* einem Kreise (einer planen oder sphärischen Linie zweiten Grades) umgeschrieben ist, so gehn die Geraden, welche die gegenüberliegenden Eckpuncte *ab* und *de*, *bc* und *ef*, *cd* und *fa* verbinden, durch einen (Brianchon'schen) Punct.**)




Beweis. Die Doppelverhältnisse von Geraden (*FC*, *FD*, *FE*, *FA*) und (*BC*, *BD*, *BE*, *BA*) haben denselben Werth, nämlich den Werth des Doppelverhältnisses von 4 bestimmten Puncten einer Linie zweiten Grades (15, Anm.). Die Büschel von Geraden bestimmen, der eine auf der Geraden *CD*, der andere auf der Geraden *DE*, die gleichen Doppelverhältnisse von Puncten (9)

(*C*, *D*, *FE*, *FA*) und (*BC*, *D*, *E*, *BA*)

Daher (14) gehn durch einen Punct

die Gerade, welche *C* mit dem gemeinschaftlichen Punct der Geraden *BC* und *DE* verbindet, d. i. *BC*,

die Gerade, welche den gemeinschaftlichen Punct der Geraden *CD* und *FE* mit *E* verbindet, d. i. *EF*,

die Gerade, welche den gemeinschaftlichen Punct der Geraden *CD* und *FA* mit dem gemeinschaftlichen Punct der Geraden *AB* und *DE* verbindet. Also enthält die dritte Gerade den gemeinschaftlichen Punct der beiden ersten.

Der Beweis des zugeordneten Satzes wird ebenso mit gegenseitiger Vertauschung von Geraden und Puncten geführt.

Umgekehrt schließt man: Wenn ein Sechseck eine Pascal'sche Gerade oder einen Brianchon'schen Punct hat, so ist es einer bestimmten Linie zweiten Grades ein- oder umgeschrieben.

Anmerkung. Durch 6 Puncte oder Tangenten einer Linie zweiten Grades werden mehrere Pascal'sche Gerade oder Brianchon'sche Puncte bestimmt, die wiederum besondere Eigenschaften haben.***)

18. Die in (17) bewiesenen Sätze gelten auch dann noch, wenn an die Stelle der Linie zweiten Grades zwei Gerade oder Puncte treten.

---

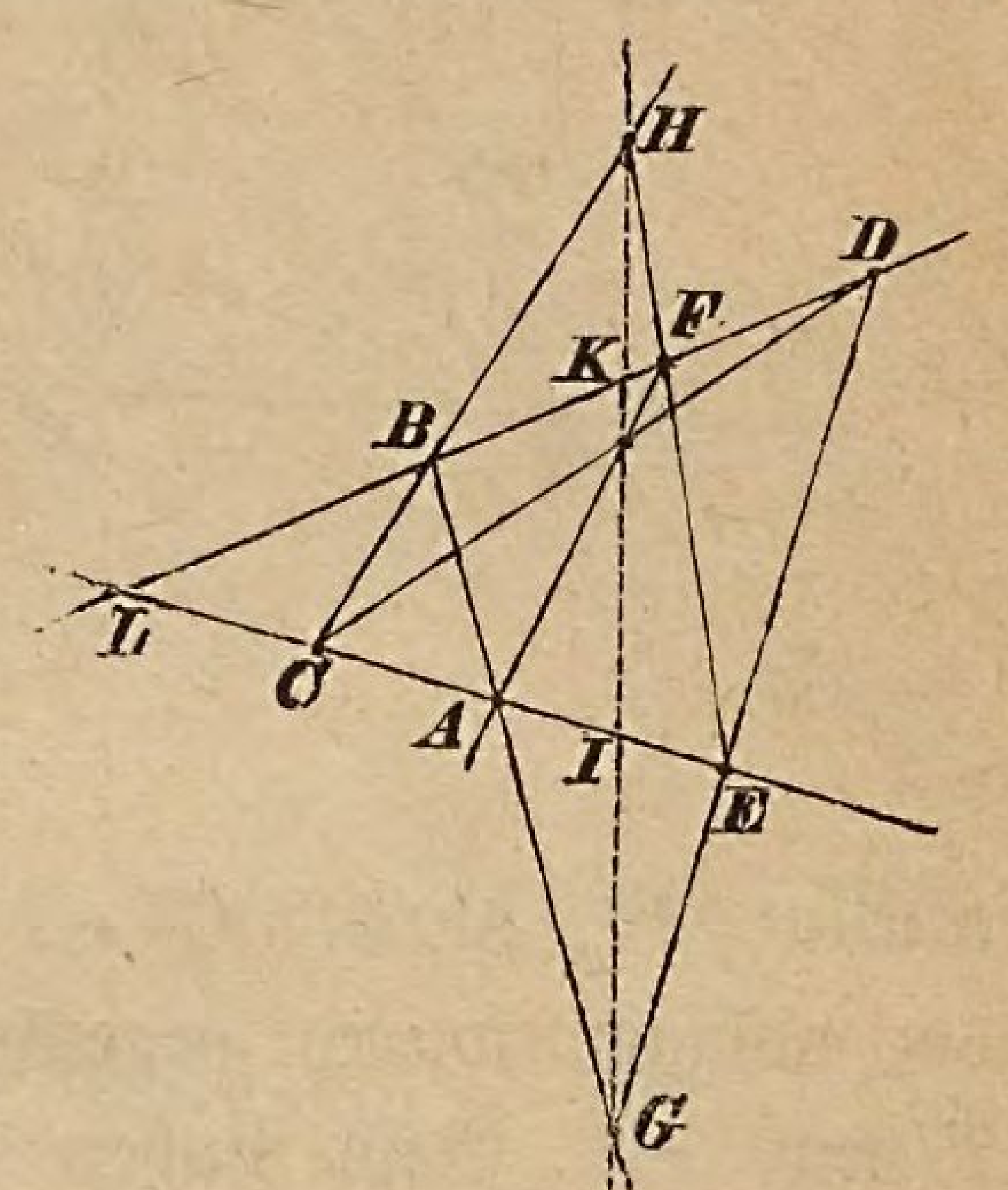
*) Pascal Essai pour les coniques, lemme 1 ohne Beweis (dieser kurze Aufsatz Oeuvres éd. Lahure II p. 354—7 gründet sich auf Desargues' Arbeiten). Das eingeschriebene Sechseck wird von Pascal hexagrammum mysticum genannt. A. a. O. p. 639.

**) Brianchon (1806) J. de l'Ec. polyt. Cah. 13 p. 301.

***) Dieselben sind von Steiner (syst. Entw. p. 311) und Kirkman angegeben worden. Vgl. Planim. §. 4, 6. Crelle J. 5 p. 268. 41 p. 269 und 66, 58 p. 174. 68 p. 193. 75 p. 1.

Wenn von einem Sechseck $ABCDEF$ drei nichtfolgende Eckpuncte $A$, $C$, $E$ auf einer Geraden, die übrigen auf einer andern Geraden liegen, so liegen die Durchschnitte der gegenüberliegenden Seiten $AB$ und $DE$, $BC$ und $EF$, $CD$ und $FA$ auf einer Geraden.

Wenn von einem Sechseck $abcdef$ drei nichtfolgende Seiten $a$, $c$, $e$ durch einen Punct, die übrigen durch einen andern Punct gehn, so gehn die Geraden, welche die gegenüberliegenden Eckpuncte $ab$ und $de$, $bc$ und $ef$, $cd$ und $fa$ verbinden, durch einen Punct.*)




Beweis. Bezeichnet man die gemeinschaftlichen Puncte von $AB$ und $DE$ durch $G$, von $BC$ und $EF$ durch $H$, von $GH$ und $ACE$ durch $J$, von $GH$ und $BDF$ durch $K$, von $ACE$ und $BDF$ durch $L$, so ist (9)

$$(L, J, A, E) = (L, K, B, D)$$
$$(L, J, E, C) = (L, K, F, B)$$

folglich durch Multiplication (8)

$$(L, J, A, C) = (L, K, F, D)$$

Daher (14) gehn die Geraden $JK$, $AF$, $CD$ durch einen Punct, d. h. der gemeinschaftliche Punct von $CD$ und $FA$ liegt auf der Geraden $JK$ oder $GH$.

Der zugeordnete Satz wird unter gegenseitiger Vertauschung von Geraden und Puncten eben so bewiesen.

**19.** Vier Puncte einer Ebene $A$, $B$, $C$, $D$ bestimmen 3 Paare von Geraden, $AB$ und $CD$, $BC$ und $AD$, $AC$ und $BD$, die Seiten und Diagonalen des Vierecks $ABCD$, welche auf einer beliebigen Geraden der Ebene eine Involution von Puncten bilden, d. h. mit ihr 3 Paare entsprechender Puncte dergestalt gemein haben, daß je 4 aus den 3 Paaren gewählte Puncte dasselbe Doppelverhältniß haben, als die entsprechenden Puncte.

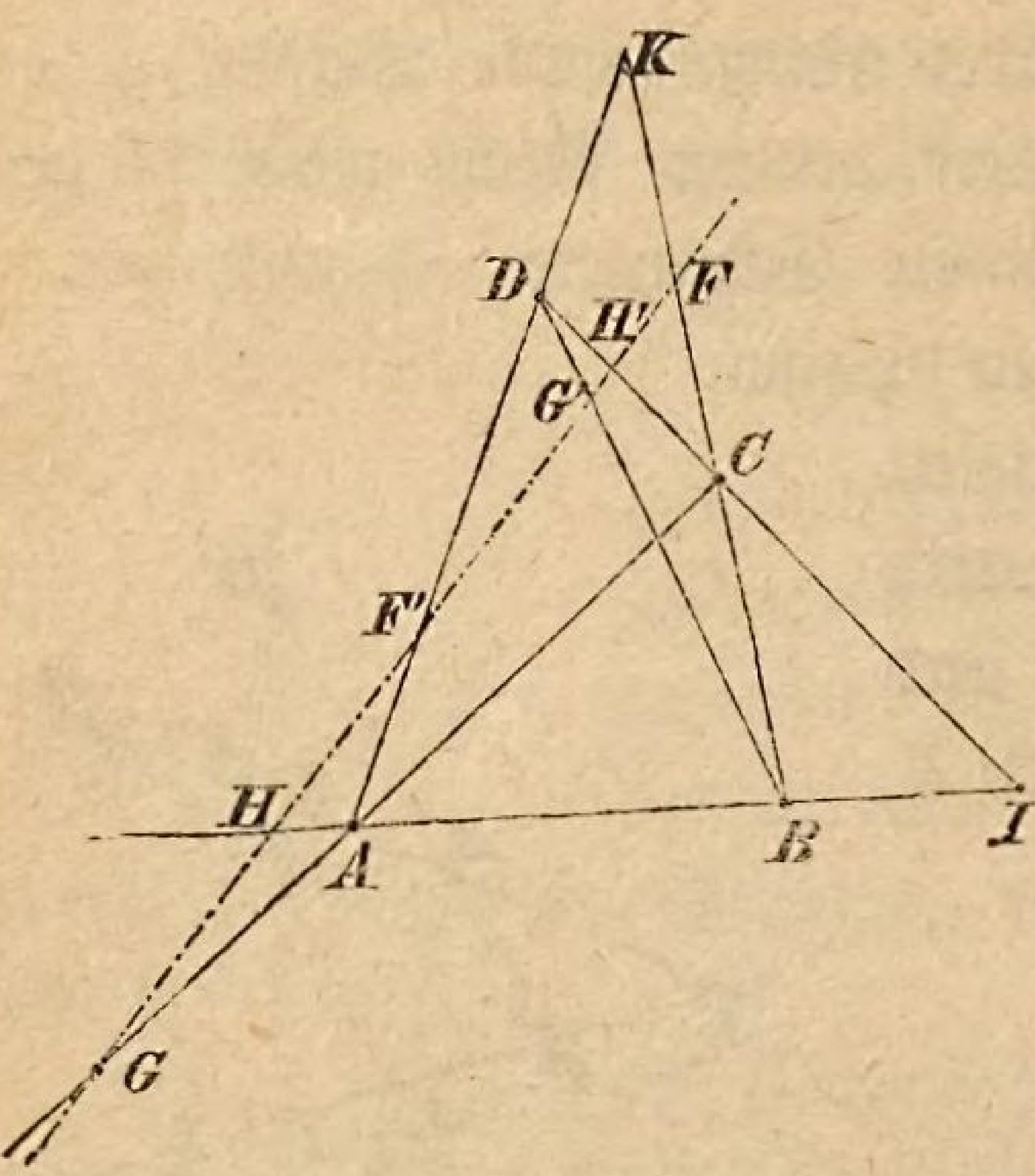
Vier Gerade einer Ebene $a$, $b$, $c$, $d$ bestimmen 3 Paare von Puncten, $ab$ und $cd$, $cb$ und $ad$, $ca$ und $bd$, welche mit einem beliebigen Punct der Ebene verbunden eine Involution von Geraden bilden, d. h. 3 Paare von entsprechenden Geraden dergestalt bestimmen, daß je 4 aus den 3 Paaren gewählte Gerade dasselbe Doppelverhältniß haben, als die entsprechenden Geraden.**)

---

*) Der erste Satz kommt bei Pappus VII, 138 und 139 vor, der andere ist von Poncelet propr. proj. 169 hinzugefügt worden. Vergl. Steiner syst. Entw. 23, III und p. 312.

**) Von dem ersten Satz hatten die griechischen Geometer Kenntniß nach Pappus VII, 130. Unter den Neuern hat zuerst Desargues a. a. O. p. 171 die Involu-

Beweis. Die beliebig angenommene Gerade habe mit den Geraden $BC$, $CA$, $AB$ die Puncte $F$, $G$, $H$, mit den Geraden $AD$, $BD$, $CD$ die entsprechenden Puncte $F'$, $G'$, $H'$ gemein. Dann ist (9)




$$(DA,\ DB,\ DC,\ DG) = (A,\ DB,\ C,\ G) = (BA,\ BD,\ BC,\ BG)$$

folglich auf der Geraden, welche die Büschel schneidet,

$$(F',\ G',\ H',\ G) = (H,\ G',\ F,\ G) = (F,\ G,\ H,\ G')$$

Man hat aber auch $(F',\ H',\ G',\ G) = (F,\ H,\ G,\ G')$ nach (12, I), d. h.

$$\frac{F'G'}{H'G'} : \frac{F'G}{H'G} = \frac{FG}{HG} : \frac{FG'}{HG'}$$

oder $$\frac{F'G'}{HG'} : \frac{F'G}{HG} = \frac{FG}{H'G} : \frac{FG'}{H'G'}$$

mithin $(F',\ H,\ G',\ G) = (F,\ H',\ G,\ G')$. Diese Gleichung entspringt aus der vorigen durch gegenseitige Vertauschung von $H$ und $H'$, oder von $F$ und $F'$. Also haben je 4 aus den 3 Paaren $F$ und $F'$, $G$ und $G'$, $H$ und $H'$ gewählte Puncte dasselbe Doppelverhältniß als die entsprechenden Puncte.

Der zugeordnete Satz wird ebenso bewiesen.

Anmerkung. Die Gleichung $(F, G, H, G') = (F', G', H', G)$, durch welche die Involution der 3 Paare $F$ und $F'$, $G$ und $G'$, $H$ und $H'$ von Puncten einer Geraden bestimmt wird, kann den Ausdruck

$$\frac{F'H'}{G'H'}\,\frac{G'F}{HF}\,\frac{HG}{F'G} = 1$$

oder nach gegenseitiger Vertauschung von $F$ und $F'$, $G$ und $G'$

$$\frac{FH'}{GH'}\,\frac{GF'}{HF'}\,\frac{HG'}{FG'} = 1$$

erhalten und aus (6) abgeleitet werden.

Wenn ein Punct der Involution z. B. $G$ unendlich fern ist, so fällt der entsprechende Punct $G'$ mit einem bestimmten Punct $O$ zusammen, der zufolge der Gleichung $(F',\ H,\ G',\ G) = (F,\ H',\ G,\ G')$ so liegt, daß

---

tion von Puncten untersucht und den Namen Involution eingeführt. Vergl. Brianchon lignes du 2. ordre 8 und Poncelet propr. proj. 178, Chasles Ap. hist. Note X und Géom. sup. 220. 339 ff. Staudt Geometrie der Lage §. 16. Aus der Projectivität der Involutionen erkennt man die Gültigkeit der obigen Sätze in der Sphärik. Nach Analogie der (binären) Involution von Paaren sind ternäre, quaternäre, u. s. w. Involutionen in Betracht gezogen worden: Möbius Leipziger Berichte 1855—6, Jonquieres 1859 Annali di matem. t. 2 p. 86, Cremona Curve piane 21.

$$(F', H, O)(F, H', O) = 1, \quad FO.F'O = HO.H'O$$

ist. Demnach hat $O$ gleiche Potenzen in Bezug auf Kreise $FF'$ und $HH'$.

Wenn ein Punct der Involution mit dem entsprechenden zusammenfällt z. B. $H$ mit $H'$ in $J$, dem gemeinschaftlichen Punct von $AB$ und $CD$, so ist zufolge der angeführten Gleichung

$$(F, J, G, G')(F', J, G, G') = 1$$

Wenn außerdem $F'$ und $F$ in $K$, dem gemeinschaftlichen Punct von $BC$ und $AD$, zusammenfallen, so wird $(K, J, G, G')^2 = 1$, und weil $GG'$ nicht zugleich verschwinden kann,

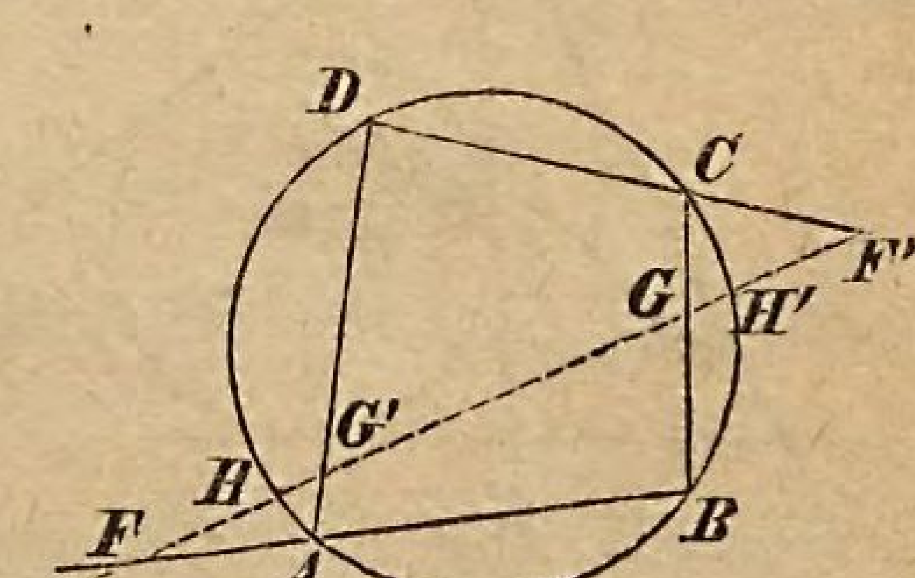
$$(K, J, G, G') = -1 \quad (11)$$

Drei Paare von Puncten oder Tangenten einer Linie zweiten Grades bilden eine Involution, wenn je 4 aus den 3 Paaren gewählte Puncte oder Tangenten in der oben (15, Anm.) festgesetzten Bedeutung dasselbe Doppelverhältniß haben, als die entsprechenden Puncte oder Tangenten. Die Geraden, welche die entsprechenden Puncte verbinden, gehn durch einen Punct; die Puncte, welche die entsprechenden Tangenten gemein haben, liegen auf einer Geraden. Vergl. unten (21).

Drei Paare von Geraden eines Hyperboloids, unter denen nicht zwei auf einer Ebene liegen, bilden eine Involution, wenn je 4 aus den 3 Paaren gewählte Gerade dasselbe Doppelverhältniß haben (16, Anm.), als die entsprechenden Geraden.

**20.** Zwei Puncte einer Linie zweiten Grades und die beiden Paare nicht folgender Seiten eines eingeschriebenen Vierecks bestimmen eine Involution von Puncten.*)

Zwei Tangenten einer Linie zweiten Grades und die beiden Paare nicht folgender Eckpuncte eines umgeschriebenen Vierecks bestimmen eine Involution von Geraden.




Beweis. Sind $H$ und $H'$ Puncte eines dem Viereck $ABCD$ umgeschriebenen Kreises, werden $AB$ und $CD$, $BC$ und $DA$ von der Geraden $HH'$ in $F$ und $F'$, $G$ und $G'$ geschnitten, so ist das Doppelverhältniß der Puncte $B$, $D$, $H$, $H'$ (15, Anm.)

$$(AB, AD, AH, AH') = (CB, CD, CH, CH')$$

folglich (9)

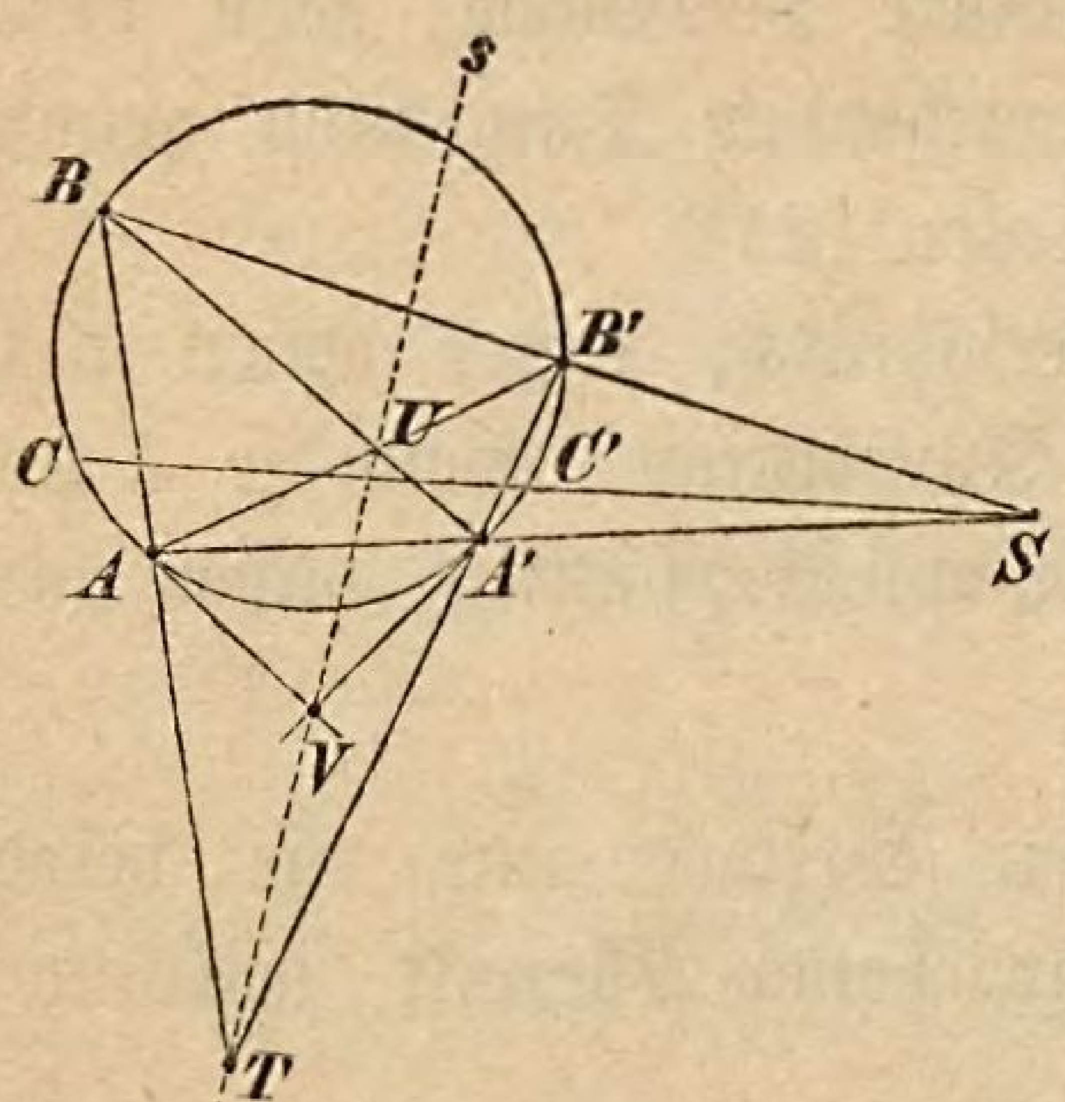
$$(F, G', H, H') = (G, F', H, H') = (F', G, H', H)$$

Ebenso wird der zugeordnete Satz bewiesen.

*) Desargues a. a. O. Vergl. Pascal Essai p. les coniques éd. Lahure II. p. 356. Poncelet a. a. O. Chasles Ap. hist. Note X, 20. Géom. sup. 656 und 667.

**21.** Wenn einer Linie zweiten Grades die Figuren $AB$ . . und $A'B'$ . . so eingeschrieben sind, daß die Geraden $AA'$, $BB'$, . ., welche die entsprechenden Puncte $A$ und $A'$, . . verbinden, durch einen Punct $S$ gehn, so liegen die gemeinschaftlichen Puncte der entsprechenden Geraden $AB$ und $A'B'$, . ., $AB'$ und $A'B$, . . und der Tangenten an entsprechenden Puncten auf einer Geraden $s$. Jedes Paar entsprechender Puncte ist dem Punct $S$ und der Geraden $s$ harmonisch zugeordnet. Die Gerade $s$ heißt die (harmonische, reciproke) **Polare des Punctes** $S$ **in Bezug auf die Linie zweiten Grades.**

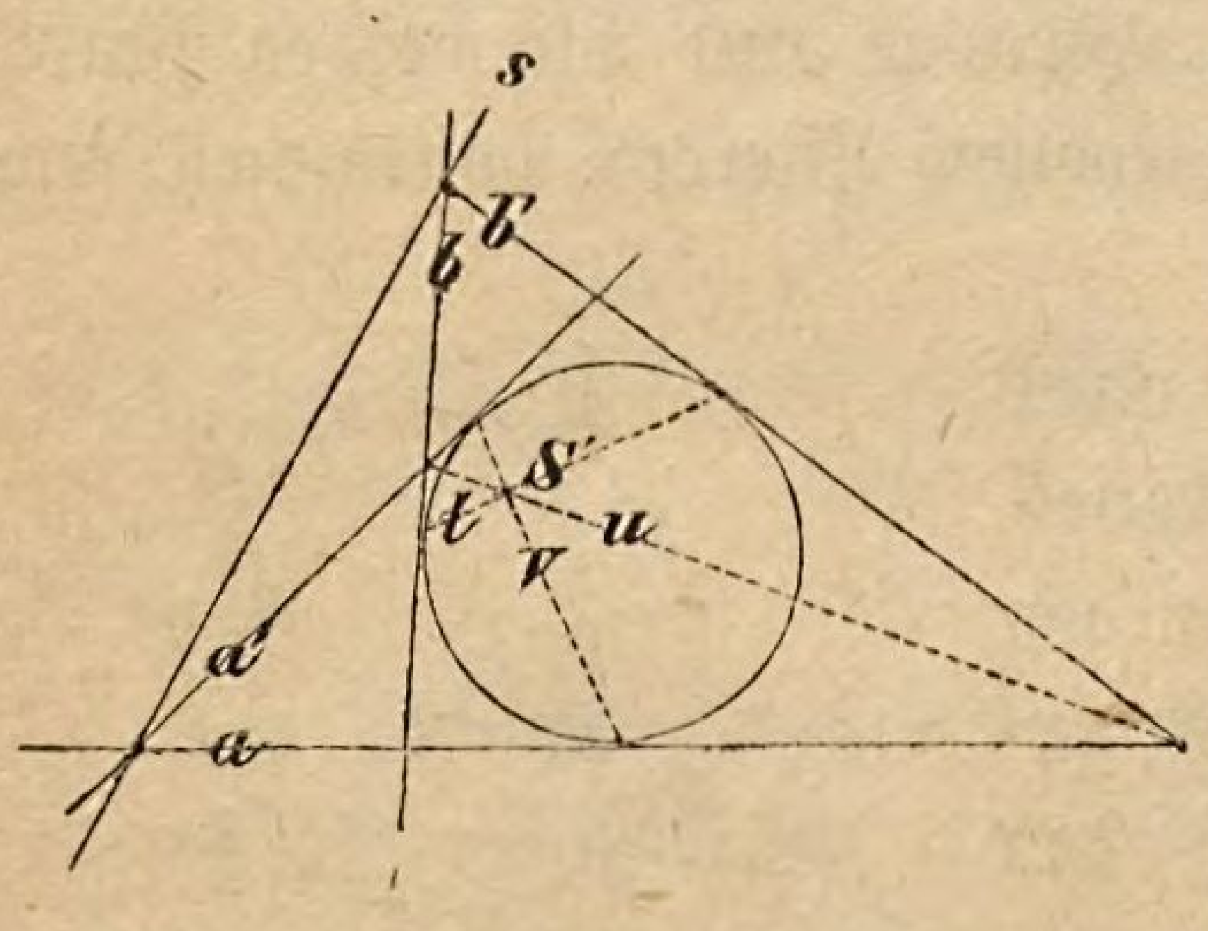
Wenn einer Linie zweiten Grades die Figuren $ab$ . . und $a'b'$ . . so umgeschrieben sind, daß die Puncte $aa'$, $bb'$, . ., welche die entsprechenden Geraden $a$ und $a'$, . . gemein haben, auf einer Geraden $s$ liegen, so gehn die Geraden, welche die entsprechenden Puncte $ab$ und $a'b'$, . ., $ab'$ und $a'b$, . . und die Berührungspuncte von entsprechenden Tangenten verbinden, durch einen Punct $S$. Jedes Paar entsprechender Tangenten ist der Geraden $s$ und dem Punct $S$ harmonisch zugeordnet. Der Punct $S$ heißt der (harmonische, reciproke) **Pol der Geraden** $s$ **in Bezug auf die Linie zweiten Grades.***)




**Beweis.** Ist das Sechseck $ABC'A'B'C$ einer Linie zweiten Grades beliebig eingeschrieben, so liegen nach Pascal's Theorem (17) die gemeinschaftlichen Puncte der Geraden

$AB$ und $A'B'$, $BC'$ und $B'C$, $C'A'$ und $CA$

auch dann auf einer Geraden, wenn $C'$ mit $A'$, $C$ mit $A$, folglich $C'A'$ mit der Tangente $a'$, $CA$ mit der Tangente $a$ der Curve zusammenfällt. Bezeichnet man also die gemeinschaftlichen Puncte von $AA'$ und $BB'$, $AB$ und $A'B'$, $AB'$ und $A'B$, $a$ und $a'$ durch $S$, $T$, $U$, $V$, so




*) Die harmonische Theilung von $AA'$ durch $S$ und $s$ war den griechischen Geometern bekannt: Apollonius Conica I, 34. III, 37. Pappus VII, 161. Vergl. Planim. §. 14, 5 und Stereom. §. 5, 12. Der obige Satz wurde vollständiger ergründet durch Lahire (Sect. con.) und Maclaurin (de lin. geom. propr. II, Anhang der Algebra). Vergl. Poncelet propr. proj. 186. 194. Die weitere Bedeutung des Satzes ist besonders von Brianchon J. de l'Ec. polyt. Cah. 13 p. 297 erkannt worden. Vergl. Chasles Ap. hist. p. 397 d. Uebers. Steiner syst. Entw. 44. Chasles Géom. sup. 675 ff. und die Anm. zu Stereom. §. 1, 9.

liegen $T$, $U$, $V$ auf einer Geraden. Nun bilden die Geraden $AB$ $A'B'$, $TS$, $TU$ einen harmonischen Büschel (11), daher ist auch (9)

$$(A, A', S, TU) = -1$$
$$(AV, A'V, SV, UV) = -1$$

Zieht man ferner durch $S$ eine Gerade, welche die Curve in $C$ und $C'$ schneidet, und bezeichnet den gemeinschaftlichen Punct der Geraden $AC$ und $A'C'$ durch $W$, so hat man

$$(AV, A'V, SV, WV) = -1$$

woraus folgt, daß $W$ auf der Geraden $UV$ liegt, u. s. w.

Der zugeordnete Satz wird ebenso bewiesen.

Anmerkung. Wenn die Paare von entsprechenden Puncten $A$ und $A'$, $B$ und $B'$, $C$ und $C'$ einer Linie zweiten Grades so liegen, daß die Geraden $AA'$, $BB'$, $CC'$ durch einen Punct $S$ gehn, so bilden sie eine Involution (19, Anm.). Und wenn die Paare von entsprechenden Tangenten $a$ und $a'$, $b$ und $b'$, $c$ und $c'$ einer Linie zweiten Grades so liegen, daß ihre gemeinschaftlichen Puncte $aa'$, $bb'$, $cc'$ einer Geraden $s$ angehören, so bilden sie eine Involution. Denn die gemeinschaftlichen Puncte von $AB$ und $A'B'$, $AC'$ und $A'C$, $AC$ und $A'C'$ liegen auf einer Geraden, der Polare von $S$. Daher ist (9)

$$(AA', AB, AC', AC) = (A'A, A'B', A'C, A'C')$$

d. h. das Doppelverhältniß der Puncte $A'$, $B$, $C'$, $C$ der Linie zweiten Grades ist dem Doppelverhältniß der entsprechenden Puncte $A$, $B'$, $C$, $C'$ gleich, u. s. w.

22. Wenn die Gerade $s$ die Polare des Punctes $S$ in Bezug auf eine Linie zweiten Grades ist, so ist der Punct $S$ der Pol der Geraden $s$. Wäre der Punct $T$ der Pol von $s$, so wäre für zwei Tangenten $a$, $a'$, die mit $s$ denselben Punct gemein haben und die Curve in $A$ und $A'$ berühren,

$$(A, A', s, T) = (a, a', s, T) = -1$$

folglich $(A, A', s, S)$ von $-1$ verschieden, gegen die über $S$ gemachte Voraussetzung.

Wenn $s$ die Polare von $S$ ist und mit der Curve den Punct $E$ gemein hat, so ist die Gerade $SE$ eine Tangente der Curve. Hat die Gerade $SE$ mit der Curve den Punct $E'$ gemein, so ist

$$(E, E', s, S) = -1$$

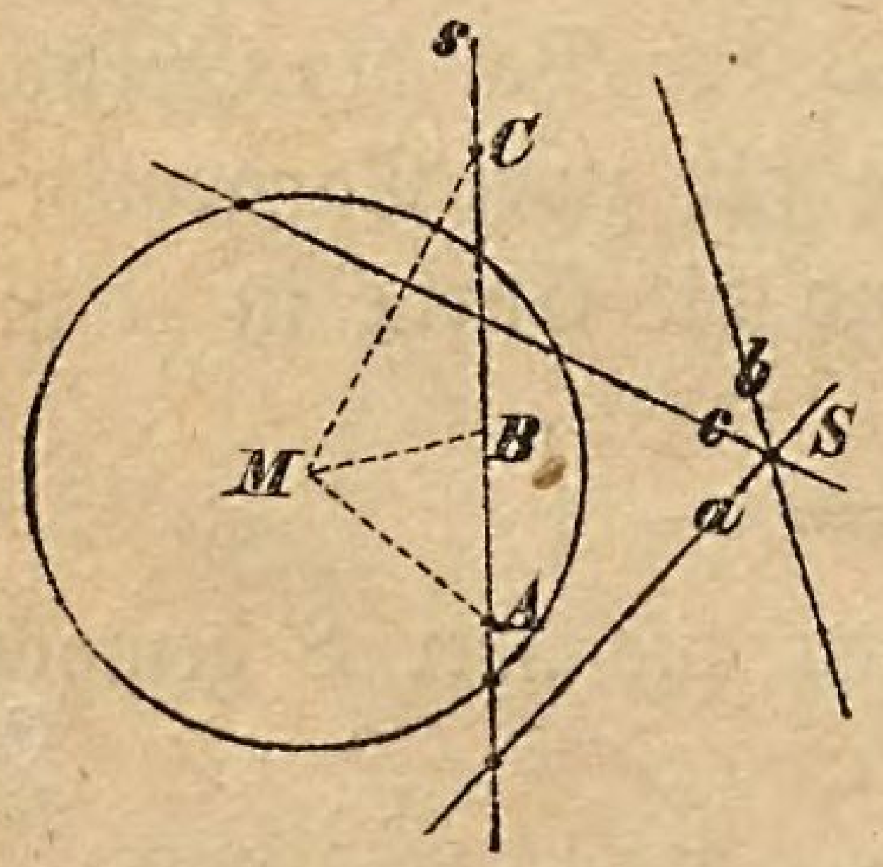
Weil aber $E$ auf $s$ liegt, so liegt auch $E'$ auf $s$, d. h. $EE'$ verschwindet. Daher ist jede Sehne der Curve die Polare des Punctes, welchen die Tangenten ihrer Endpuncte gemein haben. Insbesondere ist jede Tangente die Polare ihres Berührungspunctes.

Wenn die Geraden $t, u, v, \ldots$ durch den Punct $S$ gehn, so liegen ihre Pole auf der Polare $s$ des Punctes $S$. Wenn nämlich die Gerade $t$ die Curve in $P$ und $P'$ schneidet, so ist ihr Pol der gemeinschaftliche Punct der durch $P$ und $P'$ gehenden Tangenten, welcher auf der Polare von $S$ liegt (21). Wenn die Gerade $u$ die Curve berührt, so ist ihr Pol der Berührungspunct, welcher auf der Polare von $S$ liegt. Wenn die Gerade $v$ die Curve weder schneidet noch berührt, so gehn durch den Punct $sv$ zwei Tangenten der Curve, die sowohl mit $v$ und ihrem Pol $V$, als auch mit $S$ und $s$ einen harmonischen Büschel bestimmen; nun geht $v$ durch $S$, also liegt $V$ auf $s$.

Parallele Sehnen einer Linie zweiten Grades, welche den unendlich fernen Punct $S$ gemein haben, werden von der Polare $s$ desselben halbirt; die Polaren von unendlich fernen Puncten sind Diameter der Curve. Die Polare der Mitte eines Diameters geht durch den unendlich fernen Punct des Diameters und durch den unendlich fernen Pol desselben, ist also unendlich fern; eine Gerade, die durch die Mitte eines Diameters geht, hat einen unendlich fernen Pol und ist ein Diameter der Curve. Alle Diameter derselben haben also eine gemeinschaftliche Mitte, den Pol der unendlich fernen Geraden (Stereom. §. 1, 4), das Centrum der Linie zweiten Grades.

23. Wenn die Puncte $A, B, C, D$ auf einer Geraden liegen, so bilden ihre Polaren in Bezug auf eine Linie zweiten Grades $a, b, c, d$ einen Büschel dergestalt daß*)

$$(A, B, C, D) = (a, b, c, d)$$




Beweis. Ist $S$ der Pol der Geraden $s$ in Bezug auf den Kreis $(M)$, so gehn durch $S$ die Polaren $a, b, c, d$ der auf $s$ liegenden Puncte $A, B, C, D$ (22). Die Geraden $MA$, $MB, \ldots$ sind normal zu $a, b, \ldots$ Dreht man die Figur $MAB \ldots$ in ihrer Ebene um den Punct $M$, bis $MA$ mit $a$ parallel ist, so werden $MB$, $MC$, $MD$ mit $b, c, d$ parallel, folglich ist

$$(MA, MB, MC, MD) = (a, b, c, d)$$
$$(A, B, C, D) = (a, b, c, d)$$

wie oben (15, Anm.) in dem Falle gefunden wurde, daß $A, B, C, D$ Puncte der Linie zweiten Grades bedeuten.

*) Möbius baryc. Calc. 290. Magnus Aufgaben I p. 65. Chasles Géom. sup. 691.

Druck von Hundertstund & Pries in Leipzig.

Baltzer, Richard

Die Elemente der Mathematik

Bd.: 2

Leipzig 1874